

การวิเคราะห์ค่าความเข้มของความเค้นเชิงกลาริตีรอบจุดมุมของรอยต่อวัสดุ 2 ชนิด โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

(Analysis for Intensity of Stress Singularity around Singularity Corner by 3D FEM)

กิตติศักดิ์ ทวีรัตนผล และ อรรถพร วิเศษสินธุ์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เลขที่ 50 ถนนพหลโยธิน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

ติดต่อ: โทรศัพท์: 02-942-8555 ต่อ 1861

E-mail: fengapw@ku.ac.th, kuroro_lucifers@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการหาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณเชิงกลาริตี (Intensity of Stress Singularity) รอบบริเวณจุดมุมของรอยต่อวัสดุ 2 ชนิดที่เชื่อมต่อกันแบบอุดมคติ โดยวัสดุ 2 ชนิดนั้นมีคุณสมบัติสมบัติความยืดหยุ่นแบบออสติคที่แตกต่างกันมากเช่นวัสดุที่แข็งมากกับวัสดุที่ยืดหยุ่นได้ดี ซึ่งมักก่อให้เกิดความเค้นสูงบริเวณรอยต่อและมีโอกาสที่จะเกิดความเสียหาย ขั้นแรกหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความยาวรัศมีจากจุดเชิงกลาริตีโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method, FEM) และคำนวณค่าระดับความรุนแรงของความเค้นเชิงกลาริตีจากการวิเคราะห์ค่าไอเกน จากนั้นนำความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านี้มาใช้ในการประมาณค่าความเข้มของความเค้นบริเวณเชิงกลาริตี ค่าความเข้มของความเค้นบริเวณเชิงกลาริตีที่ได้จากการศึกษานี้ มีความสอดคล้องกันกับความเข้มของความเค้นบริเวณเชิงกลาริตีที่ได้จากการประมาณค่าโดยวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ (Boundary Element Method, BEM) ค่าความเข้มของความเค้นบริเวณเชิงกลาริตีนี้สามารถนำมาใช้กำหนดค่าคุณสมบัติวัสดุที่เหมาะสมสำหรับนำไปใช้งาน หรือกำหนดค่าความเข้มของความเค้นบริเวณเชิงกลาริตีขอบเขตเพื่อที่จะควบคุมไม่ให้ชิ้นงานพัง และก่อให้เกิดความเสียหายได้

คำหลัก: ความเข้มของความเค้นเชิงกลาริตี ไฟไนต์เอลิเมนต์ จุดต่อวัสดุ 2 ชนิดแบบ 3 มิติ

Abstract

In the present paper, an intensity of stress singularity around the corner of bi-material joint is determined. Two materials have the large different of Young's modulus that cause high stress and potential damage. At first, the relationship between stress and length of radius away from the singular point is determined using FEM. Next, the order of stress singularity is determined through an eigen analysis. Then, the relationship of these variables uses to estimate the intensity of stress singularity. The intensity of stress singularity in this study is compared with the intensity of stress singularity which is determined using BEM. The intensity of stress singularity can be used to determine the material properties or limited the intensity of stress singularity to control damage.

Keywords: Intensity of Stress Singularity, Finite Element Method, 3D bi-material Joints

1. บทนำ

ค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตี (Intensity of stress singularity) เป็นค่าที่ใช้บอกค่าความเข้มของความเค้นบนพื้นที่เล็ก ๆ ที่มีความเค้นสูง ซึ่งพื้นที่ไหนที่มีค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีสูง ๆ พื้นที่นั้นก็คือพื้นที่ที่มีโอกาสเกิดความเสียหายนั่นเอง บริเวณที่มักจะมีค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีสูง ๆ ส่วนใหญ่จะเป็นบริเวณที่มีการเชื่อมต่อกันของวัสดุที่มีคุณสมบัติต่างกันมาก ๆ หรือบริเวณมุมรอยต่อของวัสดุที่มีรัศมีความโค้งน้อย

