การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 24
20-22 ตุลาคม 2553 จังหวัดอุบลราชธานี

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งส่วนยื่นโดยตัวแปรเชิงซ้อน

Vibration Analysis of Overhung Rigid Rotor by Complex Variables

อำนาจ ตงติ๊บ[1], ประสงค์ อิงสุวรรณ[2]

[1,2]ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200
ติดต่อ: โทรศัพท์: (662) 4708309-10, โทรสาร: (662) 8729805,

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอทฤษฎีการเคลื่อนที่ของโรเตอร์เกร็งส่วนยื่นในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อนสำหรับวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งส่วนยื่น โดยไม่คิดผลของความหน่วงหนืด แต่พิจารณาผลของการหน่วงจากไจโรสโคปิค จากหลักการของนิวตันและตัวแปรเชิงซ้อน หาสมการการเคลื่อนที่, ค่าไอเก้นและไอเก้นเวกเตอร์จากรูปแบบของตัวแปรเชิงซ้อนซึ่งแสดงทั้งขนาดและทิศทางในระนาบที่ตำแหน่งแบริงทั้งสองข้าง และยังสามารถทำนายรูปร่างการสั่นสะเทือนในรูปแบบต่างๆ คือ การหมุนวนในแบบทิศตามและการหมุนวนในแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์ อีกทั้งยังแสดงกราฟระหว่างความเร็วการหมุนของโรเตอร์เกร็งส่วนยื่นกับค่าไอเก้น ซึ่งในกราฟสามารถทำนายความเร็ววิกฤตของโรเตอร์ได้

คำหลัก*:* การสั่นสะเทือน, โรเตอร์เกร็งส่วนยื่น, ตัวแปรเชิงซ้อน

Abstract

This paper shows equation of motion of overhung rigid rotor by complex variables. Which is therefore very convenient in vibration analysis of overhung rigid rotor.The damping of oil film bearing is neglected but only the damping of gyroscopic effect is interested. By using Newton's theory to find dynamic equation, eigen-value and eigen-vector in complex variable form, the results can show magnitudes and directions in planes of end rotor at bearings and can be predicted the directional oscillation in forward and backward mode. The running speed map can be showed the operating speeds with eigen-value which can be predicted the critical speed of the system.

Keywords*:* Vibration, Overhung rigid rotor, Complex variable

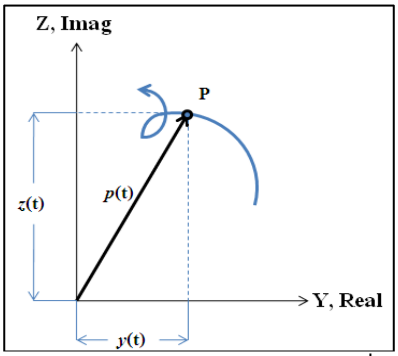
1. บทนำ

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์จะพิจารณาการเคลื่อนที่ในระนาบโดยที่ส่วนของจำนวนจริง และ จำนวนจินตภาพในตัวแปรเชิงซ้อนโดยสามารถอธิบายตำแหน่งของจุดบนระนาบของการเคลื่อนที่ได้ นอกจากนั้นยังสามารถบอกทิศทางการเคลื่อนที่ได้ โดยมีนักวิจัยหลายๆท่านได้ศึกษาการสั่นสะเทือน ดังเช่น ในปี 1969 Richard [8] ได้ศึกษาการสั่นสะเทือนของโรเตอร์โดยศึกษาความเร็ววิกฤติของโรเตอร์เกร็งบนพื้นที่มีการยืดหยุ่น, ปี 1996 Chen [2] ได้นำเสนอหนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีการสั่นสะเทือน, ปี 1993 Lee และผู้ร่วมวิจัย [7] ได้เริ่มสนใจใช้ตัวแปรเชิงซ้อนในการศึกษาการสั่นสะเทือนของโรเตอร์ ,การตอบสนองจากความถี่ และพัฒนาแนวคิดโดยเสนอการตอบสนองด้านความถี่ที่เกี่ยวกับทิศทาง (directional Frequency Response Function (dFRF) จากแบบจำลองของโรเตอร์, ปี 2000 Y.Kang และผู้ร่วมวิจัย [9] ได้ศึกษาลักษณะเฉพาะของระบบที่มีการส่งผ่านแรงของโรเตอร์แบริงโดยใช้วิธีการคำนวณทางตัวเลขซึ่งได้แสดงผลกระทบของแรงต่อสมการการเคลื่อนที่ของระบบ, จากนั้นในปี 2001,2002 Kessler และ Kim [5]-[6] ได้ศึกษาการสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็ง ที่มีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ตรงกลางโดยใช้ตัวแปรเชิงซ้อนช่วยในการวิเคราะห์, ในปี 2006 ได้มีบทความที่เกี่ยวข้องสองบทความคือ อารยะและเชิดศักดิ์[1]ได้ศึกษาการสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งบนแบริงอ่อนตัว และ David [3] ได้ทำการศึกษาวิธีตรวจสอบการสั่นสะเทือนของโรเตอร์ที่ไม่สมดุล เมื่อความเร็ววิกฤต ซึ่งจะวิเคราะห์หาขนาดมวลที่ไม่สมดุลของโรเตอร์, จากนั้นในปี 2008 Guangchi [4] ได้ศึกษาผลจากการส่งผ่านแรงของเทอร์โบชาร์จ-โรเตอร์ซึ่งมีลักษณะแบบที่มีมวลยื่นออกมาทั้งสองฝั่งจากบทความที่กล่าวมาทั้งหมดจึงเป็นที่มาของบทความนี้ที่ทำการศึกษาวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งส่วนยื่น

จากหลักการของตัวแปรเชิงซ้อนวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งส่วนยื่นที่มีจุดศูนย์กลางมวลอยู่นอกจุดรองรับทั้งสองถูกรองรับที่ปลายสองข้างด้วยแบริงไม่คิดผลของความหน่วงหนืดแต่พิจารณาผลของไจโรสโคปิค ทำให้ได้ผลการนำเสนอประกอบด้วยสมการการเคลื่อนที่และรูปร่างการสั่นสะเทือนในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อนที่แสดงทั้งทิศทางและขนาดในระนาบที่ตำแหน่งแบริงรองรับทั้งสองข้างเคลื่อนที่และยังสามารถบอกลักษณะการเคลื่อนที่ในรูปแบบต่างๆได้ เช่น การเคลื่อนที่แบบหมุนวนในแบบทิศตาม และแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์ นอกจากนั้นยังแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของโรเตอร์กับค่าไอเก้น ซึ่งสามารถบอกความเร็ววิกฤตที่ความเร็วการหมุนของโรเตอร์ได้

2.สมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อน

2.1 ตัวแปรเชิงซ้อนอธิบายการเคลื่อนที่ในระนาบ



รูปที่(1) ตัวแปรเชิงซ้อนในระนาบการเคลื่อนที่

ส่วนของจำนวนจริง และจำนวนจิตภาพในตัวแปรเชิงซ้อน สามารถใช้อธิบายตำแหน่งของจุดบนระนาบของการเคลื่อนที่ได้ซึ่งเป็นข้อดีของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายลักษณะทางกายภาพได้ โดยบอกทั้งขนาดและทิศทางของการเคลื่อนที่ได้ แสดงดังรูปที่ (1) เมื่อพิจารณาระนาบการเคลื่อนที่ที่ขึ้นอยู่กับเวลาของจุด p ซึ่งสามารถระบุด้วยตัวแปร

เชิงซ้อน **p(t)** ที่เป็นเวกเตอร์การขจัดในรูปแบบเชิงซ้อน

$$\boldsymbol{p(t)} = \boldsymbol{y(t)} + j\boldsymbol{z(t)} \quad (1)$$

ขณะที่ $j = \sqrt{-1}$ ถ้า $\boldsymbol{y(t)}$และ $\boldsymbol{z(t)}$เปลี่ยนรูปแบบโดยใช้เอกซ์โพเนนเชียลช่วยในการอธิบาย $\boldsymbol{p(t)}$ เป็น

$$\boldsymbol{p(t)} = P_f \boldsymbol{e^{j\omega t}} + P_b \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \quad (2)$$

ขณะที่ ω เท่ากับ 2¶/T และ T เป็น คาบของการเคลื่อนที่

พิจารณาคำจำกัดความของระนาบเชิงซ้อนเมื่อ P_f และ P_b คือส่วนประกอบของเวกเตอร์, $\boldsymbol{e^{j\omega t}}$คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแสดงลักษณะการหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา, $\boldsymbol{e^{-j\omega t}}$คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแสดงลักษณะการหมุนในทิศตามเข็มนาฬิกา และในสมการที่ (2) เป็นสมการสำหรับการเคลื่อนที่ทั่วไปโดยจะเป็นสมการของวงรีหรือวงกลมซึ่งจะพิจารณาจากขนาดและทิศทางของ P_fและ P_b

2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการการเคลื่อนที่สำหรับกรณีทั่ว ๆไป

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ที่ถูกสร้างขึ้นโดยตัวแปรจริงในรูปแบบสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$[M]\begin{Bmatrix}\{\ddot{\boldsymbol{y}}\}\\\{\ddot{\boldsymbol{z}}\}\end{Bmatrix} + [C]\begin{Bmatrix}\{\dot{\boldsymbol{y}}\}\\\{\dot{\boldsymbol{z}}\}\end{Bmatrix} + [K]\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{y}\}\\\{\boldsymbol{z}\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{f_y}\}\\\{\boldsymbol{f_z}\}\end{Bmatrix} \quad (3)$$

สมการที่แสดงมีขนาดของเมทริกซ์ 4 แถว 4 หลัก เป็นสมการของโรเตอร์เกร็ง โดยที่เมทริกซ์ $[C]$ ประกอบด้วยผลเนื่องจากตัวหน่วงและไจโรสโคปิค

$$[C] = [C^0] + \Omega[G^0] \quad (4)$$

ขณะที่$[C^0]$เป็นผลจากตัวหน่วงเนื่องจากสารหล่อลื่นในแบริง ส่วน $[G^0]$เป็นผลจากตัวหน่วงเนื่องจากไจโรสโคปิค

สมการรูปแบบตัวแปรจริงสามารถเปลี่ยนเป็นตัวแปรเชิงซ้อนจากเมทริกซ์เปลี่ยนรูป $[T]$ดังนี้

$$[T] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}[I] & [I]\\-j[I] & j[I]\end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{y}\}\\\{\boldsymbol{z}\}\end{Bmatrix} = [T]\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{p}\}\\\{\overline{\boldsymbol{p}}\}\end{Bmatrix} \quad (6)$$

สำหรับบทความนี้จะใช้สัญญาลักษณ์บาร์บนตัวแปรแสดงถึงสังยุคของตัวแปรเชิงซ้อน(Complex conjugate) ขณะที่ $[I]$ในสมการที่ (5) เป็นเมทริกซ์หนึ่งหน่วย โดยการใช้ สมการที่ (6) แทนใน สมการที่ (3) และคูณด้วย $[T]^{-1}$ ตลอด จึงได้สมการ

$$[M_c]\begin{Bmatrix}\{\ddot{\boldsymbol{p}}\}\\\{\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}\}\end{Bmatrix} + \Omega[C_c]\begin{Bmatrix}\{\dot{\boldsymbol{p}}\}\\\{\dot{\overline{\boldsymbol{p}}}\}\end{Bmatrix} + [K_c]\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{p}\}\\\{\overline{\boldsymbol{p}}\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{g}\}\\\{\overline{\boldsymbol{g}}\}\end{Bmatrix} \quad (7)$$

ขณะที่ $[M_c] = [T]^{-1}[M][T]$,

$$[C_c] = [T]^{-1}[C][T]\ ,$$

$$[K_c] = [T]^{-1}[K][T]$$

$$\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{g}\}\\\{\overline{\boldsymbol{g}}\}\end{Bmatrix} = [T]^{-1}\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{f_y}\}\\\{\boldsymbol{f_z}\}\end{Bmatrix}$$

สมการที่ (7) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อน นำเสนอโดย Lee [7] สามารถระบุทิศทางของแรงและทิศทางของการเคลื่อนที่ได้ โดยทั่วไปแล้วทั้งแรงและการตอบสนองจะมีส่วนประกอบทิศการหมุนในแบบทิศตามเข็มนาฬิกาและแบบทิศสวนทางกับเข็มนาฬิกา ดังสมการต่อไปนี้

$$\{\boldsymbol{p}\} = \{P_f\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} + \{P_b\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \quad (8)$$

$$\{\boldsymbol{g}\} = \{G_f\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} + \{G_b\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \quad (9)$$

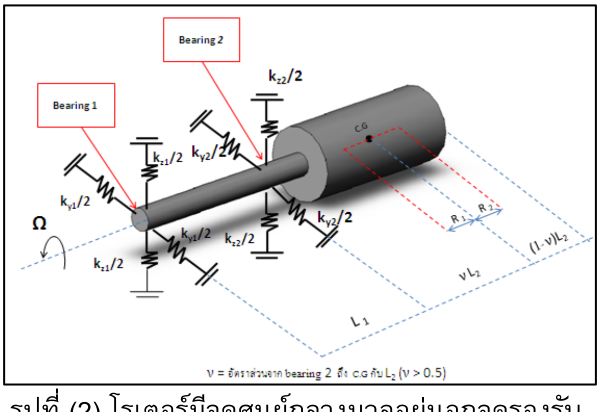
ซึ่งในสมการ (8) เวกเตอร์ $\{P_f\}$และ $\{P_b\}$กำหนดให้เป็นส่วนประกอบของการเคลื่อนแบบหมุนในทิศตรงข้ามกัน และในสมการ (9) เวกเตอร์ $\{G_f\}$และ $\{G_b\}$ กำหนดให้เป็นส่วนประกอบของแรงในทิศตรงข้ามกัน แทนสมการ (8) และ (9) ในสมการ (7) และเลือกพิจารณาเทอม $e^{j\omega t}$ และ $e^{-j\omega t}$ ได้ผลในสองสมการตามลำดับ คือ

$$[-\omega^2[M_c] + j\omega\Omega[C_c] + [K_c]]\begin{Bmatrix}\{P_f\}\\\{\bar{P}_b\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{G_f\}\\\{\bar{G}_b\}\end{Bmatrix} \quad (10)$$

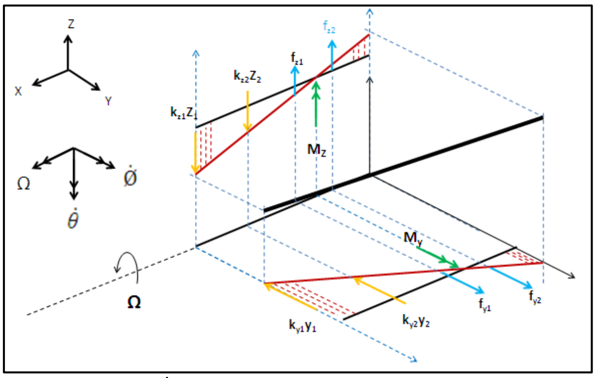
$$[-\omega^2[M_c] - j\omega\Omega[C_c] + [K_c]]\begin{Bmatrix}\{P_b\}\\\{\bar{P}_f\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{G_b\}\\\{\bar{G}_f\}\end{Bmatrix} \quad (11)$$

