การถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา

นางสาว ปรียากมล เลิศวัฒนะไพศาล*

ดร.บุญสร้าง คิเรกสถาพร**

ดร.สมหมาย ปรีเปรม***

ดร.สมนึก ธีระกุลพิศุทธิ์***

บทคัดย่อ

ในการศึกษาถึงการถ่ายเทความร้อนระหว่างชั้นวัสดุหนาและของไหลภายในชั้นวัสดุหนาที่ผ่านมาได้มีผู้ศึกษาไว้หลายท่านด้วยกัน แต่โดยทั่วไปเป็นการศึกษาโดยไม่คำนึงถึงการนำความร้อนที่เกิดขึ้นภายในชั้นวัสดุหนา โดยตั้งสมมุติฐานให้ชั้นวัสดุหนามีขนาดเล็กมากเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของชั้นหนาและถือว่าค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของชั้นวัสดุหนามีค่าสูงมาก แต่ในงานที่ต้องการความถูกต้องสูงข้อสมมุติฐานดังกล่าวอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการวิเคราะห์ได้เพื่อที่จะทำให้การวิเคราะห์ปัญหาใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น การศึกษาครั้งนี้จึงได้วิเคราะห์ปัญหาโดยคำนึงถึงการนำความร้อนที่เกิดขึ้นในชั้นวัสดุหนาด้วย โดยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สองแบบด้วยกัน แบบจำลองแรกเป็นกรณีที่การกระจายอุณหภูมิภายในชั้นหนาสม่ำเสมอซึ่งทำการวิเคราะห์โดยการวิเคราะห์เชิงเลข และแบบจำลองที่สองเป็นกรณีการกระจายอุณหภูมิภายในชั้นหนาไม่สม่ำเสมอ โดยในกรณีนี้ได้แบ่งการวิเคราะห์ออกเป็นสองอย่างคือการวิเคราะห์เชิงเลขและการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ ในการจำลองสถานการณ์เพื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณจะพบว่าผลที่ได้จากการคำนวณโดยการวิเคราะห์เชิงเลขทั้งกรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นหนาสม่ำเสมอและไม่สม่ำเสมอพบว่าให้ผลที่ใกล้เคียงกัน แต่จะมีความแตกต่างค่อนข้างมากจากผลที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์กรณีที่การกระจายอุณหภูมิในชั้นหนาไม่สม่ำเสมอ และเมื่อนำผลการคำนวณมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองซึ่งมีผู้อื่นทดลองไว้แล้วจะพบว่าผลการคำนวณที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์กรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นหนาไม่สม่ำเสมอให้ผลที่ใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าอีกสองกรณี

---

* นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

*** รองศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

Heat Transfer in Packed Bed

Miss.Preeyakamon Lertwattanaphaisal*

Dr.Boonsrang Direcksataporn**

Dr.Sommai Priprem***

Dr.Somnuk Theerakupisut***

Abstract

A great deal of work on the heat transfer between a packed bed of solid particles and the fluid flowing through it was published in the literature. However, most of it neglected the effect of heat conduction in the solid particles by assuming that the solid particles are small and/or the thermal conductivity of the solid material is high. Therefore the results of such a simple model is valid only under the circumstance where the assumption holds. In this study , we attempted to model the heat transfer process by taking into account the effect of heat conduction in the solids particles in the bed . Two models were investigated in this study. One is a uniform-temperature model which was numerically solved. The other model is a non-uniform temperature one which was solved by finite-difference technique and by analytical approach. The models were simulated to compare the results and it was found that the two models when solved by the finite-difference technique yielded similar results. However , the results of the non-uniform model with the analytical solution indicated a significant difference from the other two solutions. When compared with the experimental results available in the literature , it was found that the non-uniform-temperature model yielded the simulation results in better agreement with the experimental values

---

* Graduate student , Department of Mechanical Engineering ,
Faculty of Engineering , Khon Kean University

** Assistant Professor., Department of Mechanical Engineering ,
Faculty of Engineering , Khon Kean University

*** Associate Professor , Department of Mechanical Engineering ,
Faculty of Engineering , Khon Kean University

1.บทนำ

กระบวนการในการนำของไหลซึ่งมีอุณหภูมิสูงไหลผ่านชั้นวัสดุหนา (packed bed of solid Partical) ที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าเพื่อให้เกิดการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างชั้นวัสดุหนาและของไหลนั้น เป็นกระบวนการที่ใช้ในงานอุตสาหกรรมหลายชนิดด้วยกัน เช่นในกระบวนการสะสมพลังงานความร้อนจากแสงอาทิตย์เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger) และรีเจนเนอร์เรเตอร์ (regenerator) ถึงแม้นหลักการพื้นฐานในแต่ละกระบวนการจะเหมือนกันคือใช้ของไหลซึ่งมีอุณหภูมิสูงไหลผ่านชั้นวัสดุหนาที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า แต่ชนิดของของไหลและชนิดของชั้นวัสดุหนาและวิธีการที่ใช้ก็จะแตกต่างกันไป ดังนั้นงานที่ศึกษาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา จึงมีเป็นจำนวนมาก

การถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและวัสดุหนาภายในชั้นวัสดุหนา จากการศึกษาของ Schumann *(1929)* พบว่าจะขึ้นอยู่กับตัวแปรหลายตัวไม่ว่าจะเป็น การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัสดุหนาและของไหล ความเร็วและความดันของของไหล ความหนาแน่นของของไหลและวัสดุหนา ค่าความจุความร้อนของของไหลและวัสดุหนา ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนระหว่างของไหลและวัสดุหนา เป็นต้น การศึกษาจะแบ่งออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาสม่ำเสมอและกรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาไม่สม่ำเสมอ

2 การถ่ายเทความร้อนกรณีที่การกระจายอุณหภูมิชั้นวัสดุหนาสม่ำเสมอ

ในการพิจารณาการถ่ายเทความร้อน ระหว่างของไหลและวัสดุตัวกลางภายใน ชั้นวัสดุหนา กรณีการกระจายอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาสม่ำเสมอนี้จะพิจารณาถึงการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นทั้งในส่วนของของไหลและในส่วนที่เป็นชั้นวัสดุหนาแต่ จะถือว่าอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนานั้นเท่ากันทั้งก้อน

