AMM2043

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 26 ตุลาคม 2555 จังหวัดเชียงราย



# รูปร่างหลังกระบวนการผลิตของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางชั้นแบบไขว้ไม่สมมาตร Manufacturing Shapes of Unsymmetric Cross-ply Laminated Composite Plates

สนติพีร์ เอมมณี<sup>1</sup>\* และ <u>วิจักษณ์ ภูริยากร</u>1

<sup>1</sup>ห้องปฏิบัติการวัสดุและโครงสร้างขั้นสูง (AMASS) ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140 \*E-mail: sontipee.aim@kmutt.ac.th

#### บทคัดย่อ

บทความนี้จะศึกษาการทำนายรูปร่างที่เปลี่ยนแปลงไปของแผ่นคอมโพสิทรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางชั้นไขว้แบบไม่ สมมาตร (unsymmetric cross-ply laminate) ที่ผ่านกระบวนการผลิตที่อุณหภูมิสูง การเปลี่ยนแปลงของรูปร่างเป็นผล เนื่องมาจากความเค้นตกค้าง (residual stress) ภายในแผ่นเพราะค่าสมบัติของวัสดุในแต่ละชั้นของแผ่นมีค่าไม่เท่ากัน ใน การทำนายจะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการพลังงานศักย์ทั้งหมดต่ำสุดและใช้วิธีเรไลท์-ริทส์ 23 พจน์ (23term Rayleigh-Ritz) เพื่อคำนวณหารูปร่างที่เปลี่ยนไป ตัวแปรต้นที่ทำการศึกษาคือสัดส่วนความยาวด้านระหว่างสอง ด้าน (aspect ratio) สัดส่วนความยาวด้านต่อความหนา (sidelength to thickness ratio) และสัดส่วนความหนา ระหว่างชั้น (ply thickness ratio) การวิเคราะห์จะคำนึงถึงความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตเพื่อสามารถทำนายการโก่ง ตัวของแผ่นที่มีขนาดสูงและรูปร่างของแผ่นที่อาจมีหลายรูปร่างได้ ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ของค่าความ โค้งและตัวแปรทางเรขาคณิตสามารถบ่งบอกลักษณะและจำนวนรูปร่างที่เกิดขึ้นหลังกระบวนการผลิต นอกจากนี้ ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของแผ่นคอมโพสิทที่จุดวิกฤตซึ่งมีการเพิ่มขึ้นของจำนวนรูปร่างจากหนึ่งเป็นหลายรูปร่าง (locus plot) สามารถนำไปเลือกขนาดแผ่นที่เหมาะสมในการผลิตซิ้นงานคอมโพสิทได้

**คำหลัก:** การวางชั้นแบบไขว้ไม่สมมาตร, จุดแยกของรูปร่าง, จุดจำกัด, รูปร่างที่อุณหภูมิห้อง, เรไลท์-ริทส์ 23 พจน์

#### Abstract

Presented is a prediction of manufactured shapes of rectangular unsymmetric cross-ply laminated composite plates. The warpage of composite plates after high temperature manufacturing process is caused by residual stress, which is stemmed from the mismatch of material properties between layers. To predict manufactured shapes of composite plates, the minimum potential energy principle with 23-term Rayleigh-Ritz approach is used. Conducted is parametric study of the involved independent variables, i.e. aspect ratio, sidelength to thickness ratio, and ply thickness ratio. Analysis is taken geometric nonlinearities into consideration in order to be capable of predicting large deformation and multiple manufactured shapes. Computational results show that the relations between a composite plate's curvatures and its geometric variables can identify shape characteristics and their associated shape number after manufactured. Furthermore, the relationships between the geometries of composite plates at critical value that indicate the increment of shape number from single to multiple shape (locus plot) can be adopted to choose the proper plates's dimensions in composite manufacturing process.

*Keywords:* unsymmetric cross-ply laminated, bifurcation point, limit point, room-temperature shape, 23-term Rayleigh-Ritz

#### การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 26 ตลาคม 2555 จังหวัดเชียงราย



# AMM2043

### 1. บทนำ

วัสดุคอมโพสิท (composite material) เป็นวัสดุที่ ประกอบด้วยการรวมวัสดุ 2 ประเภทขึ้นไปเข้าด้วยกัน โดยทั่วไปวัสดุคอมโพสิทประกอบด้วยวัสดุเนื้อหลักหรือ วัสดุพื้น (matrix) และวัสดุเสริมแรง (reinforcement) ที่ กระจายตัวอยู่ในวัสดุพื้น วัสดุพื้นมีหน้าที่รองรับวัสดุ เสริมแรงให้อยู่ในรูปร่างที่กำหนด ขณะที่วัสดุเสริมแรงจะ ช่วยเพิ่มหรือปรับปรุงสมบัติเชิงกลของวัสดุพื้นให้สูงขึ้น หรือดีขึ้นสำหรับการใช้งาน