เนื่องจากทั้งสองสมการสามารถบอกลักษณะเฉพาะของระบบได้เหมือนกันทั้งคู่ จึงเลือกพิจารณาเฉพาะเทอม $e^{j\omega t}$ จากสมการ (10) ซึ่งจะแสดงต่อไป

2.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรเตอร์เกร็งที่มีจุดศูนย์กลางมวลอยู่นอกจุดรองรับทั้งสอง



รูปที่ (2) โรเตอร์มีจุดศูนย์กลางมวลอยู่นอกจุดรองรับทั้งสอง



รูปที่ (3) แผนภูมิอิสระของระบบ

พิจารณาในรูปที่ (2) ที่แสดงในตำแหน่งสมดุลอิสระ โรเตอร์เกร็งมวลเท่ากับ m_r ถูกรองรับด้วยแบริงที่ตำแหน่งปลายทั้งสองข้างมวลเท่ากับ m_{b1} และ m_{b2} มีความยาวเท่ากับ $L = L_1+L_2$ซึ่งจุดศูนย์กลางมวลอยู่นอกจุดรองรับทั้งสอง โรเตอร์หมุนรอบแกนเพลาเท่ากับ Ω จากหลักการของนิวตัน สามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังสมการ (12)

ขณะที่ m คือมวลรวมของระบบมีค่า $m = m_{b1}+m_{b2}+m_r$,J_P คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกนหมุนโดยคิดจากมวลของโรเตอร์เพียงอย่างเดียวและ J_T คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกนตั้งฉากกับแกนหมุนโดยคิดจากมวลของโรเตอร์รวมกับมวลของแบริงทั้งสอง, L_1 คือความยาวจากแบริงที่ 1 ถึงแบริงที่ 2, L_2 คือความยาวจากแบริงที่ 2 ถึงปลายโรเตอร์, v คือ อัตราส่วนจากแบริงที่สองถึงจุดศูนย์กลางมวลกับระยะ L_2 , R_1 และ R_2 คือระยะของแรงที่กระทำบนตัวโรเตอร์ถึงจุดศูนย์กลางมวลที่ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ k_{y1}, k_{z1}, k_{y2}และ k_{z2}คือ ค่าคงที่ของสปริงที่ตำแหน่งแบริงที่ 1 และ 2 ตามลำดับ และ f_{y1}, f_{z1}, f_{y2} และ f_{z2} คือ แรงที่กระทำ ที่ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ซึ่งแรงที่กระทำในระนาบของโรเตอร์โดยส่วนใหญ่จะพิจารณาเนื่องจากแรงที่ไม่สมดุลของโรเตอร์ดังรูป (3)

ซึ่งสมการ (12) เป็นสมการทั่วไปของระบบโรเตอร์เกร็ง ซึ่งพิจารณาผลไจโรสโคปิคแต่ไม่พิจาณาผลของตัวหน่วงเนื่องจากสารหล่อลื่น

$$\begin{bmatrix} -\frac{mvL_2}{L_1} & \frac{m(L_1+vL_2)}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{J_T}{L_1} & -\frac{J_T}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mvL_2}{L_1} & \frac{m(L_1+vL_2)}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{J_T}{L_1} & -\frac{J_T}{L_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{y}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{y}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{z}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{z}}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_P}{L_1} & -\frac{J_P}{L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{J_P}{L_1} & \frac{J_P}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{y}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{z}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{z}}_2 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_{y1} & k_{y2} & 0 & 0 \\ k_{y1}(L_1+vL_2) & k_{y2}(vL_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{z1} & k_{z2} \\ 0 & 0 & k_{z1}(L_1+vL_2) & k_{z2}(vL_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{y_1} + \boldsymbol{f}_{y_2} \\ R_1 \boldsymbol{f}_{y_1} - R_2 \boldsymbol{f}_{y_2} \\ f_{z_1} + f_{z_2} \\ R_1 \boldsymbol{f}_{z_1} - R_2 \boldsymbol{f}_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

โดยที่ แกน z และ y อธิบายการเคลื่อนที่ที่ตำแหน่งปลายของโรเตอร์ทั้งสองข้างจากนั้นทำการเปลี่ยนรูปแบบสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยนำความสัมพันธ์จากสมการที่ (6) แทนค่าลงในสมการที่ (12) และคูณ $[T]^{-1}$ ตลอด ได้รูปแบบของสมการ (7) ดังสมการ (13)

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\boldsymbol{P}}\} \\ \{\ddot{\bar{\boldsymbol{P}}}\} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} -j[C] & [0] \\ [0] & j[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\boldsymbol{P}}\} \\ \{\dot{\bar{\boldsymbol{P}}}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K]^* & [\triangle K]^* \\ [\triangle K]^* & [K]^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{P}\} \\ \{\bar{\boldsymbol{P}}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{g}\} \\ \{\bar{\boldsymbol{g}}\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

โดย

$$[M] = \begin{bmatrix} -\frac{mvL_2}{L_1} & \frac{m(L_1+vL_2)}{L_1} \\ \frac{J_T}{L_1} & -\frac{J_T}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J_P}{L_1} & -\frac{J_P}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$[K^*] = \frac{[K_y]+[K_z]}{2},\ [\triangle K^*] = \frac{[K_y]-[K_z]}{2},$$

$$[K_y] = \begin{bmatrix} k_{y1} & k_{y2} \\ k_{y1}(L_1+vL_2) & k_{y2}(vL_2) \end{bmatrix}$$

$$[K_z] = \begin{bmatrix} k_{z1} & k_{z2} \\ k_{z1}(L_1+vL_2) & k_{z2}(vL_2) \end{bmatrix}$$

จากนั้นทำการดิฟเฟอเรนเชียลสมการ (8) และ (9) แล้วแทนในสมการ (13) เขียนได้ดังสมการ (14)

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2\left[\{P_f\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} + \{P_b\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}}\right] \\ -\omega^2\left[\{\bar{P}_f\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} + \{\bar{P}_b\}\boldsymbol{e^{j\omega t}}\right] \end{Bmatrix}$$

$$+\Omega \begin{bmatrix} -j[C] & [0] \\ [0] & j[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j\omega\left[\{P_f\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} + \{P_b\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}}\right] \\ j\omega\left[\{\bar{P}_f\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} + \{\bar{P}_b\}\boldsymbol{e^{j\omega t}}\right] \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} [K]^* & [\triangle K]^* \\ [\triangle K]^* & [K]^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_f\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} + \{P_b\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\bar{P}_f\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} + \{\bar{P}_b\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \{G_f\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} + \{G_b\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\bar{G}_f\}\boldsymbol{e^{-j\omega t}} + \{\bar{G}_b\}\boldsymbol{e^{j\omega t}} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

จากนั้นเลือกพิจารณาเทอม $\boldsymbol{e^{j\omega t}}$ จึงได้สมการ (15) ซึ่งในสมการนี้ มีเทอมของความถี่รวมอยู่ด้วย

$$\begin{bmatrix} A & B & E_1 & E_2 \\ C_1 & D_1 & F_1 & F_2 \\ E_1 & E_2 & A & B \\ F_1 & F_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{f1} + G_{f2} \\ R_1 G_{f1} - R_2 G_{f2} \\ \bar{G}_{b1} + \bar{G}_{b2} \\ R_1 \bar{G}_{b1} - R_2 \bar{G}_{b2} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

โดย

$$A = \omega^2 \left(\frac{mvL_2}{L_1}\right) + \left(\frac{k_{y1}+k_{z1}}{2}\right),$$

$$B = -\omega^2 m \frac{(L_1+vL_2)}{L_1} + \left(\frac{k_{y2}+k_{z2}}{2}\right),$$

$$C_1 = -\omega^2\left(\frac{J_T}{L_1}\right) + \Omega\omega\left(\frac{J_P}{L_1}\right) + \frac{(L_1+vL_2)(k_{y1}+k_{z1})}{2},$$

$$C_2 = -\omega^2\left(\frac{J_T}{L_1}\right) - \Omega\omega\left(\frac{J_P}{L_1}\right) + \frac{(L_1+vL_2)(k_{y1}+k_{z1})}{2},$$

$$D_1 = \omega^2\left(\frac{J_T}{L_1}\right) + \Omega\omega\left(\frac{J_P}{L_1}\right) + \frac{(L_1+vL_2)(k_{y2}+k_{z2})}{2}$$

$$D_2 = \omega^2\left(\frac{J_T}{L_1}\right) - \Omega\omega\left(\frac{J_P}{L_1}\right) + \frac{(L_1+vL_2)(k_{y2}+k_{z2})}{2}$$

$$E_1 = \frac{k_{y1}-k_{z1}}{2} \;\; ; \; E_2 = \frac{k_{y2}-k_{z2}}{2}$$

$$F_1 = \frac{(L_1+vL_2)(k_{y1}-k_{z1})}{2} \;\; ; \; F_2 = \frac{(vL_2)(k_{y2}-k_{z2})}{2}$$

3.โหมดการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับทิศทางเนื่องจากค่าไอเก้น

พิจารณาการสั่นสะเทือนแบบอิสระจากสมการ (15) สามารถลดรูปสมการเป็น

$$\begin{bmatrix} A & B & E_1 & E_2 \\ C_1 & D_1 & F_1 & F_2 \\ E_1 & E_2 & A & B \\ F_1 & F_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

ซึ่งสมการ (16) เป็นรูปแบบเมทริกซ์ 4 แถว 4 หลัก เมื่อแก้ดีเทอร์มิแนนต์ สามารถหาค่าความถี่ได้ทั้งหมด 8 ค่า โดยเป็นค่าไอเก้นของระบบ ถ้าไม่คิดผลของไจโรสโคปิคจะได้เป็นความถี่ธรรมชาติของระบบ ซึ่งค่าไอเก้นแต่ละค่าสามารถหาลักษณะการเคลื่อนที่ของระบบโรเตอร์นั้นได้

