

## การศึกษาแบบจำลองทางพลศาสตร์ของแขนกลที่มีความยืดหยุ่นตัวสำหรับการเอื้อม ระยะไกล

### Dynamic Model of a Long-Reach Flexible Manipulator Arm

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ\* และ กรรรมมันต์ ชูประเสริฐ\*\*

\*ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถ.พญาไท ปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330 โทร 0-2218-6610-1 โทรสาร 0-2252-8889

\*\*ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

E-Mail: [Viboon.S@eng.chula.ac.th](mailto:Viboon.S@eng.chula.ac.th) , [fengkmc@ku.ac.th](mailto:fengkmc@ku.ac.th)

#### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการนำเสนอสมการแบบจำลองทางพลศาสตร์ที่ลดรูปของแขนกลที่มีสองก้านต่อโยงโครงสร้างแบบ five-bar linkage ที่มีตัวขับเป็นมอเตอร์กระแสตรงที่ฐาน และมีอุปกรณ์ตรวจวัดความเร่งติดอยู่ที่ปลายแขนของก้านต่อโยงที่ยืดหยุ่นตัว โดยมีการตรวจสอบสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ร่วมกับระบบควบคุมแบบ PD-control ในรูปของ state variable feedback เพื่อนำตัวแปรที่ได้มาทำการทดสอบเส้นทางเคลื่อนที่จริง โดยกำหนดให้ปลายแขนกลมีการเคลื่อนที่ตามเส้นทางเดินโดยใช้การควบคุมแบบเวลาจริงป้อนกลับ โดยจากผลการ simulation สามารถลดค่าผิดพลาดเนื่องจากการสั่นลงได้ภายใน 4 วินาที

**คำหลัก:** แขนกลแบบยืดหยุ่น การควบคุมแบบเวลาจริงป้อนกลับ

#### Abstract

This research work presents the abbreviated dynamic model of a five-bar manipulator arm with two flexible links which are directly driven by DC motors located at the base of the manipulator. The accelerometers are attached to the tips of the elastic link, link 4. The simulation is fulfilled to demonstrate mathematical model of PD state variable feedback controllers design. The experiment is assigned to move the tip of link4 along a path by real-time feedback control design. The simulation results show the position-error of tip link-vibration is reduced within 4 seconds.

**Keywords:** Flexible manipulator arm, Real-time feedback control

#### 1. บทนำ

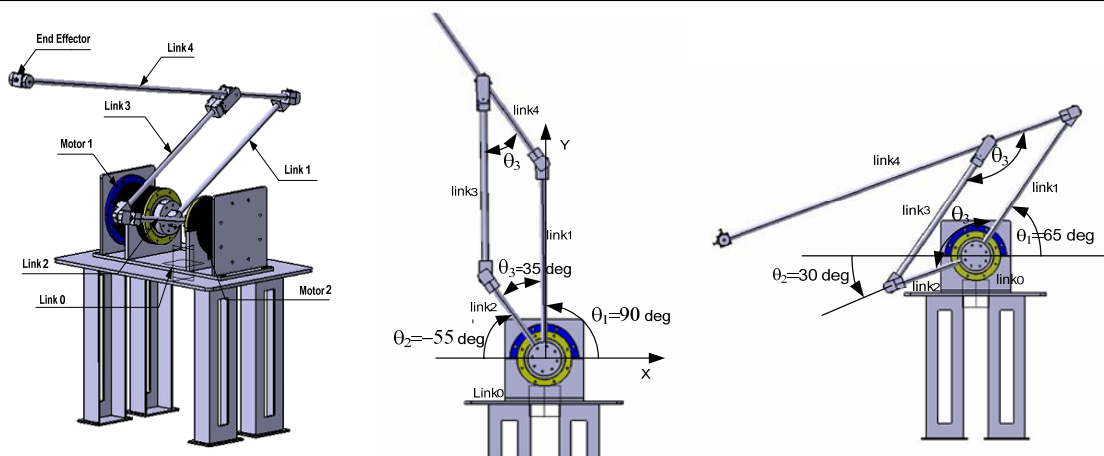
เนื่องจากแขนกลที่มีการใช้อยู่ในอุตสาหกรรมส่วนใหญ่เป็นแบบแขนเกร็ง ซึ่งรูปแบบของการเคลื่อนที่จะทำให้ระบบการตรวจวัดและการควบคุมสามารถทำได้ง่าย แต่ในทางกลับกันในลักษณะของโครงสร้างแบบนี้จะทำให้หุ่นยนต์มีน้ำหนักที่มากและมีตัวขับที่ขนาดใหญ่ รวมไปถึงไม่สามารถหลีกเลี่ยงการสั่นสะเทือนทางกลเนื่องจากการเคลื่อนที่ได้ เช่นแขนหุ่นยนต์ที่ใช้ในอวกาศ