อย่างไรก็ดีกระบวนการผลิตแผ่นคอมโพสิทด้วย วิธีการอบความร้อนในเตา (autoclave technique) หรือวิธีการบีบอัดที่อุณหภูมิสูง (hot-press technique) อาจทำให้รูปร่างของแผ่นคอมโพสิทเกิดการเปลี่ยนแปลง ้ไปจากรูปร่างเดิมอย่างชัดเจนดังแสดงในรูปที่ ้ ปรากฏการณ์นี้เป็นผลมาจากค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น of elasticity) และค่าสัมประสิทธิ์การ (modulus ขยายตัวจากความร้อน (coefficient of thermal expansion) ของแผ่นคอมโพสิทในแต่ละชั้นที่ไม่เท่ากัน ซึ่งทำให้เกิดความเค้นตกค้าง (residual stress)[1] ภายในแผ่น โดยเฉพาะอย่างยิ่งความเค้นตกค้างจะมีค่าสูง ในกรณีที่แผ่นคอมโพสิทมีการวางตัวของแต่ละชั้นที่ไม่ สมมาตรกับระนาบกึ่งกลางของแผ่น (unsymmetric laminate) [2-7] ตัวอย่างของการวางชั้นแบบสมมาตร และไม่สมมาตรแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งการเปลี่ยนรูปร่าง เนื่องจากกระบวนการผลิตนี้อาจทำให้เกิดความย่งยากใน การนำมาใช้งานถ้าไม่พิจารณาไว้ตั้งแต่ขั้นตอนการ ้ออกแบบในเบื้องต้น ยิ่งไปกว่านี้การคาดเดารูปร่างหลัง กระบวนการผลิตของแผ่นคอมโพสิทที่มีความหลากหลาย ของชนิดและขนาดสามารถทำได้ยากโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกรณีที่รูปร่างหลังกระบวนการผลิตมีหลายรูปร่าง ดังนั้นการไม่ทราบข้อมูลของรูปร่างที่เปลี่ยนไปในเชิง ปริมาณอาจส่งผลถึงความสูญเสียขึ้นในการผลิตชิ้นงาน จากวัสดุคอมโพสิท อย่างไรก็ดีแม้ว่ารูปร่างที่เปลี่ยนไป หลังกระบวนการผลิตมักถูกพิจารณาว่าเป็นผลเสียแต่ก็ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ในการออกแบบ โครงสร้างที่ปรับเปลี่ยนรูปร่างได้ หรือเป็นส่วนประกอบ ของแอ็คชูเอเตอร์ (actuator) ซึ่งนำไปใช้งานเป็นกลไก แบบโครงสร้าง (compliance mechanism) [7,8] ด้วย เหตุผลนี้การทำนายรูปร่างหลังกระบวนการผลิตจึงมี ความสำคัญอย่างยิ่งทั้งในแง่ของการออกแบบใช้เป็น โครงสร้างโดยตรงและในแง่ของการนำไปประยุกต์ใช้งาน



รูปที่ 1 รูปร่างของแผ่นคอมโพสิท (ก) ก่อนการผลิตที่ อุณหภูมิห้อง (ข) ในขณะนำไปผลิตที่อุณหภูมิสูง (ค) ในขณะลดอุณหภูมิให้เย็นตัว (ง) ที่อุณหภูมิห้องหลังออก จากแม่แบบ



รูปที่ 2 ลักษณะการวางชั้นของแผ่นคอมโพสิท (ก) สมมาตรกับระนาบกึ่งกลาง (ข) ไม่สมมาตรกับระนาบ กึ่งกลาง

# ในรูปแบบอื่นๆ

จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับการ ทำนายรูปร่างแผ่นคอมโพสิทหลังกระบวนการผลิตของ นักวิจัยหลายท่านพบว่า ในปี 1981-1998 Hyer [2-4] ได้ ใช้ทฤษฎีการวางซ้อนกันเป็นชั้นแบบฉบับ (Classical Lamination Theory - CLT) ประกอบกับวิธีเรไลท์-ริทส์ 4 พจน์ (4-term Rayleigh-Ritz, RR-4) เพื่อทำนาย รูปร่างของแผ่นคอมโพสิทสีเหลี่ยมจัตุรัสที่มีการวางชั้น ้ไขว้  $[0^{\circ}/90^{\circ}]$  โดยมีความหนาชั้น  $0^{\circ}$  และ  $90^{\circ}$  เท่ากัน และค้นพบความเสถียรหลายรูปร่าง (multistable) และ จุดแยกของรูปร่าง (bifurcation point) ซึ่งเป็นจุดที่มี การเพิ่มรูปร่างหลังการผลิตจาก 1 รูปร่างเป็น 3 รูปร่าง แบบต่อเนื่อง และปี 1998 Dano และ Hyer [5] ใช้วิธี RR-14 ซึ่งมีความแม่นยำมากกว่า RR-4 ต่อมาปี 2003 [6] ทำนายรูปร่างหลังการผลิตของแผ่น Gigliotti คอมโพสิท carbon fiber/epoxy (AS4-8552) ด้วยวิธี