เพื่อให้สะดวกต่อการเข้าใจลักษณะการเคลื่อนที่ จึงยกตัวอย่างมาอธิบาย โดยกำหนดให้ m เท่ากับ 18.5268 กิโลกรัม, J_T และ J_P เท่ากับ 0.3545 และ0.0634 กิโลกรัม·เมตร^2 L_1 และ L_2 เท่ากับ0.45 และ 0.25 เมตร k_{y1}, k_{z1}, k_{y2}และ k_{z2} เท่ากับ155.67, 233.51, 155.67 และ233.51 นิวตันต่อมิลลิเมตรลำดับ และค่า v เท่ากับ 0.6

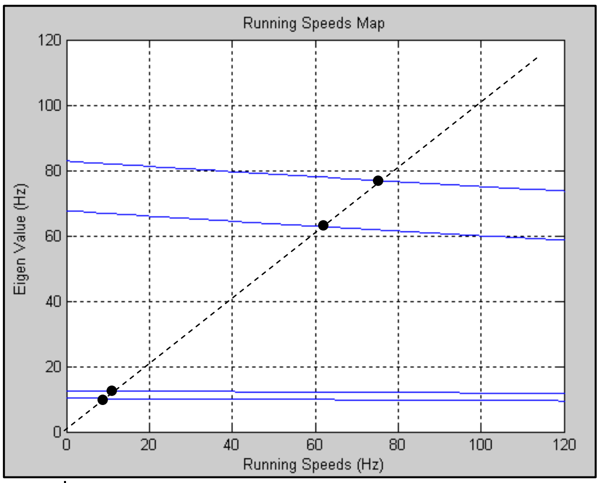
3.1 การหาค่าไอเก้น

เมื่อพิจารณาที่ความเร็วโรเตอร์ที่ Ω เท่ากับ 0, 50 และ 100 เฮิรตซ์ จากสมการ (15) สามาถหาค่าไอเก้นแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าไอเก้นที่ความเร็วโรเตอร์ต่างๆ

ความเร็วโรเตอร์ (เฮิรตซ์)	ค่าไอเก้น (เฮิรตซ์)			
	ตัวที่ 1 $(\pm\omega_1)$	ตัวที่ 2 $(\pm\omega_3)$	ตัวที่ 3 $(\pm\omega_5)$	ตัวที่ 4 $(\pm\omega_7)$
0	10.236	12.536	67.642	82.845
50	10.193	12.577	66.737	84.053
100	10.071	12.691	64.600	87.092

จากตารางที่ 1 หาความสัมพันธ์ของความเร็วโรเตอร์กับค่าไอเก้น ดังแสดงในรูปที่ (4)



รูปที่ (4) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วโรเตอร์กับค่าไอเก้น

ซึ่งเมื่อเขียนเส้นที่มีความเร็วของโรเตอร์ตรงกับค่าไอเก้น (Synchronous line) โดยเส้นกราฟที่มีความชันเท่ากับหนึ่งจะตัดกับเส้นกราฟทั้งสี่จุด เมื่อปรับความเร็วของโรเตอร์เท่ากับค่านี้จะทำให้เกิดการสั่นอย่างรุนแรง เรียกความเร็วนี้ว่าความเร็ววิกฤตของโรเตอร์ (Synchronous critical speed)

3.2 การหาค่าไอเก้นเวกเตอร์

จากค่าไอเก้นสามารถหาค่าไอเก้นเวกเตอร์ได้ ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าไอเก้นเวกเตอร์ที่ความเร็วโรเตอร์ต่างๆ

ไอเจนเวกเตอร์	ไอเก้นเวกเตอร์ที่ค่าไอเก้นตัวที่			
	ตัวที่ 1 $(\pm\omega_1)$	ตัวที่ 2 $(\pm\omega_3)$	ตัวที่ 3 $(\pm\omega_5)$	ตัวที่ 4 $(\pm\omega_7)$
$\begin{Bmatrix} p_{f1} \\ p_{f2} \\ \bar{p}_{b1} \\ \bar{p}_{b2} \end{Bmatrix}_{\Omega=0}$	$\begin{Bmatrix} 0.30 \\ -1 \\ 0.30 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.30 \\ 1 \\ 0.30 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.30 \\ -1 \\ -0.30 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.30 \\ -1 \\ 0.30 \\ -1 \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} p_{f1} \\ p_{f2} \\ \bar{p}_{b1} \\ \bar{p}_{b2} \end{Bmatrix}_{\Omega=50}$	$\begin{Bmatrix} 0.32 \\ -1 \\ 0.22 \\ -0.79 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.25 \\ -0.72 \\ -0.25 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.30 \\ 0.63 \\ 0.18 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.56 \\ 0.17 \\ -1 \\ -0.30 \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} p_{f1} \\ p_{f2} \\ \bar{p}_{b1} \\ \bar{p}_{b2} \end{Bmatrix}_{\Omega=100}$	$\begin{Bmatrix} -0.35 \\ 1 \\ -0.16 \\ 0.64 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.21 \\ 0.52 \\ 0.21 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 \\ -0.31 \\ -0.44 \\ -0.12 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.35 \\ 0.11 \\ -1 \\ -0.29 \end{Bmatrix}$

เมื่อพิจารณาไม่มีความเร็วโรเตอร์($\Omega = 0$) แทนค่าไอเก้นเวกเตอร์และค่าไอเก้น (เรเดียน) ซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติของระบบ ในสมการ (8)

สำหรับ$(+\omega_1)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{11}(t)}\} &= 0.30\boldsymbol{e^{j\omega t}} + 0.30\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{12}(t)}\} &= -\boldsymbol{e^{j\omega t}} - \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{17}$$

สำหรับ$(+\omega_3)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{31}(t)}\} &= -0.30\boldsymbol{e^{j\omega t}} + 0.30\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{32}(t)}\} &= \boldsymbol{e^{j\omega t}} - \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{18}$$

สำหรับ$(+\omega_5)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{51}(t)}\} &= -0.30\boldsymbol{e^{j\omega t}} - 0.30\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{52}(t)}\} &= -\boldsymbol{e^{j\omega t}} - \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{19}$$

สำหรับ$(+\omega_7)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{71}(t)}\} &= 0.30\boldsymbol{e^{j\omega t}} + 0.30\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{72}(t)}\} &= -\boldsymbol{e^{j\omega t}} - \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{20}$$

สมการ (17) และ (18) สามารถที่จะบอกลักษณะโหมดการเคลื่อนที่เนื่องจากความถี่ธรรมชาติ แบบหมุนในแนวแกน y และ z ส่วนสมการ (19) และ (20) สามารถที่จะบอกลักษณะโหมดการเคลื่อนที่เนื่องจากความถี่ธรรมชาติ แบบย้ายตำแหน่งในแนวแกน y และ z ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาโรเตอร์หมุนที่ความเร็วเท่ากับ 100 เฮิรตซ์ สามารถบอกลักษณะโหมดการเคลื่อนที่เนื่องจากค่าไอเจนได้ดังต่อไปนี้

สำหรับ$(+\omega_1)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{11}(t)}\} &= -0.35\boldsymbol{e^{j\omega t}} - 0.16\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{12}(t)}\} &= \boldsymbol{e^{j\omega t}} + 0.64\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{21}$$

สำหรับ$(+\omega_3)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{31}(t)}\} &= -0.21\boldsymbol{e^{j\omega t}} + 0.21\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{32}(t)}\} &= 0.52\boldsymbol{e^{j\omega t}} - \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{22}$$

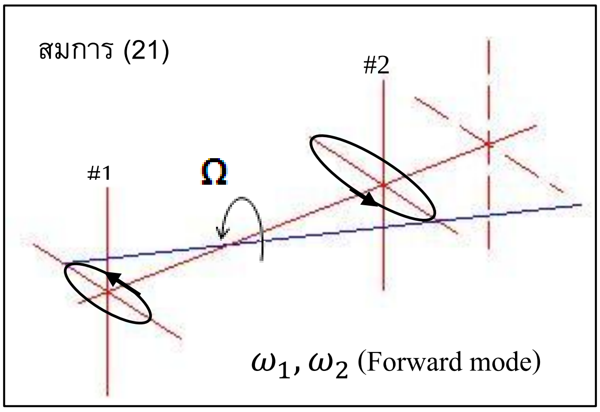
สำหรับ$(+\omega_5)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{51}(t)}\} &= -\boldsymbol{e^{j\omega t}} - 0.44\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{52}(t)}\} &= -0.31\boldsymbol{e^{j\omega t}} - 0.12\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{23}$$

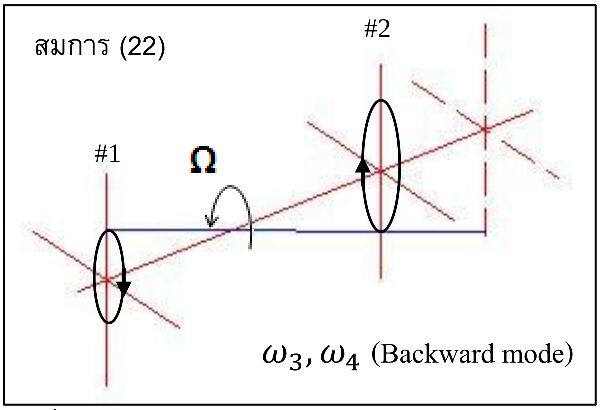
สำหรับ$(+\omega_7)$ ได้

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{p_{71}(t)}\} &= 0.35\boldsymbol{e^{j\omega t}} - \boldsymbol{e^{-j\omega t}} \\ \{\boldsymbol{p_{72}(t)}\} &= 0.11\boldsymbol{e^{j\omega t}} - 0.29\boldsymbol{e^{-j\omega t}} \end{aligned} \tag{24}$$

