ลักษณะของเชือกที่หมุนรอบจุด

On Horizontally Rotating String

*วราคม เนิดน้อย
*เลอเกียรติ วงศ์สารพิกุล

บทคัดย่อ บทความฉบับนี้พิจารณาการหมุนของเส้นเชือกด้วยความเร็วคงที่ในแนวนอนรอบจุดๆ หนึ่ง สมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่มีลักษณะพิเศษคือ ที่ตั้งของจุดปลายเป็นค่าที่ไม่รู้ ถึงแม้ว่าสภาพที่จุดปลายจะสามารถกำหนดได้ จากลักษณะของปัญหา ในบทความได้แสดงถึงรูปร่างของเชือกที่ความเร็วการหมุนและมวลสารต่างๆ กัน และพิจารณากรณีพิเศษที่ไม่มีมวลที่ปลายเชือกด้วย

Abstract This paper concerns a string rotating horizontally about a point at constant angular velocity. The system of differential equations of motion have a special characteristics in that the position of the end point is not known although the end conditions are known. The paper considers the shape of the rotating string at different velocities and masses attached at the end. A special case where no mass is attached is also considered.

* ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง

1. *บทนำ*

เชือกเป็นวัสดุที่มีการใช้และศึกษามาเป็นเวลานาน ในที่นี้เราจะถือว่าเชือกเป็นวัตถุหนึ่งมิติที่ไม่สามารถรับโมเมนต์ได้ นั่นคือแรงภายในเส้นเชือกจะมีแต่แรงดึงเท่านั้นและไม่มีแรงเฉือน ในบทความฉบับนี้เราจะพิจารณาเฉพาะเชือกที่ไม่สามารถจะเปลี่ยนความยาวได้ (Inextensional String) เท่านั้น

ปัญหาทางกลศาสตร์ของเชือกที่มีน้ำหนักและอยู่นิ่ง ซึ่งแขวนอยู่ระหว่างจุดสองจุด ได้รับการพิจารณาในหนังสือกลศาสตร์แทบทุกเล่ม เช่น [1] เป็นต้น แต่ปัญหาของเชือกที่มีน้ำหนักที่ปลายและหมุนรอบจุดๆ หนึ่ง มีเฉพาะกรณีที่เชือกไม่มีมวล หรือกรณีที่ก้อนน้ำหนักและเชือกอยู่บนพื้นราบเท่านั้น ในบทความนี้เราจะพิจารณาการหมุนของเชือกที่มีน้ำหนัก และมีมวลสารแขวนที่ปลายที่กำลังหมุนรองจุดๆ หนึ่งด้วยความเร็วคงที่

2. *สมการการเคลื่อนที่*

ให้เชือกมีความยาว l และให้ ρ เป็นมวลสารต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเชือก เชือกเส้นนี้ยึดติดที่จุดๆ หนึ่งซึ่งเราจะถือว่าเป็นจุดศูนย์กลางของ Coordinate ที่ปลายอีกข้างหนึ่งของเชือกมีก้อนวัตถุมวลสาร M แขวนอยู่ ให้เชือกหมุนรอบจุดศูนย์กลางในแนวนอนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่เท่ากับ ω เราจะพิจารณาสภาพของเชือกในสภาวะ Steady State เท่านั้น นั่นคือปริมาณต่างๆ ไม่ขึ้นกับเวลา

เนื่องจากในสภาพ Steady state นี้ ความเร่งของจุดต่างๆ บนเส้นเชือกรวมทั้งความเร่งของมวลสารที่ปลายเชือกมีทิศเข้าสู่แกนดิ่งทั้งสิ้น และเนื่องจากแรงอื่นๆ นอกเหนือไปจากแรงดึงในเส้นเชือก มีแค่แรงดึงดูดของโลกในแนวดิ่งเท่านั้น เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่าในสภาวะ Steady state นี้ ที่ขณะใดขณะหนึ่งตัวเชือกจะอยู่ในระนาบของรัศมีและแนวดิ่งเท่านั้น

เพื่อความสะดวก เรากำหนดให้แกน y เป็นแกนตามแนวดิ่ง และแกน x เป็นแกนตามแนวรัศมี (ดูรูปที่ 1) ให้ s เป็นความยาวตามแนวเส้นเชือก ถ้าเราพิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ ds บนเส้นเชือก และเขียนสมการการเคลื่อนที่โดยกฎของนิวตันข้อที่สองดังในรูปที่ 2 จะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้[1]