# AMM2043

RR-4 และวิธีไฟในต์เอลิเมนต์ (Finite-element method) พบว่าผลทำนายแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าระหว่าง สองวิธีนั้นมีผลการทำนายไม่ตรงกันซึ่งเกิดจากความยาว ที่ตั้งฉากกันของสี่เหลี่ยมที่ไม่เท่ากัน ผลการทำนายจากไฟ ในต์เอลิเมนต์ของ Gigliotti ไม่พบจุดแยกของรูปร่าง แบบต่อเนื่อง ในขณะที่ผลจากวิธี RR-4 ให้ผลที่แสดงถึง จุดแยกของรูปร่างแบบต่อเนื่อง อย่างไรก็ดี Gigliotti ไม่ สามารถใช้วิธีไฟในต์เอลิเมนต์วิเคราะห์แผ่นคอมโพสิท Graphite/Epoxy รูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีการวางชั้นไขว้ ทั้งสมมาตรและไม่สมมาตรจำนวน 2 ชั้น เพื่อออกแบบ และสร้างปีกเล็ก (Winglet) Tawfik พบว่ารูปร่างแผ่น คอมโพสิทที่ผลิตมีรูปร่างได้หลายรูปร่างเช่นเดียวกัน

ในบทความนี้การทำนายรูปร่างของแผ่นคอมโพสิท หลังกระบวนการผลิตจะใช้แบบจำลองสมการพลังงาน ้ศักย์ทั้งหมดต่ำที่สุด (minimum total potential energy) และวิธีเรไลท์-ริทส์ 23 พจน์ (RR-23) ซึ่ง Aimmanee และ Hyer ได้แสดงว่าวิธี RR-23 มีความ แม่นยำกว่าวิธี RR-4 และให้ผลใกล้เคียงกับวิธีการไฟไนต์ เอลิเมนต์มาก [8] แต่สามารถคำนวณได้รวดเร็วกว่า ้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ แผ่นคอมโพสิทที่ทำการศึกษาใน บทความนี้ทำมาจากอีพ็อกซี่เรซินเสริมแรงด้วยเส้นใย คาร์บอน (Carbon fiber/Epoxy; AS4/8552) รูป สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางชั้นไขว้ [0°/90°] แบบไม่ สมมาตร (unsymmetric cross-ply laminate) โดยการ ทำนายรูปร่างจะศึกษาถึงค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิท เมื่อความกว้างกับความยาวของแผ่นเปลี่ยนไป และศึกษา พฤติกรรมของแผ่นคอมโพสิทที่อาจมีรูปร่างหลัง กระบวนการผลิตมากกว่า 1 รูปร่าง นอกจากนี้บทความนี้ จะนำเสนอกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดวิกฤต ของแผ่นคอมโพสิทซึ่งแสดงจุดแยกของรูปร่างจาก 1 รูปร่างเป็น 3 รูปร่าง โดยกราฟดังกล่าวยังไม่เคยมีการ เผยแพร่ในวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นประโยชน์ในการ เลือกประยุกต์ใช้หรือออกแบบแผ่นคอมโพสิทอย่าง เหมาะสมต่อไป

## 2. ทฤษฎี

ในการทำนายรูปร่างจะใช้ทฤษฎีการวางซ้อนกันเป็น ขั้นแบบฉบับ และสมมุติฐานความเค้นระนาบ (Plane stress assumption) ซึ่งเป็นสมมุติฐานพื้นฐานสำหรับ คอมโพสิทแผ่นบางมาวิเคราะห์ [2-4] โดยพิจารณาว่า สมบัติของแผ่นคอมโพสิทที่นำมาคำนวณมีสมบัติเฉพาะ ทิศทาง (orthotropic) มีความเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) มีความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (linearly elastic) และผิวสัมผัสระหว่างชั้นไม่มีการลื่นไถลหรือหลุด ออกจากกัน

จากสมมุติฐานดังกล่าวข้างต้นพลังงานศักย์ทั้งหมด ของแผ่นคอมโพสิทสามารถคำนวณหาได้โดยการหาปริ พันธุ์ (Integration) ของพลังงานความเครียดตลอด ปริมาตรของแผ่นคอมโพสิทดังแสดงในสมการที่ (1)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \left\{ (\sigma_x - \sigma_x^T) \varepsilon_x + (\sigma_y - \sigma_y^T) \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right\} dx dy dz$$

$$(1)$$

โดยที่  $L_x, L_y$  และ H คือความยาวด้านในแนวแกน x, yและความหนาของแผ่นคอมโพสิทในแนวแกน zตามลำดับ  $\sigma_x, \sigma_y$  เป็นความเค้นฉากในแนวแกน x, yตามลำดับ  $\tau_{xy}$  เป็นความเค้นฉือนในระนาบ x - yและ  $\sigma_x^T, \sigma_y^T$  แสดงถึงความเค้นฉากที่เกิดจากการ เหนี่ยวนำของอุณหภูมิในแนวแกน x, y ตามลำดับใน กรณีที่แผ่นถูกยึดตรึงทุกระนาบ พจน์ความเครียดใน สมการพลังงานที่ (1) สามารถหาได้จากสมมุติฐานของ เคอร์คอฟ (Kirchhoff hypothesis) ได้ดังนี้

$$\varepsilon_{x} = \varepsilon_{x}^{0} + z\kappa_{x}^{0} = \frac{\partial u^{0}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^{0}}{\partial x} \right)^{2} - z \left( \frac{\partial^{2} w^{0}}{\partial x^{2}} \right)$$

$$\varepsilon_{y} = \varepsilon_{y}^{0} + z\kappa_{y}^{0} = \frac{\partial v^{0}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^{0}}{\partial y} \right)^{2} - z \left( \frac{\partial^{2} w^{0}}{\partial y^{2}} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{0} + z\kappa_{xy}^{0} = \left( \frac{\partial u^{0}}{\partial y} + \frac{\partial v^{0}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial w^{0}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w^{0}}{\partial y} \right)$$

$$-2z \left( \frac{\partial^{2} w^{0}}{\partial x \partial y} \right) \qquad (2)$$

โดยที่  $u^0$ ,  $v^0$  และ  $w^0$  คือการกระจัดของแผ่นในทิศทาง x, y และ z ที่ระนาบกึ่งกลางแผ่นตามลำดับ ซึ่งพจน์ที่ ขีดเส้นใต้ในสมการที่ (2) จะเพิ่มขึ้นจากสมการ ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและระยะกระจัด ตามปกติที่เป็นเชิงเส้น เนื่องจากการเปลี่ยนรูปของแผ่น คอมโพสิทจะแสดงพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างหลัง กระบวนการผลิตมาก (large deformation) จึงต้อง พิจารณาความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตระหว่าง ความเครียดและการกระจัด (Geometrically nonlinear

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 26 ตลาคม 2555 จังหวัดเชียงราย



# AMM2043

strain - displacement relation) ซึ่งเป็นพจน์ทาง คณิตศาสตร์ที่ขีดเสนใต้ไว้

ภายใต้สมมุติฐานการยืดหยุ่นเชิงเส้น ความสัมพันธ์ ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-Strain relation) เป็นไปตามสมการที่ (3) ดังนี้

$$\begin{cases} \sigma_{x} - \sigma_{x}^{T} \\ \sigma_{y} - \sigma_{y}^{T} \\ \tau_{xy} - \tau_{xy}^{T} \end{cases} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x}^{o} + z\kappa_{x}^{0} \\ \varepsilon_{y}^{0} + z\kappa_{y}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} + z\kappa_{xy}^{0} \end{bmatrix}$$
(3)

โดยที่

$$\begin{cases} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \\ \tau_{xy}^T \end{cases} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{cases}$$
(4)

ซึ่ง  $\Delta T$  คืออุณหภูมิที่ลดลงในกระบวนการผลิต และ  $\alpha_x, \alpha_y$  และ  $\alpha_{xy}$  คือค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนรูป เนื่องจากความร้อน (Coefficient of Thermal Deformation) ในทิศทาง x, y และในระนาบ x - yตามลำดับ ดังมีนิยามในสมการด้านล่าง

$$\begin{cases} \alpha_{x} \\ \alpha_{y} \\ \alpha_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} m^{2} & n^{2} \\ n^{2} & m^{2} \\ 2mn & -2mn \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_{1} \\ \alpha_{2} \\ 0 \end{cases}$$
(5)

ในสมการที่ (5)  $\alpha_1$  และ  $\alpha_2$  คือสัมประสิทธิ์การขยายตัว เนื่องจากความร้อนในแนวเส้นใยและในแนวขวางของเส้น ใยตามลำดับ ส่วนค่าความแข็งตึง  $\bar{Q}_{ij}$  (Transformed reduced stiffness) ในสมการที่ (3) และ (4) สามารถหา ได้ดังนี้

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}m^{4} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^{2}m^{2} + Q_{22}n^{4} 
\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})n^{2}m^{2} + Q_{12}(n^{4} + m^{4}) 
\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})nm^{3} + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^{3}m 
\overline{Q}_{22} = Q_{11}n^{4} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^{2}m^{2} + Q_{22}m^{4} 
\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^{3}m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})nm^{3} 
\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})n^{2}m^{2} + Q_{66}(n^{4} + m^{4})$$
(6)

โดย  $m = \cos \theta$  และ  $n = \sin \theta$  ซึ่ง  $\theta$  คือมุมที่เส้นใย เสริมแรงทำมุมกับแกน x ตัวอย่างของการวางมุมเส้นใย ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2  $Q_{ij}$  คือความแข็งตึงลดรูป (Reduced stiffness) ซึ่งเขียนในรูปค่าคงที่ของวัสดุทาง วิศวกรรม (Engineering elastic constants) ได้ใน สมการที่ (7)

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$
(7)

หลังการเย็นตัวจากการผลิต รูปร่างที่สภาวะสมดุล ของคอมโพสิทจะถูกทำนายได้โดยวิธีประมาณค่าการ กระจัดที่ระนาบกึ่งกลางของแผ่นด้วยวิธีเรไลท์-ริทส์ 23 พจน์ (RR-23) ในสมการที่ (8) ด้านล่าง

$$w^{0}(x, y) = c_{1}x^{2} + c_{2}y^{2} + c_{3}x^{4} + c_{4}y^{4} + c_{5}x^{2}y^{2} + c_{6}x^{4}y^{2} + c_{7}x^{2}y^{4} + c_{8}x^{6} + c_{9}y^{6}$$
$$u^{0}(x, y) = c_{10}x + c_{12}x^{3} + c_{14}xy^{2} + c_{16}x^{5} + c_{18}x^{3}y^{2} + c_{20}xy^{4} + c_{22}x^{7}$$
$$v^{0}(x, y) = c_{11}y + c_{13}y^{3} + c_{15}x^{2}y + c_{17}y^{5} + c_{19}x^{2}y^{3} + c_{21}x^{4}y + c_{23}y^{7}$$
(8)

ตัวแปร  $c_1 - c_{23}$  ที่ไม่ทราบค่าในสมการที่ (8) สามารถ หาได้โดยการหาอนุพันธ์ย่อย (Partial differentiation) ของสมการพลังงานศักย์ทั้งหมดเทียบกับตัวแปรทั้ง 23 หนึ่งครั้งแล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = f_{c_1} = 0 , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = f_{c_2} = 0 , \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_{23}} = f_{c_{23}} = 0$$
(9)

เมื่อแก้สมการ (9) หาค่าตัวแปรทั้ง 23 ตัวได้ ตัวแปร ทั้งหมด 23 ตัว จะถูกนำไปแทนในสมการที่ (8) เพื่อ คำนวณหารูปร่างของแผ่นคอมโพสิทหลังกระบวนการ ผลิตได้ ส่วนความเสถียรของรูปร่างที่คำนวณได้จะหาได้ จากการพิจารณาเมตริกซ์ [*C*] หรือเฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix) ในสมการที่ (10)

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{c_1}}{\partial c_1} & \frac{\partial f_{c_1}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial f_{c_1}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial f_{c_1}}{\partial c_{23}} \\ \frac{\partial f_{c_2}}{\partial c_1} & \frac{\partial f_{c_2}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial f_{c_2}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial f_{c_2}}{\partial c_{23}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{c_{22}}}{\partial c_1} & \frac{\partial f_{c_{22}}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial f_{c_{22}}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial f_{c_{22}}}{\partial c_{23}} \\ \frac{\partial f_{c_{23}}}{\partial c_1} & \frac{\partial f_{c_{23}}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial f_{c_{23}}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial f_{c_{23}}}{\partial c_{23}} \\ \end{bmatrix}$$
(10)

ถ้าเมตริกซ์ [*C*] เป็นค่าบวกจำกัด (Positive definite) คำตอบที่ได้จากสมการจะให้รูปร่างที่มีความเสถียร

#### การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 26 ตุลาคม 2555 จังหวัดเชียงราย



ในทางกลับกันถ้าเมตริกซ์ [C] ไม่เป็นค่าบวกจำกัด คำตอบที่ได้จากสมการจะให้รูปร่างที่ไม่มีความเสถียร

### 3. ผลการคำนวณ

วัสดุของแผ่นคอมโพสิทที่ใช้ทำนายคืออีพ็อกซี่เรซิน เสริมแรงด้วยเส้นใยคาร์บอน (Carbon fiber/Epoxy; AS4/8552) ดังมีสมบัติแสดงไว้ในตารางที่ 1 โดยมีจำนวน ชั้นทั้งหมด 2 ชั้น ซึ่งมีการวางทิศทางของเส้นใยในแนว 0° และ 90° ดังแสดงในรูปที่ 3 โดยกำหนดให้ความหนา ทั้งหมดเท่ากับ 1 มิลลิเมตร ในการผลิตมีการลดอุณหภูมิ จาก 185 องศาเซลเซียส (curing temperature) มาสู่ อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียส ( $\Delta T = -160^{\circ}C$ )

ตารางที่ 1 แสดงสมบัติทางกลของ AS4/8552





รูปร่างหลังกระบวนการผลิตที่คำนวณได้จะแสดงผล เป็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าความโค้งเฉลี่ยของแผ่นตาม แนวแกน x ( $K_x$ ) และ y ( $K_y$ ) ที่นิยามในสมการที่ (11) กับขนาดของแผ่นซึ่งแสดงในรูปของปริมาณไร้มิติได้แก่ สัดส่วนความยาวด้านต่อความหนา ( $L_x/HT$  หรือ sidelength to thickness ratio) สัดส่วนความยาวด้าน x และ y ( $L_x/L_y$  หรือ AR) และสัดส่วนความหนา ระหว่างชั้น ( $t_0/t_{90}$  หรือ TR)

$$K_{x} = \frac{1}{L_{x}} \int_{-L_{x}/2}^{+L_{x}/2} \kappa_{x}^{0}(x,0) dx$$

$$K_{y} = \frac{1}{L_{y}} \int_{-L_{y}/2}^{+L_{y}/2} \kappa_{y}^{0}(0,y) dy$$
(11)