ในอดีตได้มีการศึกษาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีไว้มากมาย เช่น William [1-4] ได้ใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขในการหาค่าความเค้นซิงกูลาริตีในรอยบากรูปลิ้นที่ยาวมาก ๆ และนำข้อมูลที่ได้อามาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์การกระจายตัวของความเค้นแถวจุดปลายของรอยแตก ต่อมา Zak และ William [5] ใช้ไอเกนฟังก์ชันวิเคราะห์ความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีที่ปลายของรอยแตกที่ตั้งฉากกับพื้นผิวรอยต่อของชิ้นงานที่มีวัสดุสองชนิดมาประกอบกัน พบว่าค่าไอเกนจะอยู่ในช่วง 0 ถึง 1 ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของการกระจายตัวของความเค้นและระดับความเค้นซิงกูลาริตีของรอยแตก

Aksentian [6] หาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ที่จุดซิงกูลาบนจุดมุมของชิ้นงานที่มีวัสดุต่างชนิดมาประกอบกันในรูปแบบ 3 มิติ โดยที่คุณสมบัติของวัสดุนั้นต่างกัน Bogy และ Wang [7-8] ได้วิเคราะห์ปัญหาการรอยต่อของชิ้นงานที่มีคุณสมบัติวัสดุต่างกันมาประกอบกันบนแผ่นเรียบ โดยได้ทดสอบภายใต้แรงดึง พบว่าระดับความเค้นซิงกูลาริตีขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติของวัสดุและองศาจากรอยต่อที่เข้าไปในชิ้นงาน

Kawai, Fujitani และ Kobayashi [9] ได้วิเคราะห์ค่าความเค้นที่รอยแตกรูปทรงกลวยโดยประยุกต์วิธีของวิลเลียมมาใช้ในการแก้ปัญหาการรอยแตก 3 มิติ โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขมา

วิเคราะห์ค่าไอเกนของรอยแตกรูปทรงกลวย Kawai, Fujitani และ Kumagai [10] ได้ศึกษาความเค้นซิงกูลาริตีของรอยแตกใน 3 มิติโดยเฉพาะพฤติกรรมของรอยแตกที่เป็นเส้นตรงจากจุดเริ่มต้นไปจนถึงจุดสิ้นสุด Bazent กับ Estenssoro [11] และ Yamada กับ Okumura [12] ได้พัฒนาการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแก้สมการหาค่าไอเกนโดยตรง เพื่อหาระดับความเค้นซิงกูลาริตีและการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของความเค้นและระยะรัศมีต่อความยาว การวิเคราะห์ไอเกนนี้ถูกนำมาใช้หาค่าระดับซิงกูลาริตีที่จุดบนรอยแตกของแผ่นวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน

ต่อมา Pageau, Joseph และ Biggers [14] ได้ประยุกต์การวิเคราะห์ไอเกนจากไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์รอยต่อบนแผ่นเรียบของวัสดุที่มีคุณสมบัติต่างกัน ค่าความเค้นและค่ารัศมีต่อความยาวหาจากการกำหนดค่าไอเกนจากส่วนจริง และส่วนเชิงซ้อนของระดับความเค้นซิงกูลาริตี Pageau และ Biggers [15] ได้หาระดับความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีและการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมและความเค้นรอบจุดซิงกูลาในรอยต่อของชิ้นงาน 3 มิติที่มีคุณสมบัติวัสดุต่างกัน โดยใช้สมมติฐานแผ่นความเครียด 2 มิติ

Koguchi [16] ได้ตรวจสอบค่าระดับความเค้นซิงกูลาริตีที่จุดมุมและบนเส้นความเค้นซิงกูลาริตีระหว่างวัสดุสองชนิดที่มีคุณสมบัติต่างกัน โดยใช้การวิเคราะห์ค่าไอเกน ส่วนการกระจายตัวของความเค้นรอบจุดมุมหาได้โดยวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ Koguchi [17] ได้ประมาณค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีจากความเค้นที่ได้จากวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square method)

Attaporn และ Koguchi [18-19] ได้หาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีโดยใช้วิธีเอนริชไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3D-Enriched FEM) ซึ่งเป็นวิธีที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อหาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีได้โดยตรงจากการ

คำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์และสามารถลดจำนวนเอลิเมนต์ลงจากการใช้เอลิเมนต์แบบละเอียดในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปโดยใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่แต่สามารถประมาณค่าได้ใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด โดยการเพิ่มความซับซ้อนของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

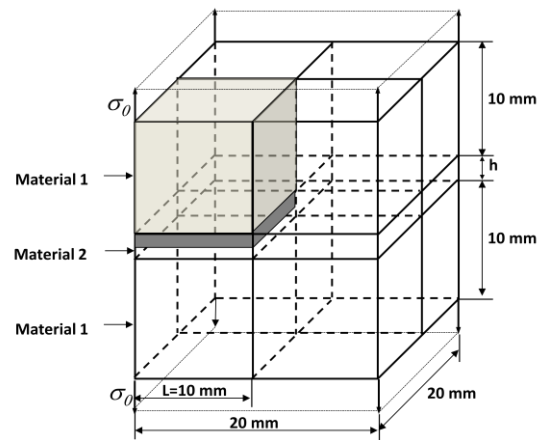
การหาผลเฉลยของค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีโดยวิธีต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาข้างต้นนั้นเป็นการหาผลเฉลยในสมมุติฐานที่วัสดุมีค่าสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น (Young's modulus) แบบอิลาสติกเท่านั้น แต่ไม่สามารถที่จะหาผลเฉลยแบบอิลาสติกและพลาสติกพร้อมกันได้เนื่องจากเมื่อวัสดุใด ๆ เกิดการขยายตัวมากค่าวัสดุจะเข้าสู่ช่วงพลาสติกซึ่งใน 1 วัสดุจะมีค่าสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นแบบพลาสติกหลายค่าขึ้นอยู่กับค่าเคลื่อนตัวในบริเวณนั้น ๆ ซึ่งไม่สามารถใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ได้เพราะวิธีนี้มีเอลิเมนต์เฉพาะที่ผิวนอกไม่มีเอลิเมนต์ภายในที่จะกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นที่แตกต่างกันในแต่ละเอลิเมนต์ได้

ในบทความฉบับนี้ได้ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดประมาณค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีจากความเค้นซึ่งคำนวณมาจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แบบจำลองบริเวณซิงกูลาริตีที่ใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กกระจายเข้าไปจนเป็นรูปของชิ้นงานทำให้มีความละเอียดมาก แบบจำลองนี้สามารถทำให้มีความละเอียดได้ถึง 0.1 ไมครอน ส่วนแบบจำลองในอดีตมีความละเอียดได้เพียง 0.1 มิลลิเมตรเท่านั้น ซึ่งแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีเอลิเมนต์กระจายเข้าไปในชิ้นงานนี้สามารถใช้เป็นต้นแบบในการวิเคราะห์หาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีของวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบอิลาสโต-พลาสติกได้ โดยเอลิเมนต์ภายในแบบจำลองจะสามารถหาค่าคุณสมบัติของสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นแบบอิลาสติกและพลาสติกในแต่ละเอลิเมนต์ได้ซึ่งจะทำการวิจัยต่อไปในอนาคต

2. แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไข

ขอบเขต

แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นแบบจำลอง 3 มิติที่มีวัสดุสองชนิดมาเชื่อมต่อกัน โดยวัสดุชนิดที่ 2 อยู่ระหว่างวัสดุชนิดที่ 1 ที่ประกบด้านบนและด้านล่างดังแสดงไว้ในรูปที่ 1 วัสดุชนิดที่ 1 มีค่าสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นมากกว่าวัสดุชนิดที่ 2 โดยค่าคุณสมบัติของวัสดุแสดงไว้ในตารางที่ 1



รูปที่ 1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

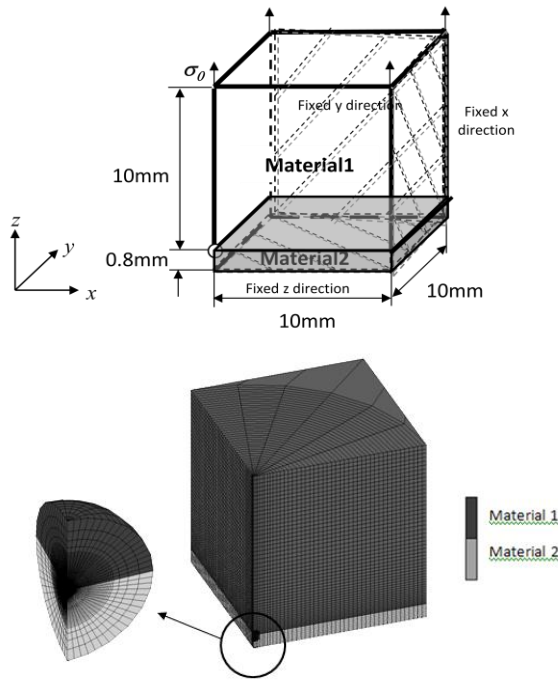
ตารางที่ 1 คุณสมบัติของวัสดุ

Material	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio
1	215	0.28
2	2.97	0.38

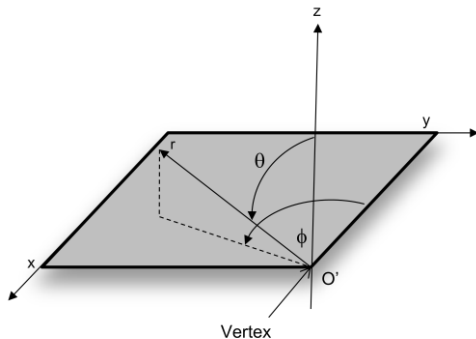
แบบจำลองจะถูกดึงด้วยแรงภายนอก ($\sigma_0=1$) บนพื้นผิวด้านบนและด้านล่าง แต่เนื่องจากแบบจำลองมีความสมมาตร ในการวิเคราะห์จะใช้แบบจำลองเพียง 1 ใน 4 ของแบบจำลองทั้งหมดแล้วยึดด้านไว้ทั้ง 3 ด้านจากนั้นจะใส่แรงดึงด้านบนเพียงด้านเดียวซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 2 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สร้างจากแบบจำลองแผ่นเรียบ 2 มิติกระจายเข้าไปตามแนวมุม ϕ โดยมีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 6000 เอลิเมนต์ใน



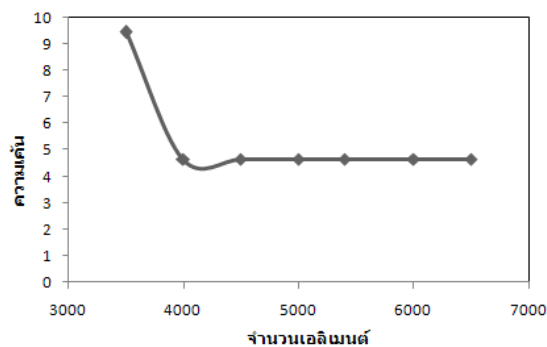
แบบจำลองแผ่นเรียบ เนื่องจากผลลัพธ์ของค่าความเค้นที่ได้มีค่าเข้าสู่ค่าคงที่ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 2 แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์และค่าเงื่อนไขขอบเขต



รูปที่ 3 แสดงระบบพิกัดของมุม θ และ ϕ



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเอลิเมนต์กับความเค้น

3. การวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์

3.1 วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกสร้างขึ้นในรูปของค่าการเคลื่อนตัวตามชนิดของเอลิเมนต์ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้เอลิเมนต์ชนิดทรง 6 หน้า (Hexahedron Element) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติที่ใช้จึงเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทรง 6 หน้าปกติ[13] ซึ่งแสดงในสมการที่ (1)

$$u_i = \sum_{n=1}^8 N_n \bar{u}_{in} \quad (1)$$

โดยค่า u_i คือค่าการเคลื่อนตัว N_n คือฟังก์ชันการประมาณภายในของจุดต่อ $\bar{u}_{in}$ คือค่าการเคลื่อนตัวของจุดต่อ n คือลำดับที่ของจุดต่อ

ค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีสามารถหาได้จากสมการที่แสดงดังนี้ [19]

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0} = K_{\theta\theta 0} + K_{\theta\theta 1} \left(\frac{r}{L}\right)^{-\lambda} + K_{\theta\theta 2} \ln\left(\frac{r}{L}\right) + K_{\theta\theta 3} \ln\left(\frac{r}{L}\right)^2 \quad (2)$$

โดยค่า $K_{\theta\theta n}$ คือค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตี n คือค่าคงที่ของผลเฉลยของตัวไม่ทราบค่า $K_{\theta\theta}$ มีค่าจาก 0 ถึง 3 $\sigma_{\theta\theta}$ คือค่าความเค้นตั้งฉากกับแนวแกน θ σ_0 คือความเค้นดึงกระทำบนระนาบด้านบนและด้านล่างของแบบจำลอง r คือรัศมี L คือความกว้างแบบจำลอง λ คือค่าระดับความรุนแรงของความเค้นซิงกูลาริตี (The order of Stress Singularity) โดยหาได้จากการวิเคราะห์ค่าไอเกน โดยค่าไอเกนคือค่าผลเฉลยจากการวิเคราะห์รอบจุดต่อของวัสดุที่มีคุณสมบัติเชิงกลที่แตกต่างกันมาต่อดัดกัน ค่าไอเกนจะมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 ค่าไอเกนสามารถหาได้จากสมการที่แสดงต่อไปนี้ [19]

$$(p^2[\tilde{A}] + p[\tilde{B}] + [\tilde{C}])\{U\} = 0 \quad (3)$$

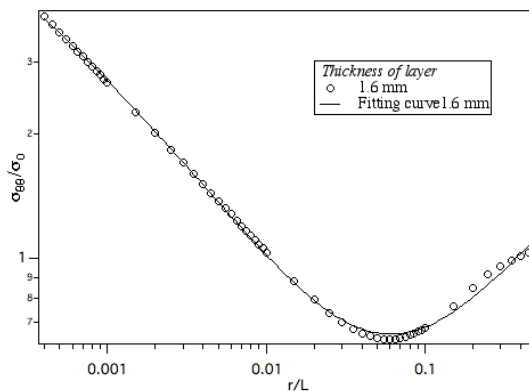
โดยที่ p คือค่าไอเกน $[A]$, $[B]$ และ $[C]$ เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าคุณสมบัติอีลาสติก $\{U\}$ คือค่าเมทริกซ์ของการเคลื่อนตัว

ค่าไอเกนที่ใช้ในการวิจัยนี้ได้ใช้ค่าไอเกนที่ Attaporn [18-19] ได้ใช้ในการวิจัยหาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ค่าไอเกนที่ใช้ในการวิจัยเป็นค่าไอเกน ณ จุดมุมของรอยต่อ ดังแสดงในตารางที่ 2 ค่าระดับความรุนแรงของความเค้นซิงกูลาริตี (λ) หาได้จากความสัมพันธ์ $\lambda = 1 - p$

ตารางที่ 2 ค่าไอเกนและระดับความเค้นซิงกูลาริตีของจุดมุมรอยต่อ

P		λ	
Real	Imaginary	Real	Imaginary
0.6018	0.0000	0.3982	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3.2 วิธีทางบาวนด์รีเอลิเมนต์



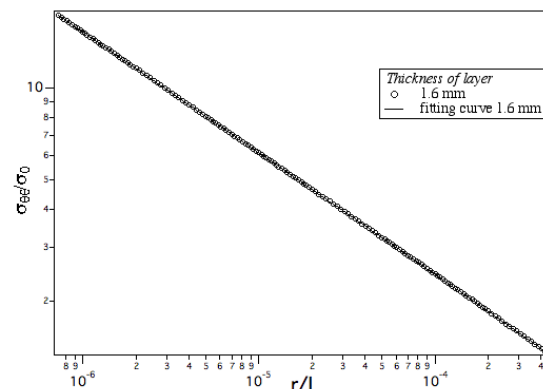
รูปที่ 5 การกระจายความเค้น $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ ต่อ r/L โดยวิธี BEM ที่จุดมุม $\theta = 90^\circ$ และ $\phi = 45^\circ$ ความหนา (h) เท่ากับ 1.6 มิลลิเมตร

จากงานวิจัยค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีของ Koguchi [17] เมื่อนำค่าความเค้นที่

ได้จากวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์มาประมาณค่าความเค้นโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะได้ค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีที่บริเวณจุดมุมของรอยต่อประมาณ 0.06185 แสดงในรูปที่ 5

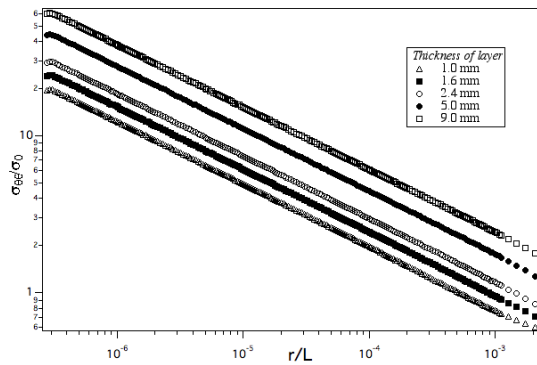
4. ผลการวิจัย

จากการวิจัยครั้งนี้ค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีที่ได้จากการประมาณค่าความเค้นที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ความหนา (h) 1.6 มิลลิเมตร มีค่าเท่ากับ 0.06161 ดังแสดงในรูปที่ 6 จะพบว่าค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีที่ได้จากการประมาณค่าความเค้นโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กับค่าที่ได้จากการประมาณค่าความเค้นของบาวนด์รีเอลิเมนต์มีค่าใกล้เคียงกัน โดยมีความคลาดเคลื่อนเพียง 0.38% เท่านั้น

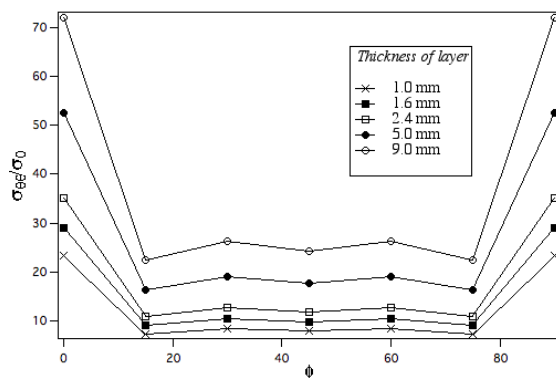


รูปที่ 6 การกระจายความเค้น $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ ต่อ r/L โดยวิธี FEM ที่จุดมุม $\theta = 90^\circ$ และ $\phi = 45^\circ$ ความหนา (h) เท่ากับ 1.6 มิลลิเมตร

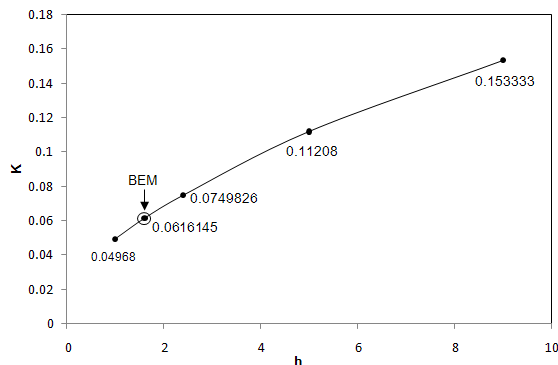
หลังจากที่ได้ความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีแล้ว งานวิจัยนี้ได้ทำการเพิ่มความหนาของชั้นวัสดุชนิดที่ 2 การกระจายความเค้นของความหนาต่างๆแสดงไว้ในรูปที่ 7 และได้ทำการประมาณค่าความเค้นของแต่ละความหนาเพื่อหาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีของแต่ละความหนา



รูปที่ 7 การกระจายความเค้น $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ ต่อ r/L โดย
ปรับขนาดความหนาต่างๆ ที่จุดมุม $\theta = 90^\circ$ และ
 $\phi = 45^\circ$



รูปที่ 8 ความเค้นกับมุม ϕ



รูปที่ 9 ความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีที่จุดมุม $\theta = 90^\circ$ และ $\phi = 45^\circ$ ตามความหนา
ต่างๆ

จากรูปที่ 7 จะพบว่าเมื่อขนาดความหนาเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเค้นเพิ่มขึ้นด้วย จากรูปที่ 8 จะพบว่าค่าความเค้นจะมีค่าสูงที่ขอบรอยต่อของแบบจำลองทั้ง 2 ข้างและความเค้นจะลดลงเมื่อเข้า

ไปยังด้านในของแบบจำลอง จากนั้นหาค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีที่ความหนา (h) ต่างๆ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 9 จะเห็นว่าค่าความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีจะเพิ่มขึ้นเมื่อความหนา(h) เพิ่มขึ้น หรือจะกล่าวคือชิ้นงานจะมีโอกาสพังเสียหายได้ง่ายถ้าชิ้นงานมีความหนาของส่วนเชื่อมติดมากขึ้น

5. สรุป

ในบทความวิจัยนี้ความเค้นที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เมื่อนำค่าความเค้นมาประมาณค่าหาความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีค่าที่ได้จะมีความสอดคล้องกับความเค้นที่ได้จากแบบจำลองทางบาวนอะรีเอลิเมนต์ โดยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์นี้มีความละเอียดมากกว่าแบบจำลองบาวนอะรีเอลิเมนต์และมีเอลิเมนต์ด้านในแบบจำลอง ซึ่งสามารถนำไปพัฒนาแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาความเข้มของความเค้นบริเวณซิงกูลาริตีของวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบอิลาสโต-พลาสติกได้ต่อไป