ที่จะต้องมีความยาวของแขนค่อนข้างยาว หรือแขนหุ่นยนต์ที่ออกแบบสำหรับการทำงานที่ต้องมีการเอื้อมไประยะไกลจะต้องมีแขนใดแขนหนึ่งมีลักษณะยืดหยุ่น (flexible link) ในปัจจุบันจึงได้มีการพัฒนาแขนกลที่ใช้ในงานในอุตสาหกรรม ซึ่งทำจากวัสดุที่มีความอ่อนตัวและยืดหยุ่นมาใช้แทนแขนกลที่ทำจากวัสดุแข็งเกร็งมากขึ้น ซึ่งมีข้อดีคือพลังงานที่ใช้ในการขับเคลื่อนลดลงมากเนื่องจากแขนกลยืดหยุ่นจะมีน้ำหนักที่เบากว่าแขนเกร็ง

รวมไปถึงสามารถแก้ปัญหาจากการสั่นสะเทือนได้ แต่อย่างไรก็ตาม การควบคุมตำแหน่งปลายของแขนกลแบบยืดหยุ่นทำได้ยากกว่าเนื่องจากจะเกิดการแกว่งตัวที่ตำแหน่งปลายแขน และ รูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ค่อนข้างที่จะซับซ้อน โดยจะมีบางเทอมที่มีรูปแบบไม่เป็นเชิงเส้น รวมถึงสมการมีอันดับที่สูง ดังนั้นการนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เข้ามาพิจารณาจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง ซึ่งในทางปฏิบัติการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากหุ่นยนต์ที่มีความยืดหยุ่นค่อนข้างที่จะมีความซับซ้อนเนื่องมาจากจะต้องคำนึงถึงทฤษฎีเกี่ยวกับความยืดหยุ่นด้วย ฉะนั้นการออกแบบ

โครงสร้างของตัวหุ่นยนต์เองก็มีส่วนช่วยให้ความซับซ้อนของสมการลดลงได้ด้วย

จากปัญหาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยเชื่อว่าสมการทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์แบบยืดหยุ่นมีความสำคัญ และเป็นตัวแปรนำไปสู่ความถูกต้องในการควบคุมหุ่นยนต์ รวมถึง สามารถลดปัญหาความซับซ้อนของการควบคุมเบื้องต้นได้ โดยในงานวิจัยนี้จะทำการหาสมการทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์ แบบยืดหยุ่นที่ใช้ในงานระยะเอื้อมไกล โดยใช้สมการพลังงานในการหา แต่จะทำการลดตัวแปรบางตัวออกเพื่อให้ได้สมการที่ถูกต้องและง่ายต่อการนำไปใช้ในการควบคุมต่อไป