โดยเส้นทึบและเส้นประแสดงรูปร่างที่เสถียร (stable) และเส้นลายจุดแสดงรูปร่างที่ไม่เสถียร (unstable) รูปร่างของแผ่นคอมโพสิทที่ได้จากการทำนายจะแบ่ง ออกเป็น 2 ลักษณะหลักคือ รูปร่างอานม้า (saddle shape) ที่มีค่าความโค้งเฉลี่ยของทั้งสองแกนใกล้เคียงกัน แต่มีเครื่องหมายต่างกัน และรูปร่างทรงกระบอก (cylindrical shape) ที่มีค่าความโค้งเฉลี่ยของแกนแกน หนึ่งมากกว่าอีกแกนหลายเท่าดังแสดงในรูปที่ 4 ผลการ ทำนายรูปร่างแผ่นที่มีสัดส่วนความหนาระหว่างชั้นเท่ากับ 1.0 และสัดส่วนความยาวด้าน x และ y เท่ากับ 1.0 (รูป จัตุรัส) แสดงไว้ในรูปที่ 5 พบว่ารูปร่างของแผ่นคอมโพสิท มีเพียงรูปร่างเดียวตามเส้น AB ที่สัดส่วนความยาวด้านต่อ



รูปที่ 4 ตัวอย่างรูปร่างแผ่นคอมโพสิทหลังกระบวนการ ผลิต (ก) รูปร่างอานม้า (*K<sub>x</sub>* = +1.77, *K<sub>y</sub>* = -1.77) (ข) รูป ทรงกระบอก (*K<sub>x</sub>* = +0.64, *K<sub>y</sub>* = -3.63)



รูปที่ 5 ค่าความโค้งเฉลี่ยของแผ่นคอมโพสิทที่ TR = 1.0 และ AR = 1.0





# AMM2043

ความหนาน้อยกว่า 78 เมื่อค่าสัดส่วนความยาวต่อความ หนาเพิ่มขึ้นจะพบจุดแยกของรูปร่าง ณ จุด B ซึ่งเป็น สัดส่วนความยาวด้านต่อความหนาวิกฤต (critical sidelength to thickness ratio) โดยมีการเพิ่มรูปร่าง จาก 1 รูปร่างเป็น 3 รูปร่างอย่างต่อเนื่องตามเส้น BC BE และ BD ซึ่งรูปร่าง BC และ BE เป็นรูปร่างที่เสถียรและ รูปร่าง BD เป็นรูปร่างที่ไม่เสถียร ทั้งนี้รูปร่างแผ่น คอมโพสิทหลังกระบวนการผลิตได้แสดงไว้ในรูปที่ 5 ด้วย โดยรูปร่างด้านซ้ายที่เสถียรเป็นรูปร่างอานม้าที่มีค่า สัดส่วนความยาวด้านต่อความหนาเท่ากับ 30 ส่วนรูปร่าง ด้านขวาที่เสถียรเป็นรูปร่างทรงกระบอกและด้านขวาที่ไม่ เสถียรเป็นรูปร่างอานม้าที่มีค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อ ความหนาเท่ากับ 120

เมื่อสัดส่วนความยาวด้าน x และ y และสัดส่วน ความหนาระหว่างชั้นของแผ่นคอมโพสิทไม่เท่ากับ 1.0 หรือแผ่นคอมโพสิทเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและมีความหนา ของชั้น 0<sup>°</sup> น้อยกว่า 90<sup>°</sup> ผลการทำนายแสดงให้เห็นว่าไม่ เกิดจุดแยกของรูปร่างแต่จะเกิดจุดจำกัด (limit point) ขึ้นแทนดังรูปที่ 6 ซึ่งเป็นการเพิ่มของรูปร่างจาก 1 รูปร่างเป็น 3 รูปร่างแบบไม่ต่อเนื่อง โดยที่จุด B จะไม่ บรรจบกับเส้น AC เหมือนจุดแยกของรูปร่างในรูปที่ 5 ผลกระทบจากสัดส่วนความยาวด้าน x และ y จะส่งผล ให้จุดจำกัดมีค่าที่เปลี่ยนแปลงไป โดยถ้าสัดส่วนความยาว ้ด้าน x และ y ที่มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.4 ค่าสัดส่วนของ ความยาวด้านต่อความหนาของจุดจำกัดก็เพิ่มขึ้นด้วย ตัวอย่างของรูปร่างแผ่นคอมโพสิทที่แสดงในรูปที่ 6 นั้น เป็นรูปร่างที่มีสัดส่วนความยาวด้าน x และ y เท่ากับ 0.4 ้รูปร่างด้านซ้ายที่เสถียรเป็นรูปร่างอานม้าที่มีค่าสัดส่วน ความยาวด้านต่อความหนาเท่ากับ 30 ส่วนรูปร่าง ด้านขวาที่เสถียรเป็นรูปร่างทรงกระบอกและรูปร่างที่ไม่ เสถียรเป็นรูปร่างอานม้าที่มีค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อ ความหนาเท่ากับ 120 ซึ่งคล้ายคลึงกับลักษณะของรูปร่าง หลังกระบวนการผลิตที่ได้ในรูปที่ 5