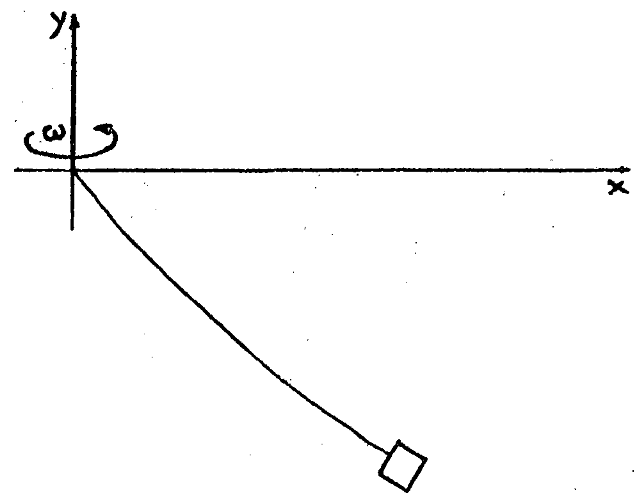
$$\frac{d}{ds}(T \sin\theta) = \rho g$$
$$\frac{d}{ds}(T \cos\theta) = -\rho\omega^2 x \qquad (2.1)$$

เมื่อ T คือแรงดึงในเส้นเชือก, g คือความเร่งจากแรงดึงดูดของโลก, θ คือมุมที่เส้นเชือกทำกับแกน x ที่จุดใดจุดหนึ่ง ให้สังเกตว่าค่า x เป็นค่าที่เป็นบวกเสมอ

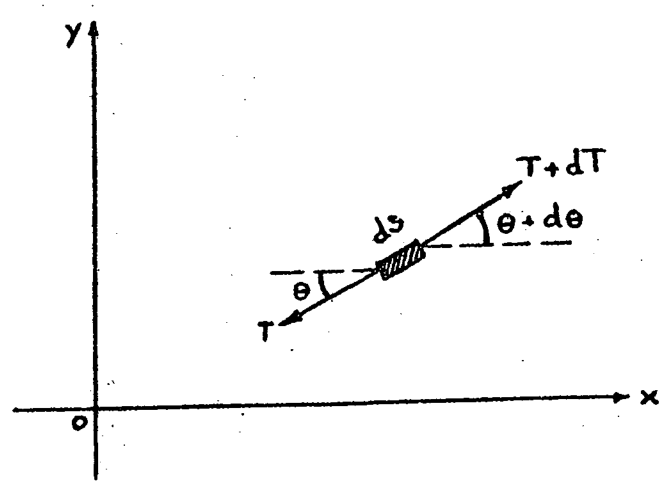
เนื่องจากเส้นเชือกมีก้อนวัตถุมวลสาร M แขวนที่ปลาย Boundary conditions สำหรับสมการอนุพันธ์ (2.1) คือ

---

1. สมการ (2.1) ทั้งสองสามารถเขียนได้เป็นกรณีพิเศษของสมการการเคลื่อนที่ของ Rods (ดู [2]) แต่ในบทความนี้เราไม่ได้ทำเช่นนั้น



รูปที่ 1 เชือกที่หมุนรอบจุดๆ หนึ่งในแนวนอนที่ความเร็วคงที่ แสดงที่ขณะใดขณะหนึ่ง



รูปที่ 2 ชิ้นส่วนเล็กๆ ของเส้นเชือกที่จุดใดจุดหนึ่ง แสดงแรงที่กระทำ

$$T \cos\theta = M x \omega^2 \quad (s=1)$$
$$T \sin\theta = -Mg \quad (s=1) \qquad (2.2)$$
$$y = 0 \quad (x=0)$$

สมการ (2.1) พร้อมกับ Boundary conditions (2.2) เป็นสมการเพื่อใช้ในการหาค่าแรงดึงในเส้นเชือกที่จุดต่าง ๆ และรูปร่างของเส้นเชือกที่ขณะใด ๆ โดยการหาค่ามุม θ แต่ทว่าโดยทั่วไป เราจะไม่สามารถแก้สมการชุดนี้ได้โดยตรง เนื่องจากค่า x ของจุดต่าง ๆ บนเส้นเชือกในสมการ (2.1) และค่า x ที่ s=1 ในสมการแรกของ (2.2) เป็นค่าที่รู้ได้ก็เมื่อเราได้แก้ปัญหาแล้วเท่านั้น นั่นก็คือถ้าให้ S เป็นตัวแปรอิสระ เราจะมีสมการอนุพันธ์ที่ไม่รู้ค่า Boundary condition ที่ S=1 (ซึ่งขึ้นอยู่กับ x) หรือถ้าให้ x เป็นตัวแปรอิสระ เราจะมีสมการอนุพันธ์ที่ไม่รู้จุดปลาย ดังนั้นการแก้สมการชุดนี้ นอกจากในกรณีพิเศษจะทำได้โดยใช้การทดลองหาแบบเชิงเลขจนกว่าจะได้ค่าตอบที่ถูกต้องเท่านั้น