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Williams M.L., Surface Stress Singularities Resulting From Various Boundary Condition in Angular Corners of Plates under Bending Proceedings, First U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1952, pp. 325-329.
- [2] Williams M.L., Surface Stress Singularities Resulting From Various Boundary Condition in Angular Corners of Plates in Extension, Journal of Application Mechanics, Vol.19, Trans. ASME, Vol. 74, 1952, p. 526.
- [3] Williams M.L., On the Stress at the Base of a Stationary Crack, Journal of

Application Mechanics, Vol. 24, Trans. ASME, Vol. 79, 1957, pp. 109-114.

[4] Williams M.L., The Stress Around a Fault or Crack in Dissimilar Media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 49, April 1959, pp. 199-204.

[5] Zak A.R. and Williams M.L., Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface, Journal of Application Mechanics, Trans. ASME, Brief Notes, March, 1963, pp. 142-143.

[6] Akentian O.K., Singularities of the Stress-Strain State of A Plate in The Neighborhood of An Edge, PMM, Vol.31-1, 1967, pp. 178-186.

[7] Bogy D.B., Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Material and Wedge Angles under Surface Traction, Journal of Application Mechanic, ASME, Vol.38, No.2, June, 1971, pp.377-386.

[8] Bogy D.B. and Wang K.C., Stress Singularities at Interface Corners in Bonded Dissimilar Isotropic Elastic Materials, Int. Journal of Solid Structure, Vol. 7, November, 1971, pp.993-1005.

[9] Kawai T., Fujitani Y. and Kobayashi M., Stress Analysis of the Conical Surface Pit Problem, Proc. Int. Conference of Fracture Mechanic and Technology, Hong Kong, March 1977, Vol.2, pp.1165-1170.

[10] Kawai T., Fujitani Y. and Kumagai K., Analysis of Singularity at the Root of the Surface Crack Problem, Proc. Int. Conference of Fracture Mechanic and Technology, Hong Kong, March 1977, Vol.2, pp.1157-1163.

[11] Bazant Z. P., and Estenssoro L. F., Surface Singularity and Crack Propagation, Int. Journal of Solis Structure, Vol. 15, 1979, pp.405-426.

[12] Yamada Y. and Okumura H., Analysis of Local Stress in Composite Materials by the 3-D Finite Element, In Proc. Japan-U.S.A. Conference (Edited By K. Kawata and T. Akasaka), 1981, pp.55-64.

[13] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., The FINITE ELEMENT METHOD, 4th ed., vol.1, Basic Formulation and Linear Problems, pp.112,133

[14] Pageau S. S., Joseph P. F. and Biggers Jr S. B., Finite Element Analysis of Anisotropic Materials with Singular Inplan Stress Fields, Int. Journal of Solis Structures, Vol. 32, 1995, pp.571-591.

[15] Pageau S. S., Joseph P. F. and Biggers Jr S. B., A Finite Element Approach to Three-Dimensional Singular Stress States in Anisotropic Multi-Material Wedges and Junctions, Int. Journal of Solis Structures, Vol. 33, 1996, pp. 33-47.

[16] Koguchi H., Stress singularity analysis in three-dimensional bonded structure, Int. Journal of Solid Structures, Vol. 34, 1996, pp.461-480

[17] Koguchi H., Stress singularity analysis in three-dimensional bonded structure, Transactions of the JSME, Vol. 72, No. 724-A, 2006, pp. 2058-2065

[18] Attaporn W. and Koguchi H., Intensity of stress singularity at a vertex and along the free edges of the interface in 3D-dissimilar material joints using 3D-enriched FEM, CMES: Computer Modelling in

Engineering and Sciences, Vol.39, No.3,
2009, pp.237-262.

[19] อรรถพร วิเศษสินธ์ และ อีเตะโอะ โคะกุจิ,
การวิเคราะห์ความเข้มของค่าเชิงกลารัตย์ของ
สนามความเค้นในจุดต่อของวัสดุต่างชนิดกัน
โดยวิธีเอนริชไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ, การ
ประชุมทางวิชาการของมหาวิทยาลัยเกษตร
ศาสตร์ครั้งที่ 49, 1-4 กุมภาพันธ์ 2554