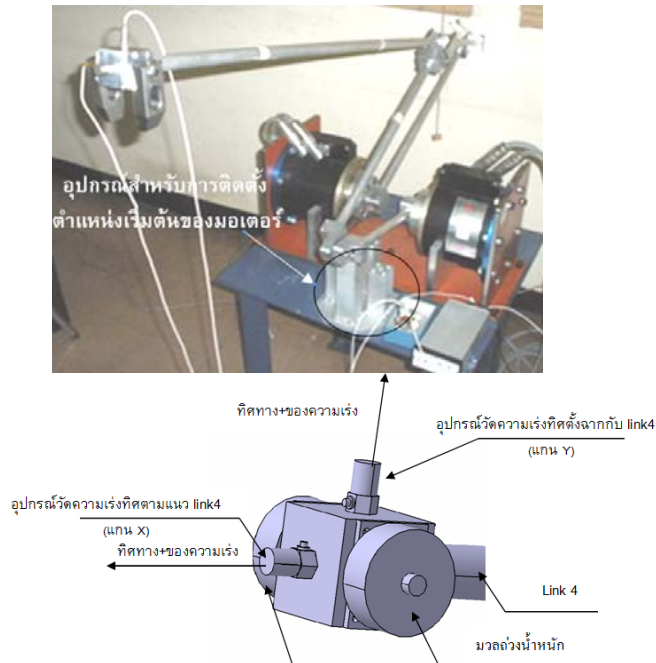


รูปที่ 1 โครงสร้างของแขนกลแบบยืดหยุ่นที่ออกแบบไว้

รูปที่ 1 และรูปที่ 2 แสดงโครงสร้างของแขนกลแบบยืดหยุ่นที่พัฒนาขึ้น ฐานของแขนกลชุดนี้แสดงตำแหน่งของก้านต่อโยงที่ 0 มอเตอร์แบบขับเคลื่อนจะตั้งอยู่ที่ทั้ง 2 ฝั่งของฐาน มอเตอร์ตัวที่ 1 ทำหน้าที่ขับเคลื่อนก้านต่อโยงที่ 1 ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 2 ทำหน้าที่ขับเคลื่อนก้านต่อโยงที่ 2 โดยผ่านกลไกแบบ Five-bar linkage เพื่อส่งแรงผ่านก้านต่อโยงที่ 3 ซึ่งก้านต่อโยงที่ 2 และ 4 จะเคลื่อนที่ขนานกัน ในทำนองเดียวกันก้านต่อโยงที่ 1 และ 3 จะเคลื่อนที่ขนานกันด้วย โดยที่ก้านต่อโยงที่ 1 และก้านต่อโยงที่ 3 ยาว 62 เซนติเมตร ก้านต่อโยงที่ 2 ยาว 32 เซนติเมตร และก้านต่อโยงที่ 4 ยาว 132 เซนติเมตร จากโครงสร้างแบบขนานทำให้สามารถหาช่วงของมุมการเคลื่อนที่ของมอเตอร์ รูปที่ 1 แสดงโครงสร้างของกลไกแบบ Five-bar linkage ที่ใช้ในแขนกลแบบยืดหยุ่นที่พัฒนาขึ้น โดยกำหนดให้  $\theta_3$  คือมุมที่วัดระหว่างก้านต่อโยงที่ 1 กับ 2 หรือมุมที่วัดระหว่าง

ก้านต่อโยงที่ 3 กับ 4 โดยที่ความสัมพันธ์ของมุมสำหรับกรณี  $\theta_3 \leq 90^\circ$  คือ  $\theta_3 = |\theta_1| - |\theta_2| = 35^\circ$  เป็นค่ามุน้อยที่สุดที่จะป้องกันไม่ให้เกิดการชนกันระหว่างก้านต่อโยงที่ 3 และ 4 และจะเห็นพบว่ามุมที่ข้อต่อที่หนึ่งจะมีค่า  $0 \leq \theta_1 \leq 90$  ในทำนองเดียวกันจากรูปที่ 4 สามารถหาค่ามุนมากที่สุดของ  $\theta_3$  สำหรับกรณี  $\theta_3 \geq 90^\circ$  จะได้  $\theta_3 = 180 - |\theta_1| - |\theta_2| = 145^\circ$  คือค่ามุนมากที่สุดที่ก้านต่อโยงจะไม่เกิดการชนกัน โดยที่มุมการเคลื่อนที่ของมอเตอร์ตัวที่ 2 จะมีช่วงของการเคลื่อนที่คือ  $-35 \leq \theta_2 \leq 55$  นอกจากนั้นที่ปลายแขนกล (End-Effector) แสดงดังรูปที่ 2 จะมีการติดตั้งอุปกรณ์วัดความเร็ว 2 ตัว โดยตัวที่ 1 วัดความเร็วในแนวแกนก้านต่อโยงที่ 4 (แกน X) ส่วนอีกตัววัดความเร็วในแนวตั้งฉากกับก้านต่อโยงที่ 4 (แกน Y) และทิศทางที่พุ่งออกจากอุปกรณ์วัดความเร็วเป็นบวก หรือตามแนวหัวลูกศรที่