ปัญหากรณีหนึ่งที่เราสามารถจะพิจารณาได้ทันทีคือ กรณีพิเศษที่เส้นเชือกไม่มีมวล นั่นคือ

$$\rho = 0 \qquad (2.3)$$

จากสมการ (2.1) เราได้

$$T = \text{ค่าคงที่} \quad \text{และ} \quad \theta = \text{ค่าคงที่} \qquad (2.4)$$

นั่นคือแรงดึงในเส้นเชือกมีค่าเท่ากันที่ทุกจุด และเชือกมีลักษณะเป็นเส้นตรง ดังนั้นระยะห่างจากแกน y ของจุดๆ ใด บนเส้นเชือกมีค่า

$$x = l \cos\theta \qquad (2.5)$$

และจาก Boundary conditions (2.2) เราพบว่า

$$T = Ml\omega^2$$
$$\sin\theta = -g/l\,\omega^2 \qquad (2.6)$$

จะเห็นได้ว่าในกรณีที่เชือกไม่มีมวลนี้ รูปร่างของเชือกที่ขณะใดขณะหนึ่งไม่ขึ้นกับค่ามวลสารที่ปลายเชือกเลย นั่นก็คือที่ความเร็วของการหมุนค่าหนึ่ง เส้นเชือกจะทำมุมคงที่กับแกน x ไม่ว่ามวลสารที่ปลายจะมีขนาดเท่าไหร่ก็ตาม แต่มวลสารที่ปลายนี้จะมีผลต่อแรงดึงในเส้นเชือก

ในกรณีที่มวลสารของเชือกไม่เท่ากับศูนย์ ทุกจุดบนเส้นเชือกจะมีแรงดึงดูดของโลก และแรงเข้าสู่ศูนย์กลางกระทำ ดังนั้นเราคาดว่าที่ตั้งของเส้นเชือกควรจะอยู่ใต้กรณีเชือกไม่มีมวล หรือใกล้แกน y กว่า และจากการคำนวณที่จะกล่าวถึงต่อไป การคาดคะเนนี้ถูกต้อง

3. *เชือกหมุนโดยทั่วไป*

เราสามารถเปลี่ยนแปลงสมการ (2.1) ให้อยู่ในรูปแบบที่สะดวกแก่การคิดคำนวณยิ่งขึ้นโดยให้คำจำกัดความ

$$F = T\cos\theta$$
$$G = T\sin\theta \qquad (3.1)$$

จะเห็นได้โดยง่ายว่า

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{G}{F} \qquad (3.2)$$

จากวิชาแคลคูลัส เรามีความสัมพันธ์ระหว่าง ds และ dx คือ

$$\frac{ds}{dx} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.3)$$

เมื่อใช้ (3.1) และ (3.3) ใน (2.1) จะได้สมการอนุพันธ์ชุดใหม่คือ

$$\frac{dG}{dx} = \rho g\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dF}{dx} = -\rho\omega^2 x\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.4)$$

และ Boundary conditions (2.2) กลายเป็น

$$y = 0 \quad (x=0)$$
$$F = M\omega^2 x \quad (s=1)$$
$$G = -Mg \quad (s=1) \qquad (3.5)$$
$$\frac{dy}{dx} = -g/\omega^2 x \quad (s=1)$$

หลังจากที่เราหาค่า G และ F ได้แล้ว แรงตึงในเส้นเชือก T สามารถหาได้จากสมการ

$$T = (G^2 + F^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

สมการ (3.4), (3.2) และ (3.3) เป็นชุดของสมการอนุพันธ์ชนิด Nonlinear เพื่อใช้ในการคำนวณหาลักษณะต่างๆ ของเส้นเชือกได้โดยมี Boundary conditions กำหนดโดย (3.5) เป็นที่น่าสังเกตว่ามวลสาร M ที่ปลายของเชือกมีผลต่อ Boundary conditions เท่านั้น และไม่ได้เกี่ยวข้องกับรูปแบบของสมการอนุพันธ์เลย

โดยความเป็นจริงแล้วสมการชุดนี้สามารถใช้ในการหารูปร่างของเชือกที่หมุนรอบจุดได้ เฉพาะในกรณีมวลสาร M ที่ปลายเชือกไม่เท่ากับศูนย์เท่านั้น เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะถ้ามวลสารที่ปลายเชือกเท่ากับศูนย์ แรงตึงที่ปลายเชือกจะต้องเท่ากับศูนย์ ทำให้ G และ F มีค่าเป็นศูนย์ และทำให้เราไม่สามารถหาค่าความชันของเชือก dy/dx (= G/F) ที่ปลายได้ ดังนั้นถ้าเราพิจารณากรณีที่เชือกหมุนโดยไม่มีมวลแขวนที่ปลาย เราจะไม่สามารถแก้สมการอนุพันธ์ได้ เพราะไม่สามารถหา Boundary condition ได้เพียงพอ หรือถ้าหาได้ก็จะต้องทดลองทำซ้ำซากซึ่งคงจะยุ่งยากมาก อย่างไรก็ตามเราจะยังใช้ Boundary conditions (3.5) สำหรับกรณีที่เชือกหมุนโดยไม่มีมวลสารที่ปลายด้วย เนื่องจากสมการ (3.5) สามารถใช้ได้ไม่ว่า M จะมีค่าน้อยเท่าใดก็ตาม ตราบใดที่ M ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่าเมื่อ M → 0 สมการ (3.5) ยังคงรูปแบบเช่นเดิม อีกประการหนึ่งเราควรจะถือได้ว่ารูปร่างของเชือกที่แกว่งจะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง ขณะที่มวลสาร M ลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์ จึงมีเหตุผลที่จะใช้สมการชุดเดิมพร้อมทั้ง Boundary conditions (3.5) ในกรณีที่ M = 0

เนื่องจากเราไม่สามารถจะคำนวณผลของสมการอนุพันธ์ (3.2) - (3.4) โดยตรงได้ จึงจำเป็นจะต้องใช้การคำนวณโดยวิธี Numerical method เพื่อความสะดวกในการคำนวณเราเปลี่ยนค่าต่างๆ ให้อยู่ในรูป Nondimensional form ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&\hat{x} = x/l, \quad \hat{y} = y/l, \quad \hat{s} = s/l \\
&\hat{\rho} = \rho l/m, \quad \hat{M} = M/m \\
&\hat{F} = F/mg, \quad \hat{G} = G/mg, \quad \hat{T} = T/mg \\
&\hat{\omega}^2 = \omega^2 l/g
\end{aligned} \tag{3.7}$$

เมื่อ m คือมวลสารรวมของเส้นเชือกซึ่งสามารถหาได้จาก

$$m = \int_0^l \rho \, ds \tag{3.8}$$

ในกรณีพิเศษที่ ρ มีค่าคงที่ตลอดเส้นเชือก จาก (3.8) จะได้

$$m = \rho \ell \quad , \quad \hat{\rho} = 1 \tag{3.9}$$

จากการใช้ (3.7) เราพบว่าสมการอนุพันธ์สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} d\hat{G}/d\hat{x} &= \hat{\rho}\,(1 + (d\hat{y}/d\hat{x})^2)^{\frac{1}{2}} \\ d\hat{F}/d\hat{x} &= -\,\hat{\rho}\hat{\omega}^2\,\hat{x}\,(1 + (d\hat{y}/d\hat{x})^2)^{\frac{1}{2}} \\ d\hat{y}/d\hat{x} &= \hat{G}/\hat{F} \\ d\hat{s}/d\hat{x} &= (1 + (d\hat{y}/d\hat{x})^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

โดยมี Boundary conditions คือ

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 0 && (\hat{x} = 0) \\ \hat{F} &= \hat{M}\,\hat{\omega}^2\hat{x} && (\hat{s} = 1) \\ \hat{G} &= -\hat{M} && (\hat{s} = 1) \\ d\hat{y}/d\hat{x} &= -1/\hat{\omega}^2\,\hat{x} && (\hat{s} = 1) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ในบทความฉบับนี้เราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่มวลสารเชือกต่อหนึ่งหน่วยความยาวมีค่าคงที่ตลอดเส้นเชือก ดังนั้นสมการ (3.9) เป็นจริง และค่า $\hat{\rho}$ ใน (3.10) มีค่าเป็นหนึ่ง

ก่อนที่จะเสนอผลการคำนวณ เราสามารถหาข้อสรุปบางประการได้จาก (3.10) และ (3.11) ประการแรกสำหรับเชือกที่หมุนในแนวนอนด้วยความเร็ว ω รูปร่างของเชือกเมื่อเทียบกับความยาวเชือก (คือฟังก์ชั่น y) และค่าอื่นๆ ไม่ได้แปรผันเชิงเส้นกับ ω แต่ถูกกำหนดโดย $\hat{\omega}^2$ ซึ่งสามารถให้ความหมายได้เป็นความเร่งของจุดปลายของเชือกเหยียดตึงหมุนในแนวระนาบ เทียบกับความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก

ประการที่สองถ้ามวลสารเชือกต่อหนึ่งหน่วยความยาวมีค่าคงที่ และถ้าไม่มีมวลสารแขวนที่ปลายเชือก (M=0) รูปร่างของเชือกเมื่อเทียบกับความยาวเชือกจะไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่ามวลสารเชือกจะมากหรือน้อยก็ตาม