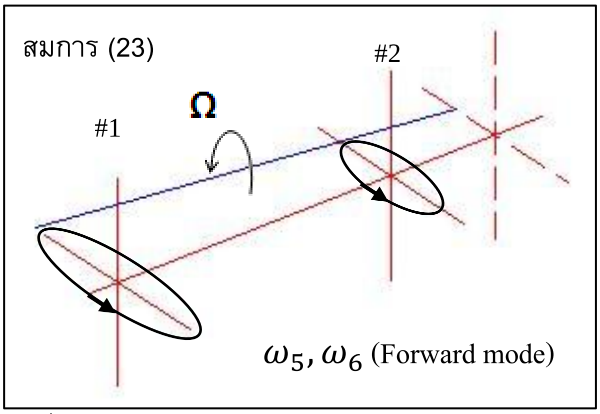
สมการ (21) และ (23) แสดงลักษณะการหมุนวนแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์ สมการ (22) และ (24) แสดงลักษณะการหมุนวนแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์ ซึ่งจะแสดงในรูป ดังต่อไปนี้



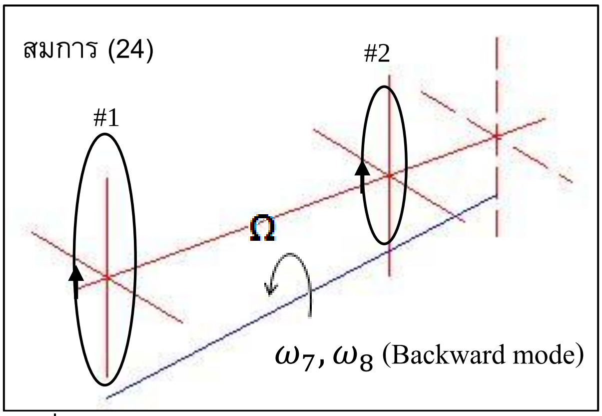
รูปที่ (5) ลักษณะการหมุนวนแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์



รูปที่ (6) ลักษณะการหมุนวนแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์



รูปที่ (7) ลักษณะการหมุนวนแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์



รูปที่ (8) ลักษณะการหมุนวนแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์

และค่าไอเก้นที่ติดลบจะทำให้ลักษณะการหมุนวนตรงกันข้ามกับทิศทางที่แสดงดังรูปที่ผ่านมา

4.สรุป

ผลจากการใช้ตัวแปรเชิงซ้อนมาอธิบายการเคลื่อนที่ในระนาบ นอกจากมีความสัมพันธ์กับทางกายภาพแล้วยังสามารถนำมาใช้เป็นหลักการในการวิเคราะห์การสั่นของโรเตอร์ ดังเช่น การสั่นสะเทือนแบบอิสระ ซึ่งสามารถหาค่าไอเก้นและยังสามารถทำนายลักษณะการหมุนวนของระบบโรเตอร์ได้(แบบทิศสวนทางและแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์) อีกทั้งยังสามารถหาความเร็ววิกฤตจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วโรเตอร์กับค่าไอเก้น และยังพบอีกว่าผลของค่า ν ทำให้ช่วงกว้างของค่าไอเก้นระหว่างค่า ω_3 กับค่าω_5 ห่างกันมากเมื่อเทียบกับ Kessler และ Kim [6] อีกทั้งลักษณะการเคลื่อนที่ของโรเตอร์จะเกิดการเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation) แล้วจึงเกิดการเคลื่อนที่แบบการย้ายตำแหน่ง (Translation)

5.กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับเงินสนับสนุนจากบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

6.เอกสารอ้างอิง

[1] อารยะ กลีบทอง และ เชิดศักดิ์ กันทาเศษ. “ *การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งบนแบริงอ่อนตัว .*” , วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.

[2] Chen, Y.(1966). Vibration: *Theoretical Method.* Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company

[3] David G., 2006, *“A Resonant Synchronous Vibration Bases Approach for Rotor Imbalance Detection,”* U.S. Army Research Laboratory, Glen Research Center, Cleveland, Ohio

[4] Guangchi Ying, Guang Meng และ Jianping Jing (2008), *“Turbocharger rotor dynamic with foundation excitation”* Springer-Verlag (2008)

[5] Kessler, C., and Kim, J, 2001, *“Concept of directional natural mode for vibration analysis of rotor using complex variable description”* Journal of Sound and Vibration (2001)

[6] Kessler, C., and Kim, J, 2002, *“Vibration Analysis of Rotors Utilizing Implicit Directional Information of Complex Variable Descriptions,”* ASME J. Vibr. Acoust., 124,July, pp. 340-349

[7] Lee, C. W., 1993, *Vibration: Analysis of Rotors*, Kluwer Academic I’ublishers.

[8] Richard H. 1969, “*Critical Speed Analysis of Rigid Rotors on Flexible Foundations,”* U.S. Army Research Laboratory, Glen Research Center, Cleveland, Ohio

[9] Y. Kang,Y.-P. Chang, J.-W. Tsai,L.-H. Mu and Y.-F. Chang,(1999) “*An investigation in stiffness effects on dynamics of rotor-bearing-foundation system*” *Journal of Sound and vibration* (2000), Department of Mechanical Engineering Chung Yuan Christian University, Chung Li, Taiwan 32023, Republic of China.