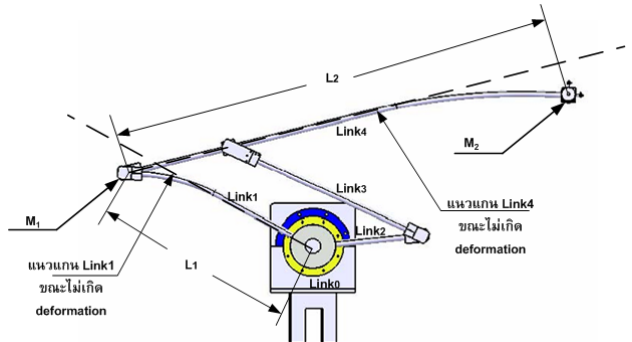
แสดงในรูปที่ 2 ขณะที่ด้านข้างของปลายแขนออกแบบไว้สำหรับใส่มวลเพื่อถ่วงน้ำหนักที่ปลายแขนเพื่อให้น้ำหนักทั้งหมดของแต่ละก้านต่อโยงรวมกันเป็นก้อน (lumped mass)



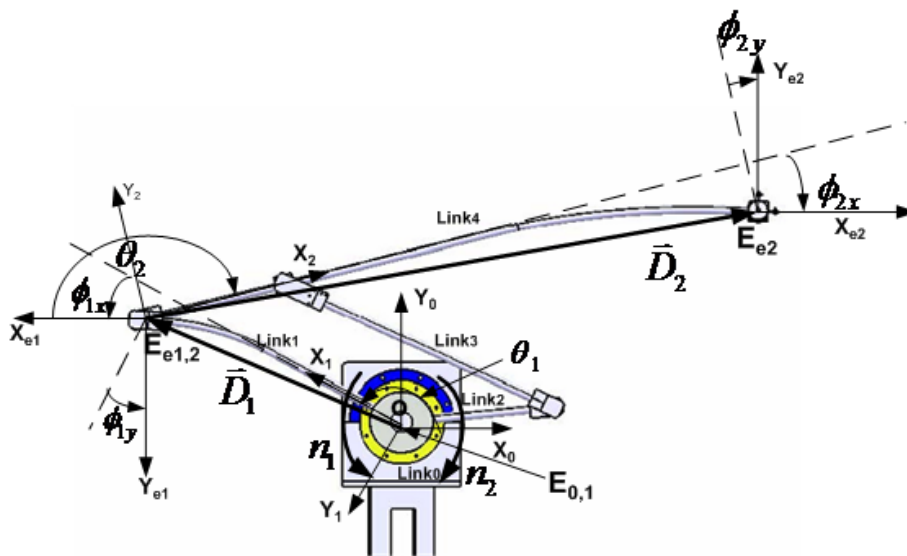
รูปที่ 2 แขนกลแบบยืดหยุ่นที่พัฒนาขึ้น

### สมมติฐานของแขนกลแบบยืดหยุ่น

พิจารณาแขนกลแบบยืดหยุ่นตามรูปที่ 3 โดยสมมติให้ก้านต่อโยงที่ 1 และ 4 เป็นก้านต่อโยงที่มีความยืดหยุ่น แต่ละก้านมีความยาวเท่ากับ 62 cm และ 132 cm ตามลำดับ มีมวล  $M_1$  และ มวล  $M_2$  เป็นมวลแบบก้อนรวม (Lumped mass) ที่แต่ละปลายของก้านต่อโยงที่ 1 และก้านต่อโยงที่ 4 ตามลำดับ โดยที่มอเตอร์ที่ใช้ในการขับเคลื่อนเป็นแบบขับเคลื่อนตรง (Direct Drive Motor)



รูปที่ 3 ภาพประกอบสมมติฐานของแขนกลแบบหุ่นตัว



รูปที่ 4 การตั้งเฟรมและแสดงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของแขนกล

การหาสมการของแขนกลที่ได้ออกแบบและสร้างขึ้นตามสมมติฐานดังนี้

1. พิจารณา มวล  $M_1$  และ มวล  $M_2$  เป็นแบบ point mass
2. ไม่พิจารณาน้ำหนักของก้านต่อโยงที่ 1 และ 4 เมื่อเทียบกับน้ำหนักของมวล  $M_1$  และ มวล  $M_2$

3. ไม่พิจารณาความเสียดทานของมอเตอร์ และข้อต่อของก้านต่อโยง

### 2. ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนรูป (Deformation)

การหาสมการพลศาสตร์ของแขนกลแบบหุ่นตัวนี้ ได้มีการศึกษากันมาอย่างกว้างขวาง ส่วนใหญ่จะใช้วิธีการ