4. *ผลการคำนวณ*

ในการคำนวณหาผลของ (3.10) และ (3.11) เราใช้วิธี Runge-Kutta method และได้พบว่าการอินทิเกรตสมการ (3.10) ทำได้สะดวกกว่าถ้าเริ่มต้นจากจุดปลายเชือกแล้วอินทิเกรตเข้าหาจุดศูนย์กลาง เนื่องจากค่า $\hat{x}$ ที่จุดปลายเป็นค่าที่ไม่รู้ จึงจำเป็นต้องสมมุติค่า $\hat{x}$ ที่ปลายขึ้น แล้วทำการอินทิเกรตย้อนหลังจนกระทั่งความยาวของเส้นเชือกคือ s เท่ากับ 1 แล้วตรวจดูค่า $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่าเท่ากับศูนย์หรือไม่ ถ้าไม่เท่าก็ทำการปรับค่า $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ที่ปลาย แล้วอินทิเกรตใหม่จนปลายอีกข้างอยู่ที่จุดศูนย์กลาง ก็จะได้ผลตามต้องการ

ในรูปที่ 3 เราแสดงรูปร่างที่ขณะใดขณะหนึ่งของเชือกที่หมุนด้วยความเร็ว 60 รอบต่อนาที สำหรับขนาดของมวลสารที่ปลายต่างๆ กัน จะเห็นได้ว่ารูปร่างของเชือกจะอยู่ระหว่างรูปร่างสองแบบอันได้แก่ รูปร่างของเชือกถ้ามวลสารของเชือกเป็นศูนย์ซึ่งเป็นเส้นบนสุดในรูปที่ 3 ที่สามารถหาได้จากสมการ (2.6) และรูปร่างของเชือกเมื่อมวลสารที่ปลายเส้นเชือกเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นเส้นล่างสุดในรูปที่ 3 ลักษณะทำนองนี้เป็นจริงสำหรับความเร็วของการหมุนค่าอื่นๆ ด้วย เมื่อมวลสารที่ปลายเชือกมากขึ้นเมื่อเทียบกับมวลสารของเชือก รูปร่างของเชือกก็จะเข้าใกล้กรณีที่มวลสารของเชือกเป็นศูนย์ ในทางกลับกันเมื่อมวลสารที่ปลายเชือกน้อยลงเมื่อเทียบกับมวลสารของเชือก รูปร่างของเชือกก็จะเข้าใกล้กรณีที่มวลสารที่ปลายเป็นศูนย์

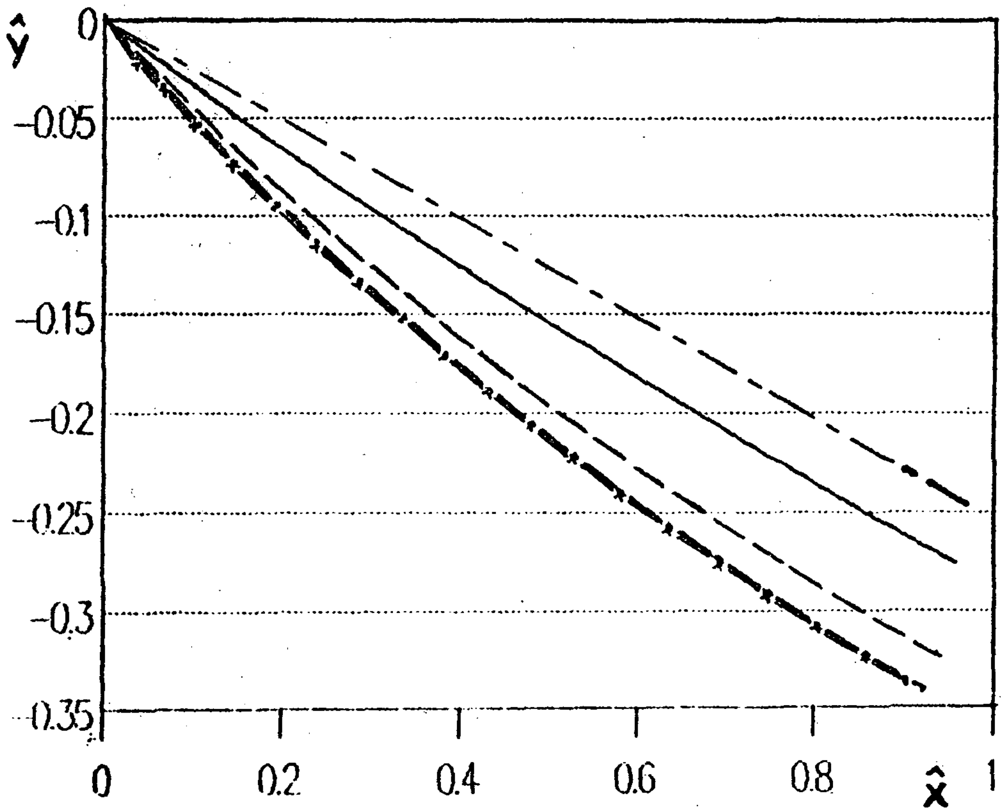
ในรูปที่ 4 เราแสดงแรงตึง $\hat{T}$ ในเส้นเชือกที่กำลังหมุนด้วยความเร็ว 60 รอบต่อนาทีสำหรับมวลสารที่ปลายเชือกขนาดต่างๆ กัน แรงตึงที่แสดงในรูปที่ 4 นี้เป็นแรงตึงที่ไม่มีหน่วย นั่นคือเป็นแรงเมื่อเทียบกับน้ำหนักของเส้นเชือก ดังนั้นในรูปนี้เราไม่สามารถแสดงแรงตึงในกรณีที่มวลสารของเส้นเชือกเป็นศูนย์ได้