จากรูปที่ 5 และ 6 สามารถสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อค่า สัดส่วนความหนาระหว่างชั้นและสัดส่วนความยาวด้าน *x* และ *y* มีค่าไม่เท่ากับ 1.0 จุดแยกของรูปร่างจะหายไป และเกิดจุดจำกัดขึ้นแทนเพราะเนื่องจากความสมมาตร ระหว่างชั้น 0° และ 90° และความยาวด้าน *x* และ *y* ถูก ทำลายไป อย่างไรก็ดีเมื่อทำการเปลี่ยนตัวแปรทาง เรขาคณิตไปอย่างละเอียดพบว่าจุดแยกของรูปร่าง สามารถเกิดขึ้นได้อีกครั้งแม้ว่าความหนาชั้นของแผ่น



รูปที่ 6 ค่าความโค้งเฉลี่ยของแผ่นคอมโพสิทที่ TR =0.88 และ AR = 0.4 - 1.0

คอมโพสิทมีค่าไม่เท่ากัน (TR ≠ 1.0) และความยาวด้าน *x* และ *y* ไม่เท่ากัน (AR ≠ 1.0) ยกตัวอย่างเช่นที่สัดส่วน
ความหนาระหว่างชั้น 0.88 สามารถพบจุดแยกของ
รูปร่างได้ แต่มีค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อความหนา
วิกฤตของจุดแยกของรูปร่างที่แตกต่างกันดังแสดงในรูปที่
7 และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับรูปที่ 5 ค่าสัดส่วนความ
ยาวด้านต่อความหนาวิกฤตของจุดแยกของรูปร่างจะมีค่า
น้อยกว่า

เมื่อนำค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อความหนา สัดส่วน ความหนาระหว่างขั้นและสัดส่วนความยาวด้าน x และ y ที่จุดวิกฤตมาสร้างความสัมพันธ์จะสามารถแสดงได้ในรูป ที่ 8 (locus plot) ที่สัดส่วนความหนาระหว่างชั้นเท่ากับ 0.51 ถึง 1.00 โดยเส้นกราฟส่วนใหญ่แสดงจุดวิกฤตที่ เป็นจุดจำกัด อย่างไรก็ดีบนเส้นสัดส่วนความหนาระหว่าง ชั้นคงที่บางเส้นเช่น 1.0 0.93 และ 0.88 จะเกิดจุดหักมุม ขึ้นซึ่งแสดงถึงการเกิดจุดวิกฤตที่เป็นจุดแยกของรูปร่าง





รูปที่ 7 ค่าความโค้งเฉลี่ยของแผ่นคอมโพสิทที่ TR =0.88 และ AR = 0.182



แทนที่จะเป็นจุดจำกัด แต่เมื่อสัดส่วนความหนาระหว่าง ้ชั้นมีค่าน้อยกว่า 0.88 จะไม่พบจุดแยกของรูปร่างอีกโดย สะท้อนให้เห็นได้จากการหักมุมของเส้นที่เริ่มไม่ชัดเจน นอกจากนี้ยังสังเกตเห็นได้ว่าสัดส่วนความยาวด้าน xและ *v* ที่มีค่ามากกว่า 3.0 ค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อ ความหนาวิกฤตจะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นขึ้นกับค่าสัดส่วน

ความยาวระหว่างด้านทั้งสอง ในขณะที่เมื่อสัดส่วนความ ความยาวด้าน x และ y มีค่าน้อยกว่า 0.05 ค่าสัดส่วน ความยาวด้านต่อความหนาวิกถตจะเป็นค่าคงที่และไม่ ขึ้นกับค่าสัดส่วนความยาวระหว่างด้านทั้งสอง

ยิ่งไปกว่านั้นเมื่อพิจารณาเส้นสัดส่วนความหนา ระหว่างชั้นเท่ากับ 0.69 ในรูปที่ 8 พบว่าการผลทำนาย ค่าวิกฤตที่ได้มีความแตกต่างกับเส้นสัดส่วนความหนา ระหว่างชั้นค่าอื่น นั้นคือที่สัดส่วนความยาวด้าน x และ vน้อยกว่า 0.17 จะเกิดค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อความ หนาวิกฤตซึ่งเป็นจุดจำกัดมากกว่า 1 ค่า โดยสามารถ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความโค้งเฉลี่ยกับสัดส่วน ความยาวด้านต่อความหนาได้ในรปที่ 9

รูปความสัมพันธ์ที่คล้ายกับรูปที่ 8 ที่สัดส่วนความ หนาระหว่างชั้นเท่ากับ 1.00 ถึง 1.96 จะสามารถแสดงได้ ในรูปที่ 10 ซึ่งสามารถพบว่าเกิดจุดหักมุมเช่นเดียวกัน จุด แยกของรูปร่างทั้งหมดของรูปที่ 8 และ 10 จะปรากฏ ในช่วงสัดส่วนความหนาระหว่างชั้นเท่ากับ 0.88 ถึง 1.14 ้อย่างไรก็ดีที่สัดส่วนความหนาระหว่างชั้นเท่ากับ 1.14 ไม่ เห็นการหักมุมอย่างชัดเจน เพราะสัดส่วนความหนา