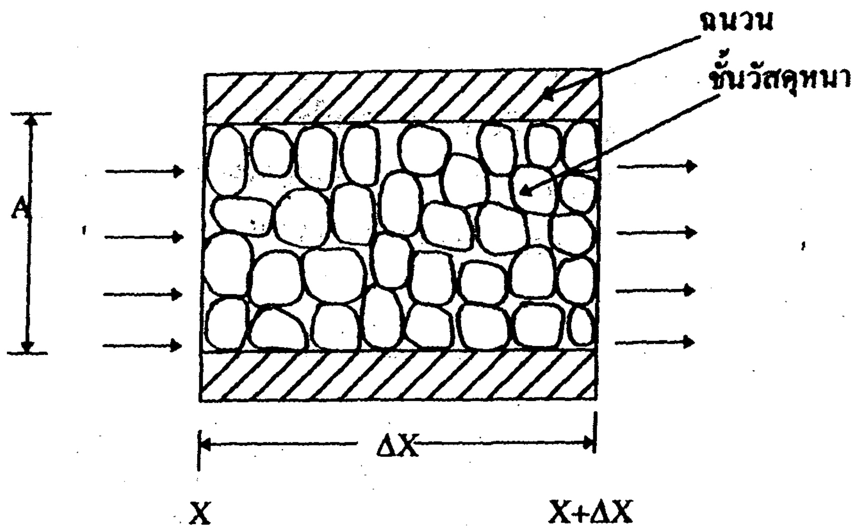
จากการพิจารณาสมดุลของพลังงานในปริมาตรควบคุมเล็กๆในชั้นวัสดุหนา . ดังรูป 1 สามารถเขียนสมการความสมดุลของพลังงาน โดยไม่มีการสูญเสียความร้อนให้แก่สิ่งแวดล้อมและไม่มีพลังงานความร้อนที่ผลิตขึ้นเองได้ดังนี้

สมการความสมดุลพลังงานของของไหลคือ

$$\rho_a C_a A_a \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = A_a K_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h_v A(\theta - T) \qquad (1)$$

พื้นที่ที่ใช้ในการถ่ายเทความร้อนของของไหล $A_a = \varepsilon A$

$$\rho_a C_a \varepsilon A \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \varepsilon A K_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h_v A(\theta - T) \qquad (2)$$



รูปที่ 1 การไหลของของไหลผ่าน ชั้นวัสดุหนา

พิจารณาความสมดุลพลังงานของชั้นวัสดุหนา ในทำนองเดียวกับสมการของชั้นวัสดุหนาจะได้ว่า

$$\rho_b C_b (1-\varepsilon) A\left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] = (1-\varepsilon) A K_b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + h_v A (T-\theta) \qquad (3)$$

ข้อสมมุติฐานเพิ่มเติมในการพิจารณาคือ

1. ไม่คิดการถ่ายเทความร้อนในแนวรัศมีของชั้นหนา
2. ไม่คิดค่าการนำความร้อนระหว่างก้อนของชั้นวัสดุหนา และค่าการนำความร้อนของของไหล
3. ถือว่าไม่มีการถ่ายเทมวล
4. ความเร็วและความดันของของไหลถือว่ามีค่าคงที่ตลอดชั้นหนา
5. ไม่คิดผลของการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของไหลและชั้นวัสดุหนา ที่มาจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ
6. เนื่องจากถือว่าวัสดุที่ใช้ในการส่งถ่ายความร้อนมีค่าการนำความร้อนสูงมาก ดังนั้นถือว่าอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาเท่ากันทั้งก้อน

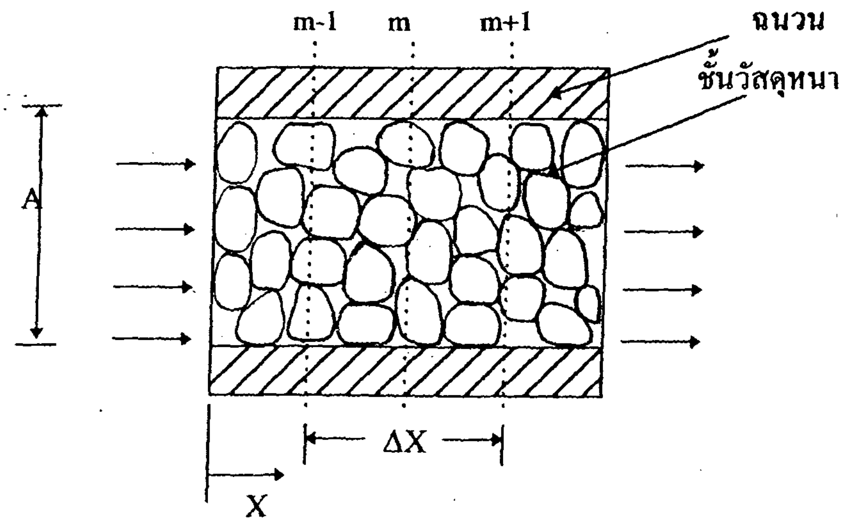
จากการศึกษาของ Maclaime-Cross (1980) ได้พบว่าถ้าอัตราส่วนค่าความจุความร้อนของชั้นวัสดุหนาต่อความจุความร้อนของของไหลมีค่ามากกว่า 100 จะถือว่าค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลสามารถตัดทิ้งได้

$$\frac{\rho_b C_b (1-\varepsilon)}{\rho_a C_a \varepsilon} > 100$$

สมการ (2) จะสามารถตัดเทอมอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิออกได้

$$\varepsilon\rho_a C_a \frac{\partial T}{\partial x} = h_v(\theta - T) \quad (4)$$

ในการศึกษาการถ่ายเทความร้อนกรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาสม่ำเสมอ จะใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข เนื่องจากสมการที่ได้สามารถแก้สมการได้ง่ายและยังสามารถทำการคำนวณได้อย่างรวดเร็วอีกด้วย โดยในการศึกษาเราจะแบ่งชั้นวัสดุหนาออกเป็นชั้นบางๆ ดังรูปที่ 2 แล้วทำการหาค่าของอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาและของไหลที่เปลี่ยนแปลงตามระยะทางและเวลาในแต่ละชั้น



รูปที่ 2 การศึกษาโดยใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลขของชั้นวัสดุหนา

จากสมการ (3) และ (4) สามารถเขียนสมการใหม่โดยใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข คือ

จากสมการที่ (3)
$$T^i_{m+1} - T^i_{m-1} = \frac{1}{B}\left(\theta^i_m - T^i_m\right) \quad (5)$$

จากสมการ (4)
$$\theta^{i+1}_m - \theta^i_m = \frac{1}{C}\left(T^i_{m-1} - T^i_{m+1}\right) \quad (6)$$

โดยที่ $B = \dfrac{\rho_a C_a \varepsilon u}{h_v \Delta x}$ และ $C = \dfrac{(1-\varepsilon)\,\rho_b C_b \Delta x}{\rho_a C_a u \varepsilon \Delta t}$

จัดรูปสมการ (5) และ (6) ใหม่เพื่อให้อยู่ในรูปที่สะดวกในการคำนวณ

สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลคือ

$$T^i_{m+1} = \frac{1}{1+2B}\left(2\theta^i_m + (2B-1)T^i_m\right) \quad (7)$$

สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาคือ

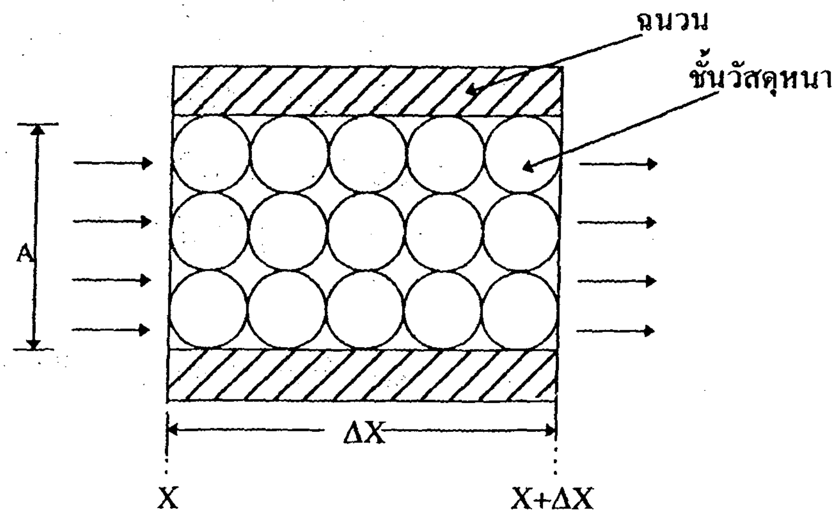
$$\theta_{m+1}^{i+1} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{C}+1-2B\right)T_m^i + \left(1+2B-\frac{2}{C}\right)T_{m+1}^i\right) \quad (8)$$

สมการที่ (7) และ (8) คือสมการที่จะนำไปใช้ แต่ค่าอุณหภูมิที่ได้จากการแก้สมการจะมีค่าเป็นลบไม่ได้ เพื่อเป็นการป้องกันการเกิดความไม่เสถียรนี้

$$B > 1/2 \quad \text{และ} \quad C > (2/(1+2B))$$

3. การถ่ายเทความร้อนกรณีที่การกระจายอุณหภูมิชั้นวัสดุหนาไม่สม่ำเสมอ

จากหัวข้อที่ผ่านมาถือว่าการกระจายอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาสม่ำเสมอได้เนื่องจากกำหนดให้ชั้นวัสดุหนามีสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่สูงมาก ทำให้อุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาเท่ากันทั้งก้อน แต่ในหัวข้อนี้จะศึกษาโดยกำหนดให้มีการกระจายของอุณหภูมิเกิดขึ้นภายในชั้นวัสดุหนาด้วย โดยให้ชั้นวัสดุหนาที่อยู่ภายในชั้นหนามีลักษณะเป็นทรงกลมและมีการวางเป็นลำดับชั้น ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การไหลของของไหลผ่านชั้นวัสดุหนา

พิจารณาการความสมดุลพลังงานในปริมาตรควบคุมเล็กๆในรูปที่ 3 สามารถเขียนสมการความสมดุลพลังงานได้ดังนี้

พิจารณาความสมดุลพลังงานของของไหล

$$\varepsilon\rho_a C_a u\frac{\partial T}{\partial x} = h_v(\theta - T) \quad (9)$$

พิจารณาความสมดุลพลังงานภายในวัสดุหนา

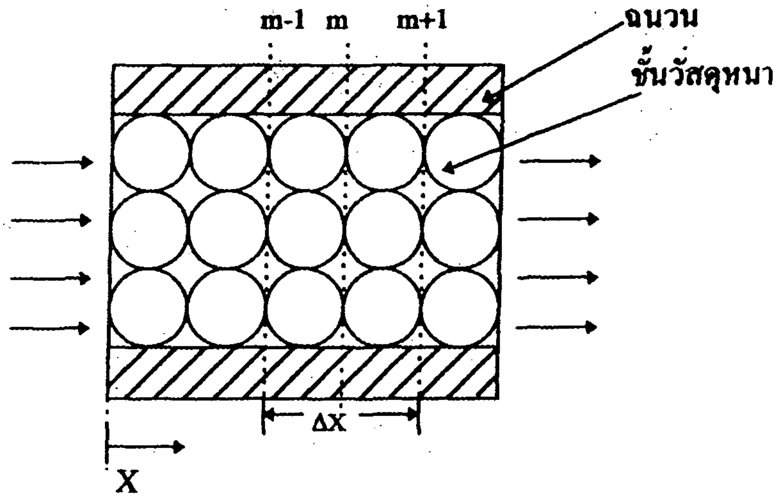
$$(1-\varepsilon)\,\rho_b C_b\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = K_b(1-\varepsilon)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial\theta}{\partial r}\right) \quad (10)$$

และพิจารณาความสมดุลพลังงานที่ผิวของวัสดุหนา

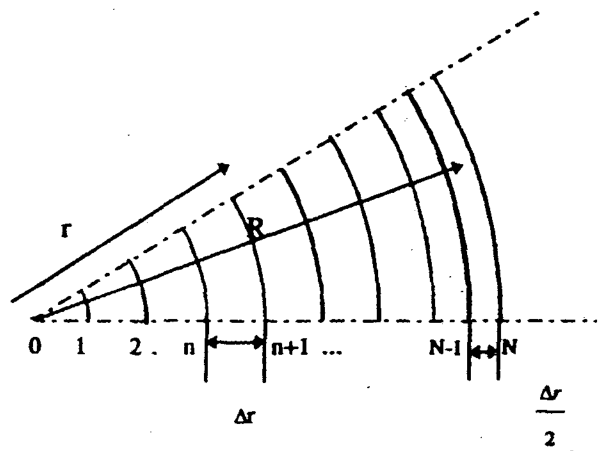
$$-\left[K_b \frac{\partial\theta}{\partial r}\right]_{r=R} = h(\theta - T) \tag{11}$$

4.การศึกษาการถ่ายเทความร้อนกรณีที่อุณหภูมิชั้นวัสดุหนากระจายไม่สม่ำเสมอ โดยการประมาณ

ในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาการถ่ายเทความร้อนกรณีอุณหภูมิชั้นวัสดุหนากระจายไม่สม่ำเสมอโดยวิธีการวิเคราะห์เชิงเลข และคิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในวัสดุตามแนวรัศมี



รูปที่ 4 รูปแสดงการประมาณโดยการวิเคราะห์เชิงเลขของชั้นวัสดุหนา



รูปที่ 5 รูปแสดงการประมาณโดย การวิเคราะห์เชิงเลข ของชั้นวัสดุหนาที่เป็นทรงกลม

จากสมการ (9) (10) และ (11) และจากรูปที่ 4 และ 5 สามารถเขียนสมการทั้งสามใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการการวิเคราะห์เชิงเลข ได้ดังนี้

จากสมการ (9) $$T^i_{m+1} - T^i_{m-1} = \frac{1}{B}\left(\theta^i_m - T^i_m\right) \tag{12}$$

โดยที่ $B = \dfrac{\rho_a C_a \varepsilon u}{h_v \Delta x}$ และจากการประมาณ $T^i_m = \dfrac{T^i_{m+1} + T^i_{m-1}}{2}$

สมการการกระจายอุณหภูมิในของไหลคือ

$$T^i_{m+1} = \frac{2}{2B+1}\left(2\theta^i_R + (2B-1)T^i_{m-1}\right) \tag{13}$$

จากสมการ (10) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการการวิเคราะห์เชิงเลขได้เป็น

$$\rho_b C_b \Delta V_n\left(\frac{\theta^{i+1}_n - \theta^i_n}{\Delta\tau}\right) = K_b\left[\frac{\theta^i_{n-1} - \theta^i_n}{R_{n-1}} + \frac{\theta^i_{n+1} - \theta^i_n}{R_{n+1}}\right]$$

โดยที่

$$R_{n-1} = \frac{\Delta r}{4\pi\left(n\Delta r - \dfrac{\Delta r}{2}\right)^2} \qquad R_{n+1} = \frac{\Delta r}{4\pi\left(n\Delta r + \dfrac{\Delta r}{2}\right)^2}$$

$$\Delta V_n = 4\pi(n\Delta r)^2 \Delta r$$

ดังนั้นสมการการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุหนาคือ

$$\theta^{i+1}_n = \frac{K_b \Delta\tau}{\rho_b C_b \Delta V_n}\left[\frac{\theta^i_{n-1} - \theta^i_n}{R_{n-1}} + \frac{\theta^i_{n+1} - \theta^i_n}{R_{n+1}}\right] + \theta^i_n \tag{14}$$

สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุหนาสมการ (11) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\rho_b C_b \Delta V_N\left(\frac{\theta^{i+1}_N - \theta^i_N}{\Delta\tau}\right) = K_b\left[\frac{\theta^i_N - \theta^i_{N-1}}{R_N}\right] + Ah\left[T^i_m - \theta^i_N\right] \tag{15}$$

โดยที่

$$R_N = \frac{\Delta r}{4\pi\left(N\Delta r - \dfrac{\Delta r}{2}\right)^2} \qquad \Delta V_N = 4\pi(N\Delta r)^2 \frac{\Delta r}{2}$$

ดังนั้น สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวของชั้นวัสดุหนาคือ

$$\theta^{i+1}_N = \frac{K_b \Delta\tau}{\rho_b C_b \Delta V_N}\left[\frac{\theta^i_N - \theta^i_{N-1}}{R_N}\right] + \frac{Ah\Delta\tau}{\rho_b C_b \Delta V_N}\left[T^i_m - \theta^i_N\right] + \theta^i_N \tag{16}$$

จากผลการศึกษาสมการที่ใช้ในการหาค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาและของไหลคือ สมการ (13) ใช้ในการหาค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหล สมการ (14) ใช้ใน

การหาค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนาและสมการ (16) ใช้หาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวของชั้นวัสดุหนา

5.การศึกษาการถ่ายเทความร้อนกรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาไม่สม่ำเสมอ โดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

จากการศึกษาที่ในหัวข้อที่ 3 เป็นการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนา โดยการใช้การประมาณเข้ามาช่วยในการแก้สมการ แต่การศึกษาต่อไปนี้จะเป็นการนำสมการ (9) (10) และ (11) มาวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

จากสมการ (9) จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น $$\frac{\partial T}{\partial x} = k1(\theta - T) \quad (17)$$

และจากสมการที่ (10) $$-\frac{\partial T}{\partial r} = k2(\theta - T) \quad (18)$$

โดยที่ $k1 = \dfrac{h}{\rho_a C_a u \varepsilon}$ $\quad k2 = \dfrac{h}{k_b}$

กำหนดให้ $y = k1x$ ให้ $z = k2r$

สมการ (17) และ (18) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \theta - T \quad (19)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial r} = \theta - T \quad (20)$$

กำหนดให้

$$T\text{-}T_0 = (\theta_0\text{-}T_0)(U\text{-}V)^{-y-z} \quad (21)$$

$$\theta\text{-}T_0 = (\theta_0\text{-}T_0)(U+V)^{-y-z} \quad (22)$$

จากสมการ (21) และ (22) จะพบว่า

$$\begin{aligned} U+V &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \\ U-V &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (23)$$

จากสมการ (23) จะพบว่า

$$\frac{\partial V^2}{\partial y \partial z} = V \quad (24)$$

เงื่อนไขขอบเขต ที่ $y = 0$ $(x = 0)$ $\quad T = T_0$ และ $\theta = \theta_0$

จากค่าเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวสามารถหาค่าของ U และ V ได้คือ

$$T_0\text{-}T_0 = (\theta_0\text{-}T_0)(U\text{-}V)^{-y-z}$$

$$\theta_0\text{-}T_0 = (\theta_0\text{-}T_0)(U+V)^{-y-z}$$

$$U = 1/2 \quad \text{และ} \quad V = 1/2$$

กำหนดให้ $\lambda^2 = -4yz$

แทนค่าลงในสมการ (24)

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dV}{d\lambda} + V = 0 \qquad (25)$$

สมการ (25) สามารถแก้สมการให้อยู่ในรูปสมการ เบสเซล (Bessel function) คือ

$$V = cJo(\lambda) \qquad (26)$$

จากค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ $y = 0 \quad V = 1/2$

แทนค่าลงในสมการ (26) จะพบว่า $c = 1/2$

ดังนั้น $$V = 1/2Jo(\lambda) \qquad (27)$$

$$V = 1/2Jo(2i\sqrt{yz}) = 1/2Mo(yz)$$

โดยที่ $Mo(a) = Jo(2i\sqrt{a}) = 1 + a + \frac{a^2}{(2!)^2} + \frac{a^3}{(3!)^3} + \ldots$