สมมติโหมดของการสั่นหรือ assumed mode เพื่อช่วยในการกำหนดตำแหน่งหรือกำหนดพิกัดของแขนกล แต่ในงานวิจัยนี้จะใช้การกำหนดพิกัดต่างออกไป จากที่กำหนดแล้วว่าจะวัดการยืดหยุ่นของแขนกลโดยใช้อุปกรณ์ตัววัดที่ติดตั้งอยู่ที่ปลายแขนของก้านต่อโยงที่ 4 ดังนั้นระบบพิกัดก็จะแตกต่างกันกับวิธีการของ assumed mode กำหนดให้เวกเตอร์  $\bar{D}_i$  และเวกเตอร์  $\bar{\phi}_i$  แสดงค่า displacement deformation และ angular deformation ตามลำดับ ขณะที่  $E_i$  แทนเฟรมของแขนกลที่ไม่เกิดการเปลี่ยนรูป และ  $E_{ei}$  แทนเฟรมของแขนกลที่เกิดการเปลี่ยนรูป โดยจะได้ค่าการเปลี่ยนรูปของเฟรม  $E_{ei}$  เทียบกับเฟรม  $E_i$  ดังรูปที่ 4 เราสามารถเขียนเวกเตอร์ที่กำหนดตำแหน่งปลายแขนของแขนหุ่นยนต์แบบยืดหยุ่นตัวของแต่ละก้านต่อโยงได้ดังนี้

$$\bar{D}_i \triangleq [l_i + \delta_{ix} \quad \delta_{iy}] \quad (i=1,2) \quad (1)$$

$$\bar{\phi}_i \triangleq [\phi_{ix} \quad \phi_{iy}] \quad (i=1,2) \quad (2)$$

โดยที่  $l_i$  แทนความยาวของก้านต่อโยงตามแนวแกนของเฟรมที่  $i$ ,  $\delta_i$  แทนการเปลี่ยนรูปของความยาว และ  $\phi_i$  แทนการเปลี่ยนรูปของมุมโดยใช้สมการของสปริงจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนรูป ดังนี้

$$\begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i3} \\ K_{i3}^T & K_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

โดย  $f_i$  แทนแรง และ  $n_i$  แทนโมเมนต์ของก้านต่อโยงที่  $i$  เทียบกับเฟรม  $E_i$  และ  $K_{ij}$  คือ ค่า stiffness ของก้านต่อโยง ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} K_{i1} &= \text{diag} [A_i E_i / l_i \quad 12E_i I_i / l_i^3 \quad 12E_i I_i / l_i^3] \\ &\triangleq \text{diag} [K_{ia} \quad K_{ib} \quad K_{ib}] \\ K_{i2} &= \text{diag} [G_i \hat{I}_i / l_i \quad 4E_i I_i / l_i \quad 4E_i I_i / l_i] \\ &\triangleq \text{diag} [K_{ic} \quad K_{id} \quad K_{id}] \\ K_{i3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6E_i I_i / l_i^2 \\ 0 & 6E_i I_i / l_i^2 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ie} \\ 0 & -K_{ie} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$E_i$  คือ Young's modulus ของก้านต่อโยงที่  $i$  (N/m<sup>2</sup>)

$G_i$  คือ modulus of transverse of elasticity ของก้านต่อโยงที่  $i$  (N/m<sup>2</sup>)

$A_i$  คือ พื้นที่หน้าตัดของก้านต่อโยงที่  $i$  (m<sup>2</sup>)

$l_i$  คือ ความยาวของก้านต่อโยงที่  $i$  (m)

$I_i$  คือ area moment of inertia ของก้านต่อโยงที่  $i$  (m<sup>4</sup>)

$\hat{I}_i$  คือ polar moment of inertia of area ของก้านต่อโยงที่  $i$  (m<sup>4</sup>)

จากสมมติฐานข้างต้นนำไปสู่การพิจารณาการตั้งเฟรมของแขนกลโดยจะพิจารณาเฟรมที่มีความยืดหยุ่นเพิ่มด้วย รูปที่ 4 ให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของเฟรมพื้นฐานเพื่อที่จะอธิบายความยืดหยุ่นของการต่อโยงที่ 1 และ 2 จะทำการเพิ่มเฟรมของความยืดหยุ่น  $E_{ei}$  โดยที่เฟรมนี้จะอยู่กับก้านต่อโยงที่  $i$  และมีทิศเดียวกับเฟรม  $E_i$  เมื่อไม่มีระยะโก่งตัวของก้านต่อโยงเกิดขึ้นโดยจะได้ Rotation Matrix ดังนี้

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{e1}R_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

จากการไม่พิจารณาทอมดิกรี 2 จะได้ rotation matrix

ของ  ${}^1R_{e1}$  คือ

$${}^1R_{e1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_{1y} \\ 0 & 1 & -\phi_{1x} \\ -\phi_{1y} & \phi_{1x} & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ดังนั้นสมการ rotation matrix จาก เฟรม 0 ถึง เฟรม 2 คือ

$${}^0T_1 = {}^0R_1 \quad (6)$$

$${}^0T_2 = {}^0R_1 {}^1R_{e1} {}^{e1}R_2 \quad (7)$$

### สมการการเคลื่อนที่ของ Tip Lumped Masses

จากรูปที่ 4 จะได้สมการเวกเตอร์แสดงตำแหน่งของมวลที่ปลายแขนกลเทียบกับเฟรม  $E_0$  คือ  $\bar{r}_i$  ( $i=1,2$ ),

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^i {}^0T_j \bar{D}_j \quad (8)$$

จากสมการนี้ ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้สมการความเร็ว และความเร่งดังนี้

$$\dot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^i \left\{ \left( \sum_{k=1}^2 U_{jk} \dot{\theta}_k + U_j^* \right) \bar{D}_j + {}^0T_j \bar{D}_j \right\} \quad (9)$$

$$\ddot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^i \left\{ \left[ \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{l=j}^2 U_{jkl} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_l + 2U_{jk}^* \dot{\theta}_k + U_{jk} \ddot{\theta}_k \right) + U_j^{**} \right] \bar{D}_j \right\}$$

$$+2(\sum_{k=j}^2 U_{jk} \dot{\theta}_k + U_j^*) \dot{D}_j + {}^0T_j \ddot{D}_j] \quad (10)$$

$$\text{โดยที่ } U_{jk} = \frac{\partial}{\partial \theta_k} {}^0T_j,$$

$$U_{jkl} = \frac{\partial}{\partial \theta_l} U_{jk},$$

$$U_1^* = 0, U_2^* = {}^0R_1 \left( \frac{d}{dt} {}^1R_{e1} \right)^{e1} R_2, \quad (11)$$

$$U_1^{**} = 0, U_2^{**} = {}^0R_1 \left( \frac{d^2}{dt^2} {}^1R_{e1} \right)^{e1} R_2,$$

$$U_{1k}^* = 0, U_{2k}^* = \frac{\partial}{\partial \theta_k} U_2^*,$$

ซึ่งตัว subscript ตัวแรก  $j$  ของ  $U$  แสดงว่า  $U_j$  เป็นอนุพันธ์ของเมตริกซ์  ${}^0T_j$ , subscript ตัวที่ 2 และ 3 ( $k$  และ  $l$ ) แทนอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ  $\theta_k$  และ  $\theta_l$  ตามลำดับ และ superscript  $*$  แทนอนุพันธ์ของ  ${}^1R_{e1}$  เทียบกับเวลา

### 3. สมการพลศาสตร์ของแขนกลแบบยืดหยุ่น

#### (Dynamics model of flexible manipulator arm)

##### 3.1 พลังงานจลน์ (Kinetic Energy)

จากสมมติฐานหัวข้อ 4 เราสามารถเขียนสมการพลังงานจลน์ทั้งหมด (total kinetic energy) ของแขนกลประกอบไปด้วย พลังงานจลน์จาก lumped mass และ พลังงานจากการหมุน (rotational energy) ของมอเตอร์ โดยให้  $E_{ki}$  แทนพลังงานจลน์ของก้านต่อโยงที่  $i$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^T \dot{r}_1 + \frac{1}{2} I_{m1} \dot{\theta}_1^2, \quad (12)$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^T \dot{r}_2 + \frac{1}{2} I_{m2} \dot{\theta}_2^2, \quad (13)$$

ซึ่ง  $I_{mi}$  แทน rotational inertia ของมอเตอร์ที่  $i$

$$\text{จะได้พลังงานจลน์ทั้งหมดคือ } E_k = \sum_{i=1}^2 E_{ki} \quad (14)$$

##### 3.2 พลังงานศักย์ (Potential Energy)

จากสมการที่ (3) พลังงานศักย์ของการยืดหยุ่น (potential of elasticity) ของก้านต่อโยงที่  $i$ ,  $E_{pi}$  ( $i = 1, 2$ ) คือ

$$E_{pi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta_i^T & \phi_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i3} \\ K_{i3}^T & K_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

และพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (potential energy from gravity),  $E_{pg}$ , คือ

$$E_{pg} = m_1 \bar{g}^T \bar{r}_1 + m_2 \bar{g}^T \bar{r}_2, \quad (16)$$

ซึ่ง  $\bar{g} = [0 \ 0 \ g_0]^T$ ,  $g_0$  คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ดังนั้น พลังงานศักย์รวมคือ

$$V = \sum_{i=1}^2 E_{pi} + E_{pg} \quad (17)$$

#### 3.3 สมการการเคลื่อนที่ของแขนกล (Equation of motion of the robot)

โดยนิยามของสมการของลากรองจ์ (Lagrange Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของระบบทางกล การอธิบายการเคลื่อนที่โดยใช้วิธีนี้จะอธิบายในรูปของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ดังนั้นในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการของลากรองจ์นี้จะต้องหาพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของระบบทางกลนี้ก่อน และจะสามารถหา

$$\text{Lagrangian จากสมการ } L = E_K - V \quad (18)$$

และเมื่อได้พลังงานทั้งสองแล้วก็จะสามารถคำนวณหาพลศาสตร์ของระบบทางกลนี้ได้จากสมการของลากรองจ์คือ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

โดยให้ joint displacements  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) เป็น generalized coordinate และ  $\tau_i$  คือทอร์กของมอเตอร์ที่ส่งผ่าน joint จากสมการที่ (9) ถึง (18) แทนค่าในสมการที่ (19) จะได้สมการ

$$\tau_i = \sum_{j=1}^2 \{ m_j (\ddot{r}_j + \bar{g})^T (\sum_{k=1}^j U_{ki} \bar{D}_k) \} + I_{mi} \ddot{\theta}_i \quad (20)$$

สมการของลากรองจ์ (Lagrange Equations) โดยให้ displacement deformation  $\delta_i$  ( $i = 1, 2$ ) และ angular deformation  $\phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) คือ generalized coordinate จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_i} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0, \quad (22)$$

ในทำนองเดียวกับการได้มาของสมการที่ (20) จะได้สมการการเคลื่อนที่ในรูปของค่า deformation ดังนี้

$$m_1 {}^0T_1^T (\ddot{r}_2 + \bar{g}) + m_1 {}^0T_1^T (\ddot{r}_1 + \bar{g}) + K_{11} \delta_1 + K_{13} \phi_1 = 0, \quad (23)$$

$$m_2 {}^0T_2^T (\ddot{r}_2 + \bar{g}) + K_{21}\delta_2 + K_{23}\phi_2 = 0, \quad (24)$$

$$m_2 V_2^T (\ddot{r}_2 + \bar{g}) + K_{13}^T \delta_1 + K_{12}\phi_1 = 0, \quad (25)$$

$$K_{23}^T \delta_2 + K_{22}\phi_2 = 0, \quad (26)$$

$$\text{โดย } V_2 = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_1^T} (U_2^* D_2) \quad (27)$$

จากสมมติฐาน ที่พิจารณามวล  $M_1$  และ มวล  $M_2$  เป็นแบบ point mass จะทำให้สามารถหาค่า  $\phi_i$  ในรูปฟังก์ชันของ  $\theta_i$  และ  $\delta_i$  จากสมการที่ (20) และ (23) ถึง (27) ได้ดังนี้ จากสมการที่ (27),

$$\phi_2 = -K_{22}^{-1} K_{23}^T \delta_2 \text{ มีหน่วยเป็น radian} \quad (28)$$

จากสมการที่ (23) ถึง (27) จะได้ค่า  $\phi_1$  คือ

$$\phi_1 = K_{12}^{-1} V_2^T {}^0T_2 (K_{21} - K_{23} K_{22}^{-1} K_{23}^T) \delta_2 - K_{12}^{-1} K_{13}^T \delta_1 \quad (29)$$

มีหน่วยเป็น radian

โดยการนำสมการที่ (28) และ (29) หาคอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้พารามิเตอร์  $\dot{\phi}_i, \ddot{\phi}_i$  นำไปแทนในสมการที่ (20), (23) และ (24) ดังนั้นจะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion) ที่ไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์  $\phi$  ซึ่งเป็นรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ที่แสดงลักษณะของแขนกลแบบยืดหยุ่นในงานวิจัยนี้และสามารถจะนำไปใช้ต่อในการควบคุมค่าพารามิเตอร์  $\delta_i$  ให้ปลายแขนกลมีการสั่นเกิดขึ้นน้อยที่สุด การแทนค่าดังกล่าว สมการจะค่อนข้างยาวมากและมีความซับซ้อนพอสมควร ฉะนั้นในการจัดรูปของสมการนี้ในรูปของ state equation เพื่อใช้สำหรับออกแบบระบบควบคุมปลายแขนกลจะทำได้ยาก ดังนั้นจึงต้องมีการตั้งสมมติฐานเพิ่มเติมเพื่อตัดบางส่วนของสมการที่จะไม่พิจารณาออกไป และการลดทอนสมการจากสมมติฐานสามารถทำได้จากการลดทอนสมการที่ (9) และสมการที่ (10) เพื่อง่ายต่อการนำไปใช้ควบคุมต่อไป

#### 4. สมการปริภูมิสถานะ (State-space equation)

จากหัวข้อที่แล้ว จะเห็นว่าสมการพลศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์แบบยืดหยุ่นนี้มีความสลับซับซ้อนค่อนข้างมากและไม่เหมาะสำหรับใช้ในการออกแบบระบบควบคุม เพื่อให้สมการทางพลศาสตร์ (Dynamic equation) มีความซับซ้อนน้อยลงง่ายต่อการหาสมการปริภูมิสถานะ (state space equation) และเหมาะสมสำหรับใช้ในการออกแบบระบบควบคุม ผู้วิจัยได้ทำการเพิ่มสมมติฐานดังนี้

1. สมการที่ได้มีวัตถุประสงค์ที่จะต้องการควบคุมการสั่นบริเวณจุดปลายที่ต้องการเท่านั้น ดังนั้นจึงสมมติว่าไม่

พิจารณาเทอมของค่าเวกเตอร์ความเร่งที่เกิดจาก Coriolis และ Centripetal force

2. กำหนดให้ก้านตอโยงไม่เกิดการเปลี่ยนรูปตามแนวแกนของก้านตอโยง ( $\delta_x = 0$ )

3. ถ้าวระหว่างการเคลื่อนที่ ระยะการเคลื่อนที่ที่เกิดจากการสั่นมีค่าน้อย ดังนั้นจึงไม่พิจารณาเทอมของค่า  $\phi$  และ  $\delta$  ยกเว้นถ้าเป็นเทอมที่เกิดจากสมการของสปริงจากสมมติฐานจะได้สามารถลดทอนสมการความเร่ง (10) ได้ดังนี้

$$\ddot{r}_1 = U_{11} \ddot{D}_1 \ddot{\theta}_1 + {}^0T_1 \ddot{\delta}_1 \quad (30)$$

$$\ddot{r}_2 = (U_{11} \ddot{D}_1 + \bar{U}_{21} \ddot{D}_2) \ddot{\theta}_1 + U_{22} \ddot{D}_2 \ddot{\theta}_2 + V_2 \ddot{\phi}_2 + {}^0T_2 \ddot{\delta}_2 \quad (31)$$

โดยที่

$$\ddot{D}_1 = [l_1 \ 0 \ 0]^T, \quad \ddot{D}_2 = [l_2 \ 0 \ 0]^T,$$

$${}^0T_2 = {}^0R_1 {}^1R_2, \quad \bar{U}_{2i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} {}^0T_2$$

$$\xi = [\theta_1 \ \theta_2 \ \delta_{1y} \ \delta_{2y}]^T, \quad u = [\tau_1 \ \tau_2]^T,$$

แทนค่าสมการที่ (30) และสมการที่ (31) ในสมการที่ (20), (23) และ (24) ดังนั้นจะได้สมการการเคลื่อนที่ที่มีความซับซ้อนน้อยลงคือ

$$[M] \ddot{\xi} + [F] \dot{\xi} + [G_v] \xi = [D] u, \quad (32)$$

โดย

$$M = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 (L_s^2 + L_c^2) + I_{m1} & m_2 l_2 (l_2 + l_1 \cos \theta_2) \\ m_2 l_2 (l_2 + l_1 \cos \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_{m2} \\ m_1 l_