รูปที่ 9 ค่าความโค้งเฉลี่ยของแผ่นคอมโพสิทที่ TR =0.69 และ AR = 0.01



AMM2043

#### การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 26 ตุลาคม 2555 จังหวัดเชียงราย





ระหว่างขั้นที่มากกว่า 1.14 จะไม่พบจุดแยกของรูปร่างอีก นอกจากนี้สัดส่วนความยาวด้าน x และ y ที่มีค่ามากกว่า 9.0 ค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อความหนาวิกฤตจะมี ความสัมพันธ์เชิงเส้นขึ้นกับค่าสัดส่วนความยาวระหว่าง ด้านทั้งสอง ในขณะที่สัดส่วนความยาวด้าน x และ y มี ค่าน้อยกว่า 0.1 ค่าสัดส่วนความยาวด้านต่อความหนา วิกฤตจะเป็นค่าคงที่และไม่ขึ้นกับค่าสัดส่วนความยาว ระหว่างด้านทั้งสอง

## 4. สรุป

บทความนี้นำเสนอวิธีการทำนายรูปร่างหลัง กระบวนการผลิตของแผ่นคอมโพสิทที่มีการวางชั้นไขว้ แบบไม่สมมาตร  $[0^{\circ}/90^{\circ}]$  จำนวน 2 ชั้น ผลการทำนาย ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความโค้งเฉลี่ยและสัดส่วนความ ยาวด้านต่อความหนาแสดงว่าเกิดจุดแยกของรูปร่างและ จุดจำกัด โดยที่จุดแยกของรูปร่างสามารถเกิดได้ที่สัดส่วน ความหนาระหว่างขั้นค่าอื่นนอกเหนือจาก 1.0 ถ้ามี สัดส่วนความยาวด้าน x และ y และสัดส่วนความหนา ระหว่างชั้นที่เหมาะสม ทั้งนี้ยังพบว่าจุดจำกัดสามารถเกิด ได้มากกว่า 1 จุด เช่นที่สัดส่วนความยาวด้าน x และ y ที่ น้อยกว่า 0.17 จะเกิดจุดจำกัด 3 จุด

ผลการทำนายรูปร่างของกระบวนการผลิตแผ่น คอมโพสิทที่ได้นำเสนอไว้จะมีประโยชน์ต่อการควบคุม และออกแบบการผลิตแผ่นคอมโพสิทได้อย่างถูกต้องและ เหมาะสม ค่าวิกฤตของจุดแยกของรูปร่างและจุดจำกัด สามารถบ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงการเกิดรูปร่างหลัง กระบวนการผลิตซึ่งอาจมีได้มากกว่าหนึ่งรูปร่าง การ ทำนายรูปร่างได้อย่างถูกต้องทำให้ผู้ผลิตสามารถเลือก ประยุกต์ใช้งานแผ่นคอมโพสิทได้หลากหลาย แผ่น คอมโพสิทที่มีสภาวะเสถียรหลายรูปร่างยังสามารถนำไป ประยุกต์ใช้งานเป็นโครงสร้างที่ปรับเปลี่ยนได้ (adaptive structure) หรือไปประยุกต์ใช้งานเป็นส่วนหนึ่งของแอ็คชู เอเตอร์รูปแบบใหม่ในอนาคต

#### 5. เอกสารอ้างอิง

[1] White, S.R., (1992). Process modeling of composite materials: residual stress development during cure, Part II: Experimental Validation, *Journal of Composite Materials*, 1992; 26(16): 2423.

[2] Hyer, M.W. (1981). Calculation of the Room-Temperature Shapes of Unsymmetric Laminate, *Journal of Composite Material*, vol. 15, pp. 296-310.

[3] Hyer, M.W. (1982). The room-temperature shapes of four-layer unsymmetric cross-ply laminates, *Journal of Composite Materials,* vol. 15, pp. 318-40.

[4] Hyer, M.W. (1998). *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, WCB/McGraw-Hill Publishers, New York, NY.

[5] Dano, M.-L. and Hyer, M.W. (1998),
Thermally-Induced Deformation Behavior of
Unsymmetric Composite Laminates, *International Journal of Solids and Structures*,
vol. 35(17), pp. 2101-20.

[6] Gigliotti, M., Wisnom, M.R. and Potter, K.D. (2003). Loss of bifurcation and multiple shapes of thin [0/90] unsymmetric composite plates subject to thermal stress, *Composites Science and Technology*, vol. 64, January 2004, pp. 109-128.

[7] Tawfik, S.A. (2008). Stability and MorphingCharacteristics of Bistable Composite Laminates,Ph.D. Dissertation, Aerospace Engineering,Georgia Institute of Technology, Georgia.

[8] Aimmanee, S. and Hyer, M.W. (2006). A Comparison of Deformations of Various Piezoceramic Actuators, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 17, February 2006, pp. 167-186.