นำสมการที่ (23) มาอินทิเกรต

$$U = e^y \int e^{-y}\left(V + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y - e^y f(z) \qquad (28)$$

โดย f(z) คือฟังก์ชั่นของ z

จากการอินทิเกรตโดยส่วน $\int e^{-y}\partial V = e^{-y}V - \int V\partial e^{-y} = e^{-y}V + \int e^{-y}V\partial y$

ดังนั้น

$$U = V + e^y \int\left(e^{-y}V\partial y + e^{-y}V\partial y\right) - e^y f(z)$$

$$= V + 2e^y \int\left(e^{-y}V\partial y\right) - e^y f(z)$$

โดยการประมาณ $$2e^y \int e^{-y}V\partial y = -2\left(V + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \ldots\right)$$

แต่ $V = 1/2Mo(yz)$

ดังนั้น $$2e^y \int e^{-y}V\partial y = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz)$$

โดยที่ฟังก์ชั่น $Mn(a)$ นิยามว่า

$$Mn(a) = \frac{d^n Mo(a)}{da^n}$$

แทนค่าตัวแปรต่างๆที่ได้ลงในสมการ (28)

$$U = \frac{1}{2}Mo(yz) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) - e^{-y} f(z) \tag{29}$$

จากเงื่อนไขค่าขอบเขตที่ $y = 0 \quad U = 1/2$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}Mo(0) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0) - f(z)$$

แต่ $Mo(0) = 1$ ดังนั้น $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0)$

ดังนั้น

$$U = \frac{1}{2}Mo(yz) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) - e^{-y}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0)\right)$$

นำค่า U และ V ที่ได้แทนค่าลงในสมการ (21) และสมการ (22)

จาก $\quad T\text{-}T_0 = (\theta_0\text{-}T_0)(U\text{-}V)^{-y-z}$

$$T = T_0 + \left(\theta_0 - T_0\right)\left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) + e^y\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0)\right)\right)e^{-y-z} \tag{30}$$

จาก $\quad \theta\text{-}T_0 = (\theta_0\text{-}T_0)(U+V)^{-y-z}$

$$\theta = T_0 + \left(\theta_0 - T_0\right)\left(Mo(yz) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(yz) + e^y\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n Mn(0)\right)\right)e^{-y-z} \tag{31}$$

สมการ (30) เป็นสมการที่ใช้หาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในของไหล และสมการ (31) เป็นสมการที่ใช้หาอุณหภูมิที่ผิวของชั้นวัสดุหนาในขั้นตอนต่อไปเราจะหาสมหารการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนา

จากสมการ (10) $\quad (1-\varepsilon)\rho_b C_b \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = K_b(1-\varepsilon)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial\theta}{\partial r}\right)$

กำหนดให้ $k3 = k_b/(C_b\rho_b)$ และ $u = r(T\text{-}\theta)$

สมการ (10) เปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial\tau} = k3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) \tag{32}$$

ดังนั้นเงื่อนไขค่าขอบเขตและเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

ที่ r = R $\quad -K_b\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{k3}{r} - h\right) = 0 \quad (33)$

ที่ r = 0 $\quad u = 0 \quad (34)$

ที่ τ = 0 $\quad u = r(T_0\text{-}\theta_0) = u_o \quad (35)$

เนื่องจากสมการ (34) และ (35) เป็นสมการเชิงเส้น-เอกพันธ์ โดยที่

$$u = G(r)H(\tau) \tag{36}$$

แทนค่าสมการ (36) ลงในสมการ (32)

$$k3G''(r)H(\tau) = G(r)H'(\tau) = -\lambda^2$$

$$\frac{G''(r)}{G(r)} = \frac{H'(\tau)}{k3H(\tau)} = -\lambda^2$$

โดยที่ $-\lambda^2$ คือค่าคงที่ของการแยกตัวแปร

ดังนั้น

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2} + \lambda^2 G(r) = 0$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + k3\lambda^2 H(\tau) = 0$$

คำตอบของค่าไอเกนค่าหนึ่งคือ

$$G(r) = A\sin(\lambda r) + B\cos(\lambda r)$$

G(r) ที่สอดคล้องกับสมการ (34) และ (35) คือ

$$G(r) = A\sin(\lambda r)$$

จากสมการอนุพันธ์ของ $H(\tau)$

$$H(\tau) = ce^{-k3\lambda^2\tau}$$

แทนค่า G(r) และ $H(\tau)$ ในสมการ (36) $\quad u = \left(A\sin(\lambda r)\right)ce^{-k3\lambda^2\tau}$ (37)

แทนค่าสมการ (37) ลงในสมการ (33) เพื่อหาค่า λ

$$\tan(\lambda_n R) = \frac{K_b\lambda_n R}{K_b - hR} \tag{38}$$

จากสมการ (38) ที่ได้สามารถหาค่า λ_n ได้โดยใช้วิธี การวิเคราะห์เชิงเลข จากการที่รู้ค่า λ_n ทำให้สมการ (37)สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin(\lambda_n r)e^{-k3\lambda_n^2\tau} \tag{39}$$

โดยค่า K_n คือค่าคงที่

สมการ (39) จะสอดคล้องกับสมการ (35)

$$r(T_0 - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(\lambda_n r) \tag{40}$$

โดยอาศัยคุณสมบัติ Orthogonality ของ $\sin(\lambda_n r)$

$$k_n = \frac{4(T_0 - \theta_0)\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R\cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R(2\lambda_n R - \sin(2\lambda_n R))} \tag{41}$$

จาก $u = r(T-\theta)$ และจากสมการ (41) เมื่อแทนค่าในสมการ (39) จะได้ค่า θ คือ

$$\theta = T + \left[\frac{4(T_0-\theta_0)\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R\cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R\left(2\lambda_n R - \sin(2\lambda_n R)\right)}\right]\left[\frac{\sin(\lambda_n r)}{(\lambda_n r)}\right]e^{-k3\lambda_n^2 \tau} \tag{42}$$

โดยอุณหภูมิที่ได้จากสมการ (42) เป็นการกระจายอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนาส่วนอุณหภูมิที่ผิวของชั้นวัสดุหนาสามารถหาได้จากสมการ (31) และสมการ (30) เป็นสมการที่ใช้หาการกระจายอุณหภูมิของของไหล

