แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่บนแผ่นวัสดุพรุน

Mathematical Model of Unsteady Couette Flow on the Porous Plate

ฆนัท วิญญูวิสิทธิ์รักษ์ และ บัณฑิต กฤตาคม*

ห้องปฏิบัติการวิจัยการพัฒาในเทคโนโลยีของวัสดุพรุน
(Development in Technology of Porous Materials Research Laboratory: DiTo-Lab)
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
744 ถนนสุรนารายณ์ ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา 30000
*ติดต่อ: E-mail: paiwinyuvisitruk01@gmail.com และ bundit.kr@rmuti.ac.th, โทรศัพท์ 044-233-073, โทรสาร 044-233-074

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่บนแผ่นวัสดุพรุน เพื่อศึกษาอิทธิพลของตัวแปรไร้หน่วยได้แก่ ความดัน (A) ความหนืดที่เปลี่ยนแปลง (β) เวลา (τ) และค่าความพรุน (ε) ที่ส่งผลต่อความเร็ว (w) การกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล (θ) รวมทั้งการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะแก๊ส และของแข็ง (θ_G และ θ_S) การคำนวณจะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนต์ (Finite difference method) โดยพิจารณาให้คุณสมบัติของของไหลเป็นแบบนอนนิวโตเนียน (Non-newtonian fluid) รูปแบบการไหลเป็นแบบราบเรียบ (Laminar flow) ของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible) จากรูปแบบการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่จะกำหนดให้แผ่นราบด้านบนมีความเร็วเท่ากับ U และแผ่นราบด้านล่างไม่มีการเคลื่อนที่ (Stationary) จากการศึกษาพบว่าพฤติกรรมของ w มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น เมื่อ A, τ และ β เพิ่มขึ้น แต่เมื่อ β และ ε เพิ่มขึ้นกลับพบว่า θ, θ_G และ θ_S มีแนวโน้มลดลง เนื่องจากเป็นพฤติกรรมจริงของการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่บนแผ่นวัสดุพรุน

คำหลัก: แผ่นราบคู่ขนาน, ความหนืดที่เปลี่ยนแปลง, การถ่ายเทความร้อน, การไหลแบบคูเอท, วัสดุพรุน

Abstract

This research proposed the mathematical model of unsteady couette flow on the porous plate for studying the effect of many dimensionless including of pressure gradient (A), viscosity variation (β), time (τ) and porosity (ε) on the velocity profile (w), the temperature profile of fluid (θ) and both temperature profile of gas (θ_G) and of solid phase (θ_S). In computation method, a finite difference method was used with based on the principle of non-newtonian fluid, laminar flow and incompressible fluid. Regarding to the unsteady couette flow, the uniform velocity of upper plate was U and the lower plate was fixed (Stationary). From the investigation, it was found that the behavior of w was incresed as increasing A, τ and β. On the other hand, the trend of θ, θ_G and θ_S was decreased as increasing β and ε because of this was an actual behavior of unsteady couette flow on the porous plate.

Keywords: parallel plates, variable viscosity, heat transfer, couette flow, porous media

1. บทนำ

ในปัจจุบันการไหลของของไหลที่ไหลผ่านแผ่นราบคู่ขนาน (Parallel plate) โดยที่แผ่นราบด้านบนมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วและแผ่นราบด้านล่างไม่มีการเคลื่อนที่ หรือเรียกการไหลแบบนี้ว่าการไหลแบบคูเอท (Couette flow) มีบทบาทสำคัญในชีวิตประจำวัน เช่น งานทางด้านเครื่องยนต์ งานทางด้านผลิตกระแสไฟฟ้า งานทางด้านอุตสหกรรม เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 2006 Abdul Aziz [1] ได้ทำการศึกษาการไหลแบบคูเอท เพื่อศึกษาความดันของของไหล (Pressure) ที่มีผลต่อความเร็วของของไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ปี ค.ศ. 2011 Oluwole Daniel Makinde และ Okey Oseloka Onyejekwe [2] ได้ทำการศึกษาการไหลแบบคูเอท เพื่อศึกษาความหนืดที่เปลี่ยนแปลง (Variable viscosity) ที่มีผลต่อที่มีผลต่อความเร็วของของไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ปี ค.ศ. 2015 Adetayo S. Eegunjobi และคณะ [3] ได้ทำการศึกษาการไหลแบบคูเอทที่อยู่ในสภาวะไม่คงที่ (Unsteady flow) เพื่อศึกษาความดันและความหนืดที่เปลี่ยนแปลงที่มีผลต่อที่มีผลต่อความเร็วของของไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ปี ค.ศ. 2017 จัตุพล ป้องกัน และคณะ [4] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการไหลแบบคูเอท เพื่อศึกษาความดันของของไหลและระยะห่างระหว่างแผ่นราบคู่ขนานที่มีผลต่อความเร็วของของไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ปี ค.ศ. 2018 วรวุฒิ ก้านคำ และคณะ [5] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการไหลแบบคูเอทบนแผ่นวัสดุพรุน เพื่อศึกษาระยะห่างระหว่างแผ่นราบคู่ขนานที่มีผลต่อความเร็วของของไหล การกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ของแก๊ส และของแข็ง

อย่างไรก็ตามงานวิจัยที่ผ่านมาจะเป็นการพิจาณาการไหลที่อยู่ในสภาวะคงที่ (Steady state) เป็นส่วนใหญ่ ซึ่งไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมการไหลแบบคูเอทได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นบทความวิจัยนี้ จะขอนำเสนอการศึกษาการไหลแบบคูเอทชนิดไม่คงที่ (Unsteady state) บนแผ่นวัสดุพรุน เพื่อศึกษาการไหลแบบคูเอทที่มีพฤติกรรมสอดคล้องกับธรรมชาติหรือการไหลจริง โดยจะเป็นกรณีของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับบทความวิจัยนี้ เป็นการศึกษาอิทธิพลไร้หน่วยของความดัน ความหนืด เวลา และความพรุนของวัสดุพรุนที่มีผลต่อความเร็วของของไหล การกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ของแก๊ส และของแข็ง ภายในวัสดุพรุน

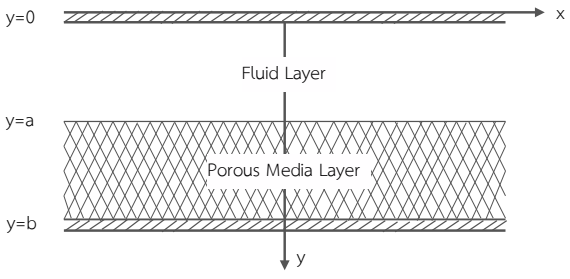
2. รายการสัญลักษณ์

a คือ ระยะห่างในช่วงของของไหล
A คือ ตัวแปรไร้หน่วยของความดันของของไหล
b คือ ระยะห่างในช่วงของวัสดุพรุน
C_P คือ ความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
Ec คือ เลขเอ็กซ์เคอร์
h คือ ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของของไหล
H คือ ระยะห่างทั้งหมด
Nu คือ เลขนัสเซลต์
k คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล
P คือ ความดันของของไหล
Pr คือ เลขพรันด์เทิล
t คือ เวลา
T คือ อุณหภูมิของของไหล
T_G คือ อุณหภูมิของแก๊ส
T_S คือ อุณหภูมิของของแข็ง
T_0 คือ อุณหภูมิเริ่มต้นของของไหล
T_{G0} คือ อุณภูมิเริ่มต้นของแก๊ส
T_{S0} คือ อุณภูมิเริ่มต้นของของแข็ง
T_w คือ อุณหภูมิผิวของของไหล
T_{Gw} คือ อุณหภูมิผิวของแก๊ส
T_{Sw} คือ อุณหภูมิผิวของของแข็ง
u คือ ความเร็วของของไหล
U คือ ความเร็วของแผ่นราบด้านบน
w คือ ตัวแปรไร้หน่วยของความเร็วของของไหล
α คือ ความหนืดที่เปลี่ยนแปลง
β คือ ตัวแปรไร้หน่วยของความหนืดที่เปลี่ยนแปลง
ε คือ ความพรุนของวัสดุพรุน
τ คือ ตัวแปรไร้หน่วยของเวลา
η_a คือ ตัวแปรไร้หน่วยของระยะห่างในช่วงของของไหล

η_b คือ ตัวแปรไร้หน่วยของระยะห่างในช่วงของวัสดุพรุน
θ คือ ตัวแปรไร้หน่วยของอุณหภูมิของของไหล
θ_G คือ ตัวแปรไร้หน่วยของอุณหภูมิของแก๊ส
θ_S คือ ตัวแปรไร้หน่วยของอุณหภูมิของของแข็ง
τ คือ ตัวแปรไร้หน่วยของเวลา

3. แบบจำลองทางกายภาพ

รูปที่ 1 แสดงแบบจำลองทางกายภาพของพฤติกรรมการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่บนแผ่นวัสดุพรุน โดยแผ่นราบด้านบนมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว (U) แผ่นราบด้านล่างไม่มีการเคลื่อนที่ ของไหลจะไหลตามแนวแกน x การถ่ายเทความร้อนจะถ่ายเทจากแผ่นราบด้านบนลงสู่ผ่านแผ่นราบด้านล่าง จากรูปแบบทางกายภาพนี้จะมีสมมติฐานที่จำเป็นในการคำนวณคือ 1) ของไหลอยู่ในสภาวะไม่คงที่ (Unsteady state) 2) ของไหลอัดตัวไม่ได้ (Incompressible) 3) ของไหลแบบนอนนิวโตเนียน (Non-newtoian) 4) พิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหลในแกน x 5) พิจารณาการถ่ายเทความร้อนในแกน y 6) ไม่พิจารณาความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก 7) พิจารณาแรงเฉือนที่กระทำกับของไหลแกน y 8) พิจารณาการแบ่งช่วงของไหลและช่วงของวัสดุพรุนให้มีแผ่นบาง ๆ กั้นระหว่างช่วง 9) พิจารณาให้อากาศของวัสดุพรุนไม่มีการเคลื่อนที่ 10) ไม่พิจารณาการแผ่รังสีความร้อนในช่วงของวัสดุพรุน 11) คุณสมบัติทางกายภาพในช่วงของวัสดุพรุนมีคงที่



รูปที่ 1 แบบจำลองทางกายภาพ

4. สมการควบคุมหลัก

สมการควบคุมหลักที่ใช้หาค่าความเร็วของของไหลจะใช้สมการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัม ส่วนสมการใช้ในการหาค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ของแก๊ส และของแข็ง จะใช้เป็นสมการอนุรักษ์พลังงาน ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{3}$$

$$\rho C_{pG}\frac{\partial T_G}{\partial t}=\varepsilon\left(k_G\frac{\partial^2 T_G}{\partial y^2}\right)-h\left(T_G-T_S\right) \tag{4}$$

$$\rho C_{pS}\frac{\partial T_S}{\partial t}=(1-\varepsilon)\left(k_S\frac{\partial^2 T_S}{\partial y^2}\right)+h\left(T_G-T_S\right) \tag{5}$$

และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สำหรับสมการที่ (1) ถึง (5) สามารถเขียนได้ดังสมการดังนี้

$$u(y,0)=0,\ T(y,0)=T_0,$$
$$T_G(y,a)=T_{G0},\ T_S(y,a)=T_{S0} \tag{6}$$

$$u(0,t)=0,\ T(0,t)=T_w,$$
$$T_{Gw}(0,t)=T_{Gw},\ T_S(0,t)=T_{Sw} \tag{7ก}$$

$$u(a,t)=U,\ \frac{dT}{dy}(a,t)=\text{constant},$$
$$\frac{dT_G}{dy}(b,t)=\text{constant},\ \frac{dT_S}{dy}(b,t)=\text{constant} \tag{7ข}$$

ตัวแปรของสมการไร้หน่วยต่าง ๆ เพื่อจัดรูปสมการควบคุมหลักให้เป็นไร้หน่วยจะแสดงดังต่อไปนี้

$$A=-\frac{\partial \overline{P}}{\partial X},\quad Ec=\frac{U^2}{C_P(T_w-T_0)},\quad Nu=\frac{hH}{k},$$
$$\overline{P}=-\frac{aP}{\mu_0 U},\quad Pr=\frac{\mu_0 C_P}{k},\quad w=\frac{u}{U},$$
$$X=\frac{x}{a},\quad \beta=\alpha(T_w-T_0),\quad \eta_a=\frac{y}{a},$$
$$\eta_b=\frac{y}{b},\quad \theta=\frac{T-T_0}{T_w-T_0},\quad \theta_G=\frac{T_G-T_{G0}}{T_{Gw}-T_{G0}},$$
$$\theta_S=\frac{T_S-T_{S0}}{T_{Sw}-T_{S0}},\quad \nu=\frac{\mu_0}{\rho},\quad \tau=\frac{t\nu}{a^2} \qquad (8)$$

จากนั้นทำการนำเอาตัวแปรของสมการไร้หน่วยต่าง ๆ หรือสมการที่ (8) แทนลงในสมการควบคุมหลักหรือสมการที่ (1) – (5) จะได้คือ

$$\frac{\partial w(\eta_a,\tau)}{\partial \tau}=A+\frac{\partial}{\partial \eta_a}\left[e^{-\beta\theta}\frac{\partial w(\eta_a,\tau)}{\partial \eta_a}\right] \qquad (9)$$

$$Pr\frac{\partial \theta(\eta_a,\tau)}{\partial \tau}=\frac{\partial^2\theta(\eta_a,\tau)}{\partial \eta_a^2}+PrEce^{-\beta\theta}\left[\frac{\partial w(\eta_a,\tau)}{\partial \eta_a}\right]^2 \qquad (10)$$

$$Pr\frac{\partial \theta_G(\eta_b,\tau)}{\partial \tau}=\varepsilon\frac{\partial^2\theta_G(\eta_b,\tau)}{\partial \eta_b^2}+\frac{\partial\theta(\eta_a,\tau)}{\partial \eta_a}\left[\theta_G(\eta_b,\tau)-\theta_S(\eta_b,\tau)\right] \qquad (11)$$

$$Pr\frac{\partial \theta_S(\eta_b,\tau)}{\partial \tau}=1-\varepsilon\frac{\partial^2\theta_S(\eta_b,\tau)}{\partial \eta_b^2}+\frac{\partial\theta(\eta_a,\tau)}{\partial \eta_a}\left[\theta_G(\eta_b,\tau)-\theta_S(\eta_b,\tau)\right] \qquad (12)$$

และเงื่อนไขขอบเขตแบบไร้หน่วยจะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$w(\eta_a,0)=0,\ \theta(\eta_a,0)=1,$$
$$\theta_G(\eta_b,0)=1,\ \theta_S(\eta_b,0)=1 \qquad (13)$$

$$w(0,\tau)=0,\ \theta(0,\tau)=1,$$
$$\theta_G(0,\tau)=1,\ \theta_S(0,\tau)=1 \qquad (14ก)$$

$$w(\eta_a,\tau)=1,\ \frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\eta_b,\tau)=constant,$$
$$\frac{\partial\theta_G}{\partial\eta}(\eta_b,\tau)=constant,\ \frac{\partial\theta_S}{\partial\eta}(\eta_b,\tau)=constant \qquad (14ข)$$

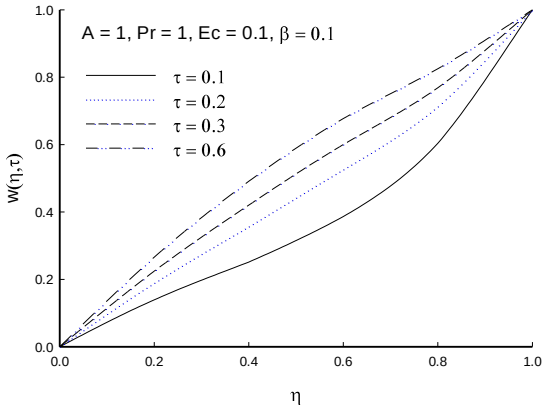
5. วิธีการคำนวณ

บทความวิจัยนี้จะเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขไฟไนต์ดิฟเฟอเรนต์ในการคำนวณหาค่าความเร็วของของไหล สำหรับการกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ของแก๊ส และของแข็ง ตามลำดับ เพื่อศึกษาอิทธิพลไร้หน่วยของความดัน ความหนืดที่เปลี่ยนแปลง เวลา และความพรุนของวัสดุพรุน ที่มีผลต่อความเร็วของของไหล การกระจายตัวของอุณหภูมิของของไหล ของแก๊ส และของแข็ง

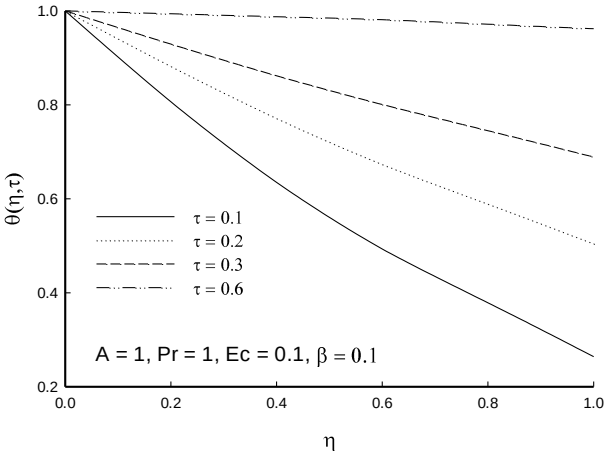
6. ผลการคำนวณและอภิปรายผล

6.1 อิทธิพลของ τ ที่มีผลต่อ w และ θ

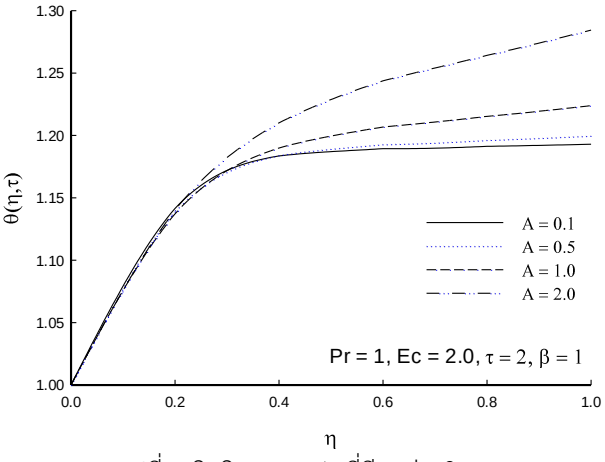
รูปที่ 2 และ 3 แสดงอิทธิพลของ τ ที่มีผลต่อ w และ θ เป็นการศึกษาที่สภาวะ A =1, Pr = 1.0, Ec = 0.1 และ β = 0.1 จากการศึกษาพบว่าเมื่อ τ เพิ่มขึ้น w และ θ จะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย เนื่องจากผลที่ได้ไปสอดคล้องกับพฤติกรรมการไหลจริงที่เกิดขึ้น



รูปที่ 2 อิทธิพลของ τ ที่มีผลต่อ w



รูปที่ 3 อิทธิพลของ τ ที่มีผลต่อ θ



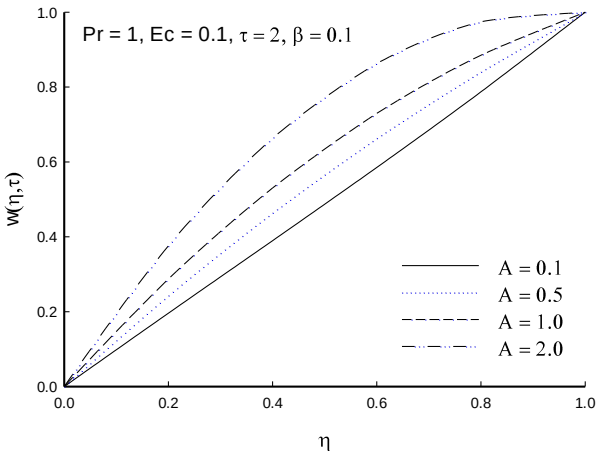
รูปที่ 5 อิทธิพลของ A ที่มีผลต่อ θ

6.2 อิทธิพลของ A ที่มีผลต่อ w และ θ

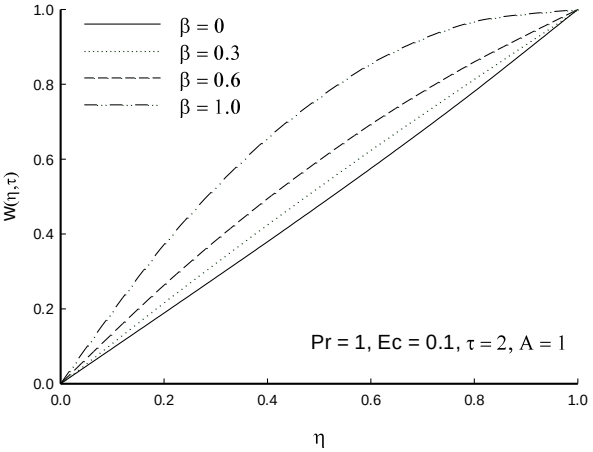
รูปที่ 4 และ 5 แสดงอิทธิพลของ A ที่มีผลต่อ w และ θ เป็นการศึกษาที่สภาวะ Pr =1, Ec = 0.1, τ = 2, β = 0.1 จากการศึกษาพบว่าเมื่อ A เพิ่มขึ้น w และ θ จะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย เนื่องจากความดันช่วยส่งเสริมทำให้ความเร็วเพิ่ม เมื่อความเร็วเพิ่มจะให้อุณหภูมิเพิ่มตามไปด้วย

6.3 อิทธิพลของ β ที่มีผลต่อ w และ θ

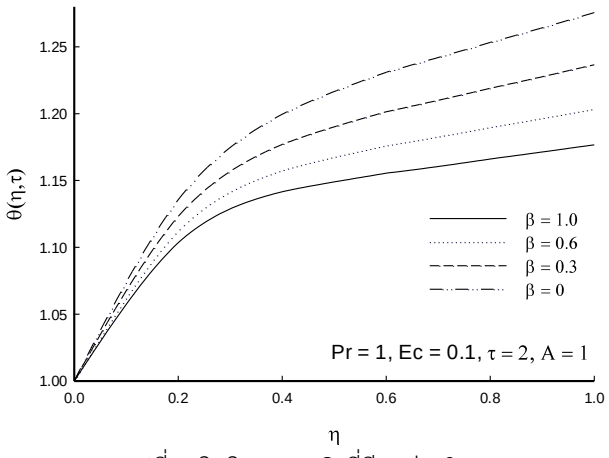
รูปที่ 6 และ 7 แสดงอิทธิพลของ β ต่อ w และ θ ที่สภาวะ Pr =1, Ec = 0.1, τ = 2 และ A = 1 จากการศึกษาพบว่า w มีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นตาม β ที่เพิ่มขึ้น แต่ในทางกลับกัน เมื่อ β กลับส่งผลให้ θ ลดน้อยลง เนื่องจากผลที่ได้อาจเป็นพฤติกรรมจริงที่ว่าความหนืดของของเหลวเพิ่มขึ้นส่งผลให้เกิดการลดลงของความร้อน



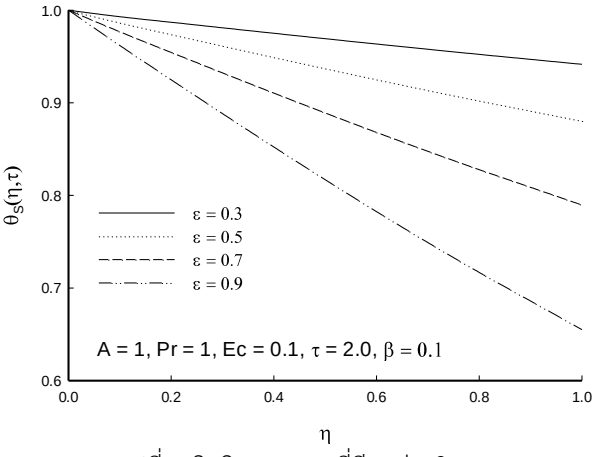
รูปที่ 4 อิทธิพลของ A ที่มีผลต่อ w



รูปที่ 6 อิทธิพลของ β ที่มีผลต่อ w



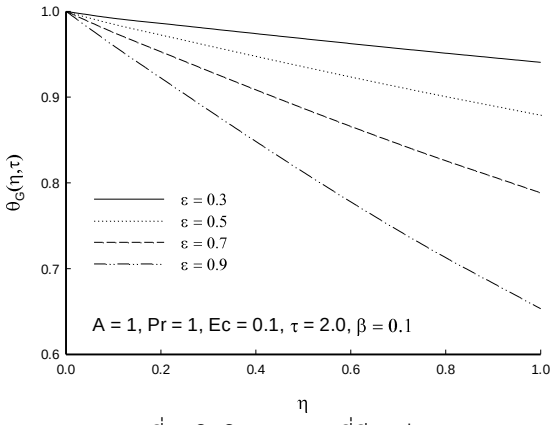
รูปที่ 7 อิทธิพลของ β ที่มีผลต่อ θ



รูปที่ 9 อิทธิพลของ ε ที่มีผลต่อ θ_S

6.4 อิทธิพลของ ε ที่มีผลต่อ θ_G และ θ_S

รูปที่ 8 และ 9 แสดงอิทธิพล ε ต่อ θ_G และ θ_S ที่สภาวะ A =1, Pr = 1.0, Ec = 0.1 และ β = 0.1 จากการศึกษาพบว่า θ_G และ θ_S มีแนวโน้มลดน้อยลงตาม ε ที่เพิ่มขึ้น เนื่องจากความพรุนมีค่าการนำความร้อนน้อยทำให้อุณหภูมิในชั้นของวัสดุพรุนน้อยลง



รูปที่ 8 อิทธิพลของ ε ที่มีผลต่อ θ_G

7. สรุปผลการคำนวณ

บทความวิจัยนี้เป็นการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่บนแผ่นวัสดุพรุน พบว่าพฤติกรรมของ w มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น เมื่อ A, τ และ β เพิ่มขึ้น แต่เมื่อ β และ ε เพิ่มขึ้นกลับพบว่า θ, θ_G และ θ_S มีแนวโน้มลดลง เนื่องจากผลที่ได้สอดคล้องกับพฤติกรรมจริงของการไหลชนิดคูเอทแบบไม่คงที่บนแผ่นวัสดุพรุน

8. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณสำนักงานนโยบายและแผนพลังงาน (สนพ.) ที่ให้เงินทุนสนับสนุนโครงการวิจัย ประจำปีงบประมาณ 2561 และ คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา ที่ช่วยสนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้

9. เอกสารอ้างอิง

[1] Abdul Aziz. (2006). Entropy generation in pressure gradient assisted couette flow with different thermal boudary conditons, *Entropy*, vol. 8(2), May 2006, pp. 50 – 62.

[2] O.D. Makinde & O.O. Onyejekwe. (2011). A numerical study of MHD generalized coutte flow and heat transfer with variable viscosity and electrical conductivity, *Journal of magnetism and magnetic materials*, vol. 323, June 2011, pp. 2757 – 2763.

[3] A.S. Eegunjobi, O.D. Makinde, M.S. Tshehla and O. Franks. (2015). Irreversibility analysis of unsteady couette flow with variable viscosity, *Journal of hydrodynamics*, vol. 27(2), December 2014, pp. 304 – 310.

[4] จัตุพล ป้องกัน, ศิรินันท์ ภู่ทิม, วรฒิ ก้านคำ, กิตติศักดิ์ ผลิพิมาย, บัณฑิต กฤตาคม และคมเพ็ชร อินลา. (2560). การศึกษาคุณลักษณะการไหลแบบคูเอทระหว่างแผ่นราบคู่ขนาน. *การประชุมวิชาการระดับชาตินวัตกรรมและเทคโนโลยีวิชาการ 2017,* มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน วิทยาเขตสุรินทร์ จังหวัดสุรินทร์

[5] วรวุฒิ ก้านคำ, กิตติศักดิ์ ผลิพิมาย และศิรินันท์ ภู่ทิม. (2561). *แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการไหลแบบคูเอทบนแผ่นวัสดุพรุน*, ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน.