

**การวิเคราะห์ค่าอันดับความเค้นอนันต์บริเวณรอยต่อ
ของวัสดุ transversely isotropic materials
Stress singularities analysis in transversely isotropic materials**

มนต์ชัย พงษ์วิไลเลิศ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ จ.ปทุมธานี 12120
E-mail: pmonchai@engr.tu.ac.th, โทรศัพท์: 02 564 3001-9, โทรสาร: 02 564 3010

บทคัดย่อ

เป็นที่ทราบกันดีว่าความเค้นบริเวณรอยต่อของวัสดุชนิด Isotropic material สองชนิดนั้นอยู่ในรูปแบบของความเค้นอนันต์ในฟังก์ชันของ r^λ สำหรับรอยต่อของวัสดุชนิด transversely isotropic materials และวัสดุชนิด isotropic material ความเค้นบริเวณรอยต่อที่ค่าสูงนั้นก่อให้เกิดความเสียหายขึ้นในวัสดุเช่นกัน ค่าอันดับความเค้นอนันต์บริเวณรอยต่อของวัสดุ transversely isotropic material และวัสดุ isotropic material แบบ 3 มิติ ถูกวิเคราะห์ด้วยการเปลี่ยนแปลงค่าคงที่ทางความยืดหยุ่นของวัสดุทั้งสองชนิด (ค่า Poisson's ratio และ ค่า Elastic modulus) และทิศทางของ Fiber orientation ของวัสดุ transversely isotropic materials และสามารถหาสภาวะที่ลดค่าอันดับความเค้นอนันต์บริเวณรอยต่อได้

คำหลัก: transversely isotropic, ความเค้นอนันต์, รอยต่อแบบ 3 มิติ

Abstract

It is well known that stress around the bonded joint of two isotropic materials is in the function of r^λ . For the bonded joint between transversely isotropic material and isotropic material, stress concentration can occur on the interface of the joint. It causes failure of the structure. The order of stress singularities around three-dimensional joint of transversely isotropic material and isotropic material are investigated by varying Poisson's ratio, Elastic modulus and fiber orientation. Finally, the stress singularity is determined for searching the suitable one that creates the lowest order of stress singularity.

Keywords: transversely isotropic, stress singularity, three-dimensional bonded joint

1. บทนำ

หลายปีที่ผ่านมา ค่าอันดับความเค้นอนันต์ (order of stress singularity) บริเวณรอยต่อของวัสดุต่างชนิดกัน ได้ถูกวิเคราะห์โดยนักวิจัยหลายท่าน เพราะความ

เค้นอนันต์นี้เป็น ดัชนีชี้วัดที่แสดงถึงความรุนแรง ที่ทำให้เกิดความเสียหายขึ้นที่บริเวณรอยต่อเนื่องจากการก่อให้เกิดความเข้มข้นของความเค้นที่สูง (stress concentration) ซึ่งเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในโครงสร้างของ

วัสดุในระบบอิเล็กทรอนิกส์ เช่น แผงวงจร IC chip เป็นต้น หรือเกิดขึ้นในอุปกรณ์ที่มีโครงสร้างแบบ composite materials ซึ่งประกอบขึ้นจากวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลและทางความร้อนแตกต่างกัน วัสดุชนิด transversely isotropic materials เช่น ไทเทเนียม (Ti) เป็นที่นิยมในการนำมาใช้ เป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างแบบ composite material เช่น โครงสร้างของอุปกรณ์ที่ต้องการความแข็งแรงเป็นพิเศษ โดยนำไปเชื่อมต่อกับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบ isotropic material เช่น เหล็กกล้า เป็นต้น ความเสียหายส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นของวัสดุชนิด composite material นี้ จะเกิดขึ้นบริเวณรอยต่อเช่นกัน ซึ่งที่ผ่านมางานวิจัยเกี่ยวกับเสถียรภาพและความเค้นอนันต์ที่เกิดขึ้นยังมีไม่แพร่หลายมากนัก

งานวิจัยนี้จึงได้ทำการวิเคราะห์ถึงดัชนีที่ใช้วัดความรุนแรงของความเค้นที่เกิดขึ้นบริเวณรอยต่อของวัสดุชนิด transversely isotropic material กับวัสดุชนิด isotropic material ซึ่งได้แก่ค่าอันดับความเค้นอนันต์บริเวณจุดมุมของรอยต่อ ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของระเบียบวิธีการคำนวณ Finite element โดยได้ทำการเปลี่ยนแปลงค่าคงที่ทางความยืดหยุ่นในระนาบสมมาตรของวัสดุแบบ transversely isotropic material ซึ่งได้แก่ ค่า Poisson's ratio และ ค่า Elastic modulus และยังได้เปลี่ยนแปลงค่าของทิศทางการเรียงตัวของ Fiber orientation เพื่อที่จะหาสถานะที่สามารถลดค่าความรุนแรงของความเค้นที่เกิดขึ้นได้

2. ระเบียบวิธีการคำนวณ

วัสดุชนิด transversely isotropic materials นั้นเป็นวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันในระนาบหนึ่ง และจะมีคุณสมบัติทางกลที่เปลี่ยนแปลงไปในทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบนั้น ซึ่งสามารถกำหนดคุณสมบัติด้วยค่าคงที่ทางความยืดหยุ่นของวัสดุ 5 ค่า (แทนที่จะเป็น 9 ค่าเช่นในกรณีของวัสดุชนิด orthotropic material) ค่าคงที่ทางความยืดหยุ่นทั้ง 5 ค่า ได้แก่ Young's modulus และค่า Poisson's ratio ในระนาบสมมาตร x-y (E_p และ ν_p) ค่า Young's modulus

และค่า Poisson's ratio ในแกน Z (E_z และ ν_{pz}) และค่า shear modulus ในทิศทางแกน z (G_{pz}) ซึ่งสามารถเขียน เมตริกซ์ของความแข็งแรง (Stiffness Matrix) ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = [c_{ij}](\epsilon)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1 - \nu_{pz} \nu_{zp}}{E_p E_z \Delta} \\ c_{12} &= \frac{\nu_p + \nu_{zp} \nu_{pz}}{E_p E_z \Delta} \\ c_{13} &= \frac{\nu_{zp} + \nu_p \nu_{zp}}{E_p E_z \Delta} \\ c_{21} &= \frac{\nu_p + \nu_{zp} \nu_{pz}}{E_p E_z \Delta} \\ c_{22} &= \frac{1 - \nu_{pz} \nu_{zp}}{E_p E_z \Delta} \\ c_{23} &= \frac{\nu_{zp} + \nu_p \nu_{zp}}{E_p E_z \Delta} \\ c_{31} &= \frac{\nu_{pz} + \nu_p \nu_{pz}}{E_p^2 \Delta} \\ c_{32} &= \frac{\nu_{pz} (1 + \nu_p)}{E_p^2 \Delta} \\ c_{33} &= \frac{1 - \nu_p^2}{E_p^2 \Delta} \\ c_{44} &= c_{55} = 2G_{zp} \\ c_{66} &= \frac{E_p}{1 + \nu_p} \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$\Delta = \frac{(1 + \nu_p)(1 - \nu_p - 2\nu_{pz} \nu_{zp})}{E_p^2 E_z} \quad \frac{\nu_{pz}}{E_p} = \frac{\nu_{zp}}{E_z}$$

ในขณะที่ ค่า C_{ij} อื่นๆ นั้นเท่ากับศูนย์

สำหรับระเบียบวิธี FEM ค่าองค์ประกอบความเค้นบริเวณรอบจุดมุมรอยต่อแบบ 3 มิติสามารถเขียนอยู่ในรูปของ asymptotic series ในกรณีของค่าอันดับความเค้นอนันต์เป็นจำนวนจริง [1] ดังนี้

$$\sigma_{kl} = \sum_{j=1} r^{\lambda_j} F_{kl}^j(\phi, \theta, \lambda_j) \quad (1)$$

โดยใช้ทฤษฎีของงานเสมือน ค่า eigen value, p , ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

$$(p^2[A] + p[B] + [C])\{U\} = 0 \quad (2)$$

จะมีค่าเท่ากับ

$$\lambda = p - 1$$

ซึ่งค่า λ คือ ค่าอันดับความเค้นอนันต์

เมตริกซ์ $[A]$ $[B]$ และ $[C]$ ประกอบด้วยค่าเมตริกซ์ของความแข็งแรง ซึ่งต้องคำนวณสำหรับแต่ละจุด node เนื่องจากค่าเมตริกซ์นี้อ้างอิงกับแกนระบบ xyz ดังนั้นสำหรับค่าเมตริกซ์นี้ในระบบแกน Spherical coordinate system ดังนี้

$$C'_{mnop} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} C_{ijkl}$$

โดยที่

$$a_{11} = \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$a_{12} = \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$a_{13} = \cos(\theta)$$

$$a_{21} = \cos(\theta) \cos(\phi),$$

$$a_{22} = \cos(\theta) \sin(\phi),$$

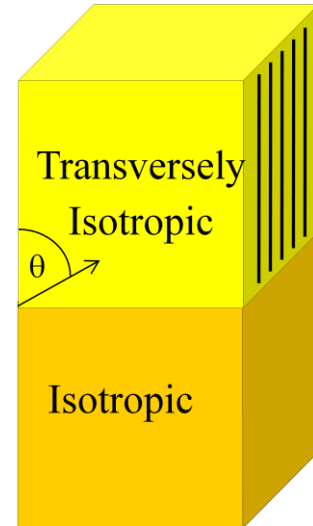
$$a_{23} = -\sin(\theta)$$

$$a_{31} = -\sin(\phi),$$

$$a_{32} = \cos(\phi),$$

$$a_{33} = 0$$

ซึ่งทำให้สามารถหาเมตริกซ์ความแข็งแรงของวัสดุ transversely isotropic material ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางของ fiber orientation ได้



รูปที่ 1 รอยต่อของวัสดุชนิด transversely isotropic material และ isotropic material

3. ผลการวิเคราะห์

รอยต่อแบบ 3 มิติ ของวัสดุชนิด transversely isotropic material และ isotropic material แสดงดังรูปที่ 1 จะถูกนำมาพิจารณาค่าอันดับความเค้นอนันต์บริเวณจุดมุมของรอยต่อ โดยกำหนดให้คุณสมบัติทางกลของวัสดุ isotropic material (E_{iso} และ ν_{iso}) คงที่ แต่ เปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางกลของวัสดุ transversely isotropic material ได้แก่ค่า E_p ν_p E_z ν_{pz} และ G_{pz} และทิศทางของ fiber orientation

กรณีที่ 1. กำหนดให้วัสดุ transversely isotropic material มีคุณสมบัติ ดังนี้

$$E_z = 0.1E_{iso} \text{ ถึง } 1.6E_{iso}$$

$$E_p = E_{iso}$$

$$\nu_p = \nu_{iso} = \nu_{pz} = 0.3$$

$$G_{zp} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)}$$

โดยที่ค่าของ ν_{zp} นั้นจะต้องอยู่ในช่วงที่เป็นไปได้สำหรับวัสดุทั่วไปคือ $0 < \nu_{zp} < 0.5$ จากผลการวิเคราะห์พบว่า ค่าอันดับความเค้นอนันต์นั้นมีค่าประมาณศูนย์ ซึ่งหมายความว่า จะไม่เกิดความเค้นอนันต์ในลักษณะของเทอม r^λ เกิดขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าถึงแม้มีการเปลี่ยนแปลงความแข็งแรงของวัสดุตามแนวของ fiber นั้นคือค่า E_z นั้นไม่ส่งผลกระทบมากนักที่จะก่อให้เกิดความเค้นอนันต์ ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าอันดับความเค้นอนันต์ เมื่อ $\nu_{pz} = 0.3$

E_z	p	λ
$1.6E_{iso}$	0.9993	≈ 0
$1.0E_{iso}$	1.0000	≈ 0
$0.5E_{iso}$	0.9994	≈ 0
$0.1E_{iso}$	0.9994	≈ 0

ตารางที่ 2 ค่าอันดับความเค้นอนันต์ เมื่อ $\nu_{pz} = 0.2$

E_z	p	λ
$2.4E_{iso}$	0.9883	-0.0117
$2.0E_{iso}$	0.9916	-0.0084
$1.0E_{iso}$	0.9999	≈ 0
$0.1E_{iso}$	0.9999	≈ 0

ตารางที่ 3 ค่าอันดับความเค้นอนันต์ เมื่อ $\nu_{pz} = 0.1$

E_z	p	λ
$4.9E_{iso}$	0.9605	-0.0395
$2.4E_{iso}$	0.9856	-0.0144
$1.7E_{iso}$	0.9973	-0.0027
$1.0E_{iso}$	0.9999	≈ 0
$0.5E_{iso}$	0.9999	≈ 0
$0.1E_{iso}$	0.9999	≈ 0

ตารางที่ 4 ค่าอันดับความเค้นอนันต์ เมื่อ $E_p = 10E_{iso}$

E_z	p	λ
$16E_{iso}$	0.7303	-0.2697
$10E_{iso}$	0.7472	-0.2528
$5E_{iso}$	0.7777	-0.2223
$1E_{iso}$	0.8712	-0.1288

โดยการวิเคราะห์นี้ใช้ 50 element และ 181 node ซึ่งเมื่อเทียบกับผลที่ได้จากการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 200 element และ 661 node พบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมาก

กรณีที่ 2. กำหนดให้วัสดุ transversely isotropic material มีคุณสมบัติ ดังนี้

$$E_z = 0.1E_{iso} \text{ ถึง } 2.4E_{iso}$$

$$E_p = E_{iso}$$

$$\nu_p = \nu_{iso} = 0.3, \nu_{pz} = 0.2$$

$$G_{zp} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)}$$

ซึ่งค่าของ ν_{pz} ได้เปลี่ยนแปลงเป็น 0.2 พบว่าเมื่อค่า $E_z = 2.4E_{iso}$ ค่า λ เท่ากับ -0.0117 ซึ่งทำให้เกิดความเค้นอนันต์ในรูปแบบของ r^λ ขึ้น ดังตารางที่ 2

กรณีที่ 3. กำหนดให้วัสดุ transversely isotropic material มีคุณสมบัติ ดังนี้

$$E_z = 0.1E_{iso} \text{ ถึง } 4.9E_{iso}$$

$$E_p = E_{iso}$$

$$\nu_p = \nu_{iso} = 0.3, \nu_{pz} = 0.1$$

$$G_{zp} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)}$$

ซึ่งค่าของ ν_{pz} ได้เปลี่ยนแปลงเป็น 0.1 พบว่าเมื่อค่า $E_z = 4.9E_{iso}$ ค่า λ เท่ากับ -0.0395 ซึ่งทำให้เกิดความเค้นอนันต์ในรูปแบบของ r^λ ขึ้น ดังตารางที่ 3

เมื่อพิจารณาผลการเปลี่ยนแปลงค่า Poisson's ratio ν_{pz} พบว่า เมื่อค่า ν_{pz} ลดลง จะทำให้สามารถเพิ่มค่า E_z ได้มากขึ้น โดยที่กำหนดให้ค่าของ ν_{zp} นั้นอยู่ในช่วงที่เป็นไปได้ คือ $0 < \nu_{zp} < 0.5$ สำหรับวัสดุทั่วไป ส่งผลให้เกิดความแตกต่างด้านคุณสมบัติในทิศทางตามแกน z เมื่อเทียบกับคุณสมบัติในทิศทางของระนาบสมมาตรมากขึ้น ดังนั้นจึงทำให้ค่าอันดับความเค้นอนันต์มีค่าติดลบมากขึ้นด้วย อย่างไรก็ตามในกรณีของค่า $E_z \leq 1.0E_{iso}$ นั้นการเปลี่ยนแปลงค่า ν_{pz} ไม่ส่งผลกระทบต่ออันดับความเค้นอนันต์

กรณีที่ 4. กำหนดให้วัสดุ transversely isotropic material มีคุณสมบัติ ดังนี้

$$E_z = 1.0E_{iso} \text{ ถึง } 16.0E_{iso}$$

$$E_p = 10.0E_{iso}$$

$$\nu_p = \nu_{iso} = 0.3, \nu_{pz} = 0.3$$

$$G_{zp} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)}$$

ค่าของ E_p นั้นมากกว่าค่า E_{iso} ถึง 10 เท่า ส่งผลให้ค่าอันดับความเค้นอนันต์มีค่าสูงมาก เมื่อเทียบกับกรณีอื่นๆ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอิทธิพลของความแตกต่างของค่า Young's modulus ในระนาบสมมาตร x-y ของวัสดุ transversely isotropic กับค่า Young's modulus ของวัสดุ isotropic material นั้น ส่งผลต่อค่าอันดับความเค้นอนันต์อย่างชัดเจนและมีนัยสำคัญ ดังตารางที่ 4

กรณีที่ 5. กำหนดให้วัสดุ transversely isotropic material มีคุณสมบัติ ดังนี้

$$E_z = 16E_{iso}$$

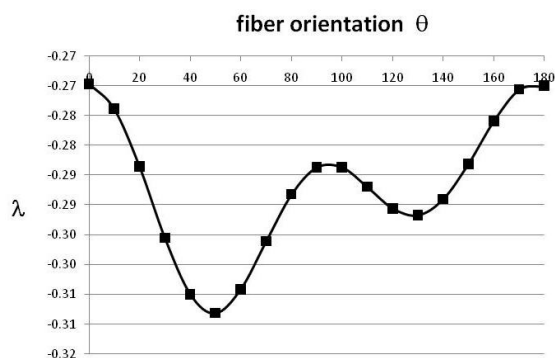
$$E_p = 10E_{iso}$$

$$\nu_p = \nu_{iso} = \nu_{pz} = 0.3$$

$$G_{zp} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)}$$

$$0 \leq \theta \leq 180$$

ได้ทำการเปลี่ยนค่ามุม fiber orientation θ ของวัสดุ transversely isotropic ในช่วง $0 \leq \theta \leq 180$ จากผลการวิเคราะห์พบว่า ค่าอันดับความเค้นอนันต์มีการเปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงทิศทางของ fiber orientation อย่างชัดเจน เมื่อทิศทางของ fiber ทำมุมเอียงกับระนาบรอยต่อประมาณ 45 องศา จะทำให้เกิดอันดับความเค้นอนันต์สูงสุด และจะมีค่าอันดับความเค้นอนันต์ลดลงต่ำสุดเมื่อทิศทางของ fiber นั้นตั้งฉากกับระนาบรอยต่อ ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การเปลี่ยนแปลงของทิศทาง fiber orientation θ

4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้วิเคราะห์ถึงสภาวะความเค้นอนันต์ที่เกิดขึ้นบริเวณรอยต่อแบบ 3 มิติระหว่างวัสดุชนิด transversely isotropic material และวัสดุชนิด isotropic material โดยได้ทำการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุ และทิศทางของ fiber ในวัสดุ ซึ่งพบว่า การเปลี่ยนแปลงค่า Young's modulus ในระนาบสมมาตรของวัสดุ transversely isotropic material และการเปลี่ยนแปลงทิศทางของ fiber นั้นทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของค่าอันดับความเค้นอนันต์บริเวณจุดต่ออย่างชัดเจน โดยที่ค่าของ Young's modulus ในระนาบสมมาตรควรมีค่าใกล้เคียงกับค่า Young's modulus ของวัสดุ isotropic เพราะสามารถลดค่าอันดับความเค้นอนันต์ และทิศทางของ fiber นั้นเมื่อตั้งฉากกับระนาบสมมาตรจะให้อันดับความเค้นอนันต์ที่ต่ำเช่นกัน

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ที่ได้เอื้อให้อำนวยความสะดวกในการทำวิจัย

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] Y.Yamada and H. Okumura, 'Analysis of local stress in composite materials by the 3-D finite element', in K.Kawata and T. Akasaka (eds.), Proc. of the Japan-U.S. Conference, Tokyo, 1981, 1983, p. 55-64.
- [2] S. S. Pageau and S. B. Biggers, Jr., 'Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials', Int. j. numer. Methods eng., 38,2225-2239 (1995).
- [3] H. Koguchi, S. Yamashita, and M. Fujimagari., 'Three-dimensional stress singularity field around a vertex of embedded chip in electronic devices using FEM', Proc. of Interpack'01, Conference, Hawaii, USA, 2001.