6. การจำลองสถานการณ์

เพื่อเป็นการทดสอบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบใดที่ให้ผลการคำนวณที่แม่นยำมากกว่า สามารถทำได้โดยการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งสามมาเปรียบเทียบกับผลการทดลอง แต่เนื่องจากการทดลองที่มีผู้ทำไว้เป็นการทดลองโดยที่กำหนดให้อุณหภูมิของชั้นวัสดุหนาเท่ากันทั้งก้อน ดังนั้นในการเปรียบเทียบจึงสามารถเปรียบเทียบได้เพียงอุณหภูมิของของไหลและอุณหภูมิที่ผิวของชั้นวัสดุหนาเท่านั้นว่าแบบจำลองใดให้ผลที่ใกล้เคียงกับการทดลองมากกว่า โดยในการคำนวณข้อมูลที่จะต้องใช้ในการคำนวณคือ ความยาวของชั้นวัสดุหนา เวลาที่ใช้ในการทดลอง อัตราส่วนช่องว่าง ความจุความร้อนของของไหล ความหนาแน่นของของไหล อุณหภูมิเริ่มต้นของของไหล ความจุความร้อนของชั้นวัสดุหนา ความหนาแน่นของชั้นวัสดุหนา และอุณหภูมิเริ่มต้นของชั้นวัสดุหนา

จากการทดลองของ Natavut (1981) ได้ทำการทดลองโดยใช้อากาศร้อนไหลผ่านชั้นของก้อนหินปูน (Limestone) ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

เส้นผ่าศูนย์กลางของหินที่ใช้ 0.043 m

ค่าอัตราส่วนช่องว่างของชั้นหิน 0.496

ค่าความจุความร้อนจำเพาะ 0.736 kJ/kg °C

ความหนาแน่นของหิน 2517 kg/m^3

ความยาวของชั้นวัสดุหนา 0.45 m

อัตราการไหลของอากาศ 0.15 m/s

สำหรับคุณสมบัติทางความร้อนของอากาศสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

ค่าความจุความร้อนจำเพาะ 1005-[((T+273.15)-250)/50]^2 kJ/kg °C

ความหนาแน่นของหิน 352.98/(T+273.15) kg/m^3

การเปรียบเทียบผลการคำนวณและผลการทดลองสรุปตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงการกระจายของอุณหภูมิในของแข็งและของไหลที่ โดยอุณหภูมิขาเข้าของของไหล 65.0 °C, อุณหภูมิขาเข้าของของแข็ง 30.7 °C,

r = 0.0432 u = 0.15 m/s

เวลา	ระยะห่างจากขอบ	ผลจากการทดลองโดย Natavut (1981)		การกระจายอุณหภูมิในของแข็งสม่ำเสมอ		การกระจายอุณหภูมิในของแข็งไม่สม่ำเสมอ (โดยการประมาณ)						การกระจายอุณหภูมิในของแข็งไม่สม่ำเสมอ (โดยการคำนวณ)					
		Ta	Tb	Ta	Tb	Ta	Tb (°C) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (m)					Ta	Tb (°C) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (m)				
(hr)	(m)	(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043	(°C)	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043
	0.050	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70
0	0.200	31.00	31.00	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70
	0.350	31.00	31.00	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70
	0.450	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70	30.70
	0.050	60.50	59.00	64.59	63.19	64.46	62.43	62.47	62.55	62.64	62.77	64.93	57.58	60.09	62.61	64.18	64.81
1	0.200	57.10	55.20	62.16	59.11	61.77	57.78	57.86	58.00	58.19	58.44	62.66	52.99	55.59	58.58	63.95	63.39
	0.350	46.90	42.90	58.56	54.43	57.97	52.87	52.98	53.15	53.40	53.71	53.06	43.93	45.89	48.46	50.93	52.89
	0.450	40.00	39.00	55.79	51.32	55.16	49.75	49.86	50.04	50.30	50.64	44.52	38.14	39.39	41.10	42.89	44.45

ตารางที่ 1 (ต่อ) แสดงการกระจายของอุณหภูมิในของแข็งและของไหลที่ โดยอุณหภูมิขาเข้าของของไหล 65.0 °C, อุณหภูมิขาเข้าของของแข็ง 30.7 °C,

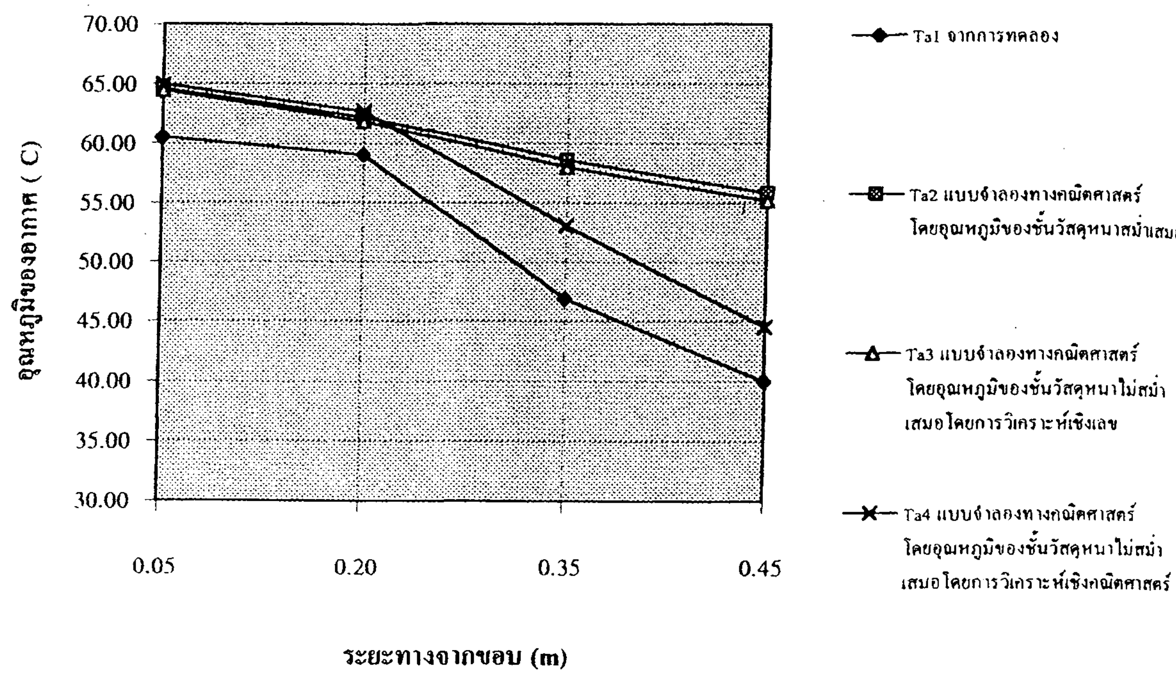
r = 0.0432 u = 0.15 m/s

เวลา	ระยะห่างจากขอบ	ผลจากการทดลองโดย Natavut (1981)		การกระจายอุณหภูมิในของแข็งสม่ำเสมอ		การกระจายอุณหภูมิในของแข็งไม่สม่ำเสมอ (โดยการประมาณ)						การกระจายอุณหภูมิในของแข็งไม่สม่ำเสมอ (โดยการคำนวณ)					
		Ta	Tb	Ta	Tb	Ta	Tb (°C) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (m)					Ta	Tb (°C) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (m)				
(hr)	(m)	(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043	(°C)	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043
	0.050	62.70	62.50	64.97	64.90	64.96	64.82	64.83	64.83	64.84	64.85	65.00	63.38	64.29	64.83	64.98	65.00
2	0.200	62.70	62.20	64.71	64.57	64.60	63.97	63.98	64.00	64.03	64.07	64.94	62.28	63.54	64.46	64.84	64.94
	0.350	59.40	57.50	64.02	63.11	63.73	62.41	62.43	62.48	62.54	62.63	64.12	59.07	60.90	62.60	63.62	64.11
	0.450	56.00	55.00	63.26	61.94	62.83	61.01	61.04	61.10	61.19	61.30	62.00	55.29	57.36	59.52	61.07	61.99
	0.050	64.70	64.50	64.99	64.99	64.99	64.99	64.99	64.99	64.99	64.99	65.00	64.65	64.90	64.99	65.00	65.00
3	0.200	64.20	64.00	64.97	64.93	64.95	64.87	64.88	64.88	64.88	64.89	65.00	64.40	64.79	64.96	65.00	65.00
	0.350	62.00	61.50	64.88	64.74	64.81	64.56	64.57	64.58	64.59	64.60	64.97	63.65	64.36	64.79	64.93	64.97
	0.450	61.00	60.70	64.74	64.49	64.61	64.20	64.21	64.22	64.24	64.27	64.81	62.60	63.62	64.36	64.96	64.82

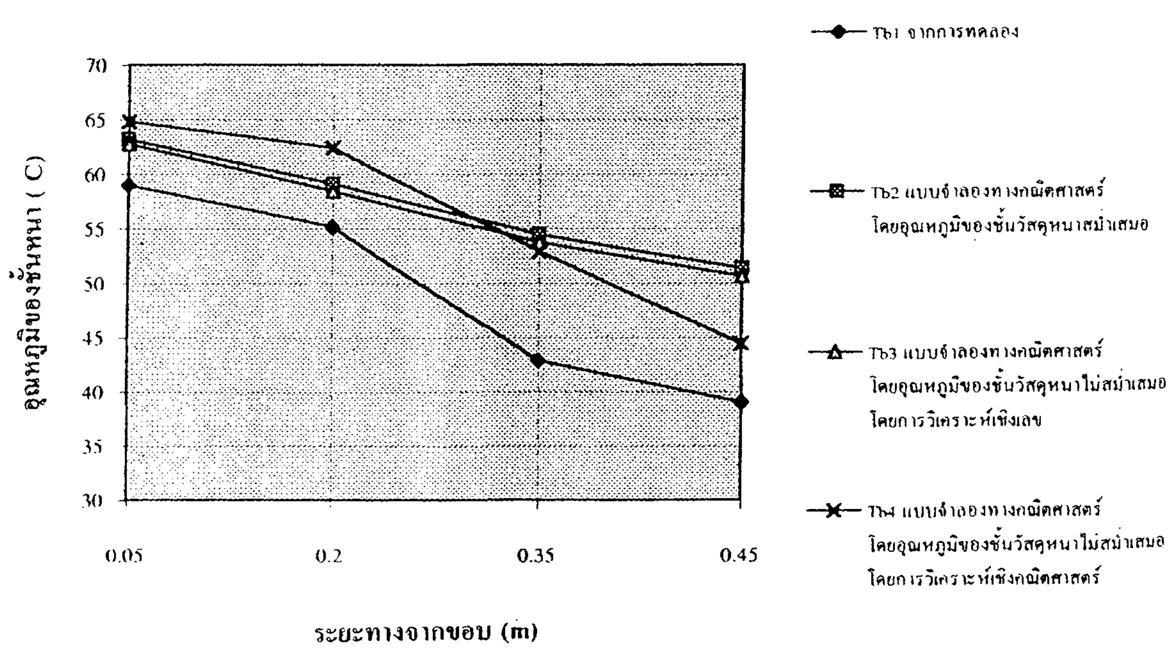
ตารางที่ 1 (ต่อ) แสดงการกระจายของอุณหภูมิในของแข็งและของไหลที่ โดยอุณหภูมิขาเข้าของของไหล 65.0 °C, อุณหภูมิขาเข้าของของแข็ง 30.7 °C,

r = 0.0432 u = 0.15 m/s

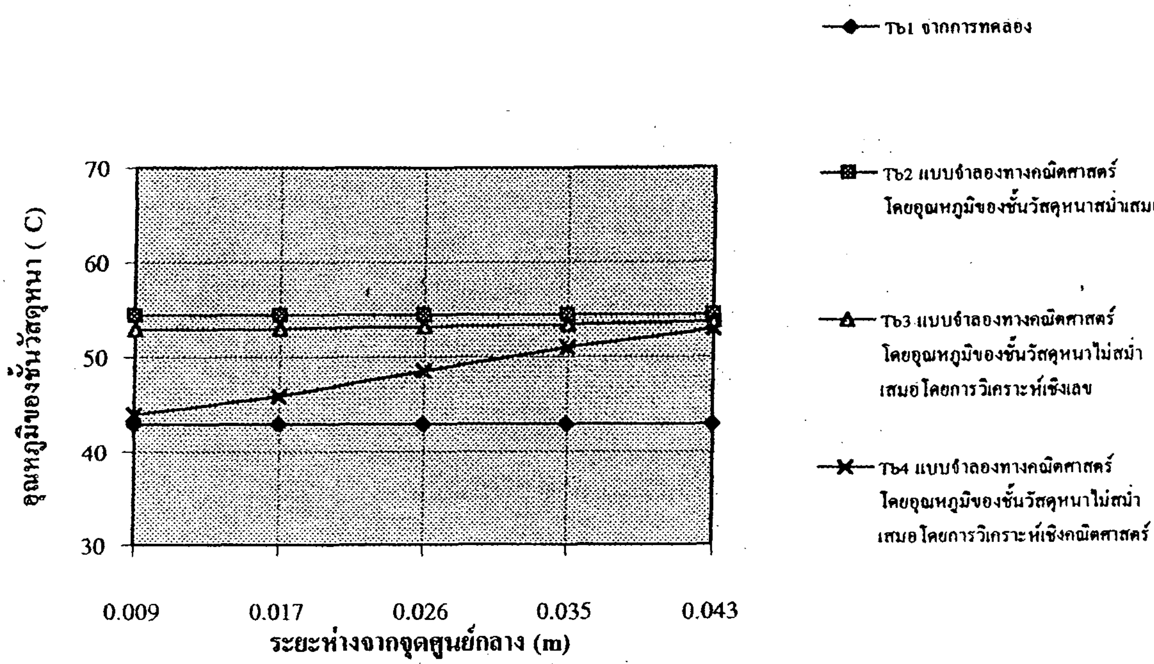
เวลา	ระยะห่างจากขอบ	ผลจากการทดลองโดย Natavut (1981)		การกระจายอุณหภูมิในของแข็งสม่ำเสมอ		การกระจายอุณหภูมิในของแข็งไม่สม่ำเสมอ (โดยการประมาณ)						การกระจายอุณหภูมิในของแข็งไม่สม่ำเสมอ (โดยการคำนวณ)					
		Ta	Tb	Ta	Tb	Ta	Tb (°C) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (m)					Ta	Tb (°C) ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (m)				
(hr)	(m)	(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043	(°C)	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043
4	0.050	64.70	64.50	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	64.92	64.98	65.00	65.00	65.00
	0.200	64.50	64.20	65.00	64.99	65.00	64.99	64.99	64.99	64.99	64.99	65.00	64.87	64.97	65.00	65.00	65.00
	0.350	63.20	62.50	64.99	64.97	64.97	64.94	64.94	64.94	64.94	64.94	65.00	64.70	64.91	64.98	65.00	65.00
	0.450	62.70	62.50	64.96	64.93	64.94	64.86	64.87	64.87	64.87	64.88	64.99	64.47	64.79	64.95	64.99	64.99
5	0.050	64.70	64.70	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	64.98	65.00	65.00	65.00	65.00
	0.200	64.70	64.20	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	64.97	65.00	65.00	65.00	65.00
	0.350	64.20	64.00	65.00	64.99	65.00	64.99	64.99	64.99	64.99	64.99	65.00	64.94	64.99	65.00	65.00	65.00
	0.450	63.70	63.70	64.99	64.99	64.99	64.98	64.98	64.98	64.98	64.98	65.00	64.88	64.97	65.00	65.00	65.00



รูปที่ 6 การกระจายอุณหภูมิของอากาศ ที่เวลา 1 ชั่วโมง



รูปที่ 7 การกระจายอุณหภูมิของชั้นวัสดุหนา ที่เวลา 1 ชั่วโมง



รูปที่ 8 การกระจายอุณหภูมิภายในชั้นวัสดุหนา ที่เวลา 1 ชั่วโมง

7 สรุปและวิจารณ์

จากรูปที่ 6 ซึ่งเป็นผลการเปรียบเทียบอุณหภูมิของอากาศที่เวลา 1 ชั่วโมง จะพบว่าค่าอุณหภูมิของอากาศที่คำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ มีค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองมากกว่าผลการคำนวณแบบอื่น โดยเฉพาะเมื่อระยะทางห่างจากขอบมากขึ้นและเวลามากขึ้นผลการคำนวณที่ได้ก็ยิ่งใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการทดลอง จากรูปที่ 7 เป็นผลการเปรียบเทียบอุณหภูมิที่ผิวของชั้นวัสดุหนา ที่เวลา 1 ชั่วโมง จะพบว่าที่ระยะห่างจากขอบ 0.05 m และ 0.2 m ค่าที่ได้จากการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กรณีการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ จะมีความแตกต่างจากค่าที่ได้จากการทดลองมากกว่าผลการคำนวณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบอื่น แต่ที่ระยะห่างจากขอบ 0.35 m และ 0.45 m ค่าที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการกระจายอุณหภูมิในชั้นวัสดุหนาไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ จะมีค่าใกล้เคียงกับการทดลองมากกว่า

ความแตกต่างของอุณหภูมิที่ได้จากการทดลองและที่ได้จากการคำนวณอาจมีผลมาจากความแตกต่างของขนาดวัสดุที่ใช้ เนื่องจากในการทดลองของ Nutavut วัสดุหนาที่ใช้มีลักษณะไม่เป็นทรงกลมและมีขนาดไม่เท่ากันโดยมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางตั้งแต่ 0.0381-0.05 m โดยค่าเฉลี่ยของเส้นผ่าศูนย์กลางของชั้นวัสดุหนาคือ 0.043 m แต่ในการคำนวณเราถือว่าวัสดุเป็นทรงกลมและมีขนาดเท่ากันทั้งหมดคือ 0.043 m

8.รายการสัญญลักษณ์

T = อุณหภูมิของของไหล (°C)

θ = อุณหภูมิของของชั้นวัสดุ (°C)

ρ = ความหนาแน่น (kg/m^3)

C = ความจุความร้อนจำเพาะ (J/kg°C)

ε = อัตราส่วนช่องว่าง (decimal)

K = สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (W/m°C)

A = พื้นที่หน้าตัด (m^2)

h_v = สัมประสิทธิ์การพาความร้อนเชิงปริมาตร (W/m^3°C)

u = อัตราการไหล (m/s)

r = รัศมีของวัสดุ (m)

R_n = ค่าความต้านทานในการถ่ายเทความร้อน (m)

Δv_n = ปริมาตร (m^3)

τ = เวลา (s)

x = ระยะทาง (m)

สัญญลักษณ์กำกับล่าง

a = ของไหล

b = วัสดุหนา

9. เอกสารอ้างอิง

1 Lof, G.O.G and Hawlely R.W.,Unsteady-State Heat Transfer Between Air and Looses Solids ,Industrial and Engineering Chemisty Vol .40 No.6, June 1948

2 Schumann, T.E.W ,Heat Transfer : a Liquid Flowing Through a Porous Prism ,Heat Trasfer Vol. 208 Sept 1929

3. Maclaine-Cross, I.L., Effect of International Fluid Heat Capacity on Regenerator Performance, Journal of Heat Transfer ,Vol. 102 August,1980

4. Trinestsampan Natavut, Thermal Rocked-bed Storage Performance, AIT Research ,Asian Institute of Technology,Thailand