เพื่อแสดงผลของความเร็วของการหมุนในรูปที่ 5 เราได้แสดงรูปร่างของเชือกที่หมุนรอบจุดและมีมวลสารที่ปลายขนาดเท่ากับมวลสารรวมของเชือก (นั่นคือ $\hat{M}=1$) ที่ความเร็วการหมุนต่างๆ กัน เราสามารถเห็นลักษณะความสัมพันธ์ที่ไม่ใช่เชิงเส้นได้อย่างชัดเจน เชือกจะอยู่ในระดับที่สูงขึ้นเรื่อยๆ พร้อมกับความเร็วของการหมุนที่สูงขึ้น และลักษณะของรูปร่างก็ใกล้ความเป็นเส้นตรงมากขึ้น ลักษณะรูปร่างที่เป็นเส้นตรงในแนวราบจะเกิดขึ้นในกรณีที่ $\omega \to \infty$ เท่านั้น

ในรูปที่ 6 เราได้แสดงแรงตึงในเส้นเชือกที่หมุนด้วยความเร็วต่างๆ กัน ในกรณีนี้ก็เช่นเดียวกัน คือความสัมพันธ์ในลักษณะที่ไม่ใช่เชิงเส้นจะเห็นได้อย่างชัดเจน

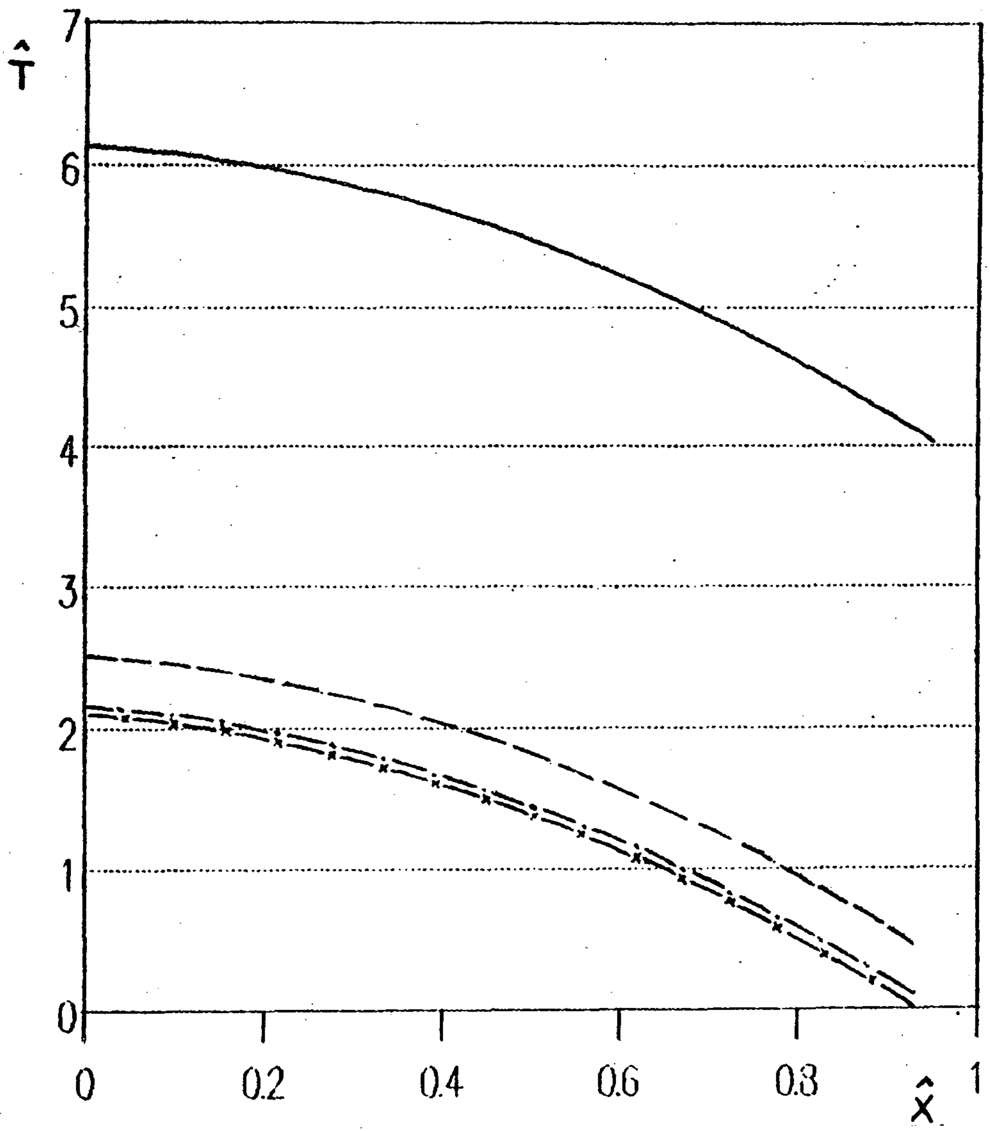
5. *บทสรุป*

เราได้พิจารณารูปร่างและแรงตึงในเส้นเชือกที่หมุนรอบตัวเองในแนวราบ และได้แสดงถึงวิธีการพิจารณากรณีพิเศษที่ไม่มีมวลสารที่ปลายเชือก จะเห็นได้ว่ารูปร่างของเชือกขึ้นอยู่กับมวลของเชือกและมวลที่แขวนที่ปลายเชือก แต่จะอยู่ระหว่างรูปร่างที่เกิดขึ้นขณะที่เชือกไม่มีมวลและรูปร่างที่ไม่มีมวลแขวนที่ปลาย แรงตึงในเส้นเชือกที่จุดต่างๆ ในกรณีต่างๆ ก็สามารถคำนวณได้เช่นกัน



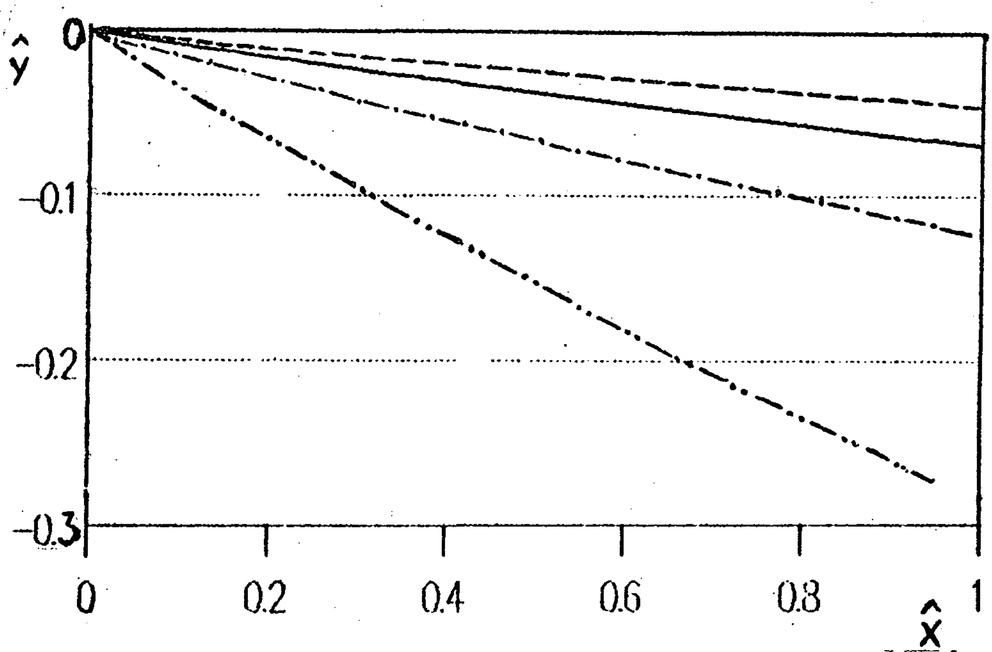
รูปที่ 3 รูปร่างที่ขณะใดขณะหนึ่งของเชือกที่หมุนด้วยความเร็ว 60 รอบต่อนาที โดยมีมวลสาร M ขนาดต่างๆ กันแขวนที่ปลายดังต่อไปนี้:

—— – M = 0 , —— M = 1 , – – M = 0.1 ,
—·— M = 0.01 , และ —x— M = 0



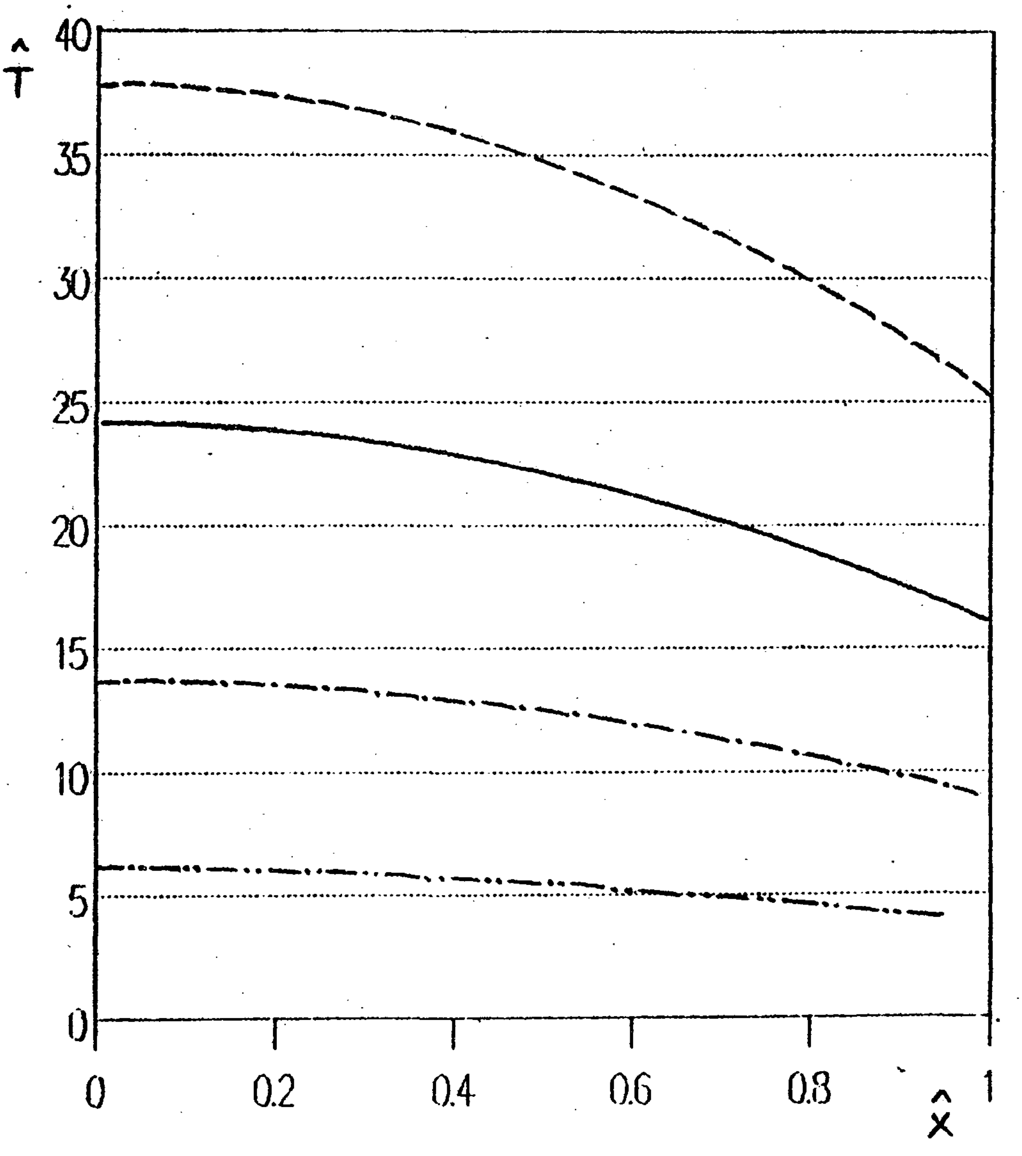
รูปที่ 4 แรงตึงในเส้นเชือก T ที่หมุนด้วยความเร็ว 60 รอบต่อนาที โดยมีมวลสาร M ขนาดต่างๆ กัน แขวนที่ปลายดังต่อไปนี้

—— M = 1 , — — M = 0.1 ,
— · — M = 0.01 , และ — x — M = 0



รูปที่ 5 รูปร่างที่ขณะใดขณะหนึ่งของเชือกที่มีมวล $M = 1$ แขวนที่ปลาย และหมุนด้วยความเร็วรอบต่างๆ กัน ดังต่อไปนี้

– – – 150 รอบ/นาที , ——— 120 รอบ/นาที ,
—·— 90 รอบ/นาที , และ —··— 60 รอบ/นาที



รูปที่ 6 แรงดึงในเส้นเชือก T ที่มีมวล M = 1 แขวนที่ปลาย และหมุนด้วยความเร็วรอบต่างๆ กัน ดังต่อไปนี้

— — — 150 รอบ/นาที , ——— 120 รอบ/นาที ,
—·— 90 รอบ/นาที , และ —··— 60 รอบ/นาที

อ้างอิง

1. Beer, F.P. & Johnston, E.R., Jr., 1988 Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics, 5th ed., McGraw-Hill, Singapore.

2. Green, A.E., Naghdi, P.M. & Wenner, M.L. 1974 On the theory of rods I & II. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 337, pp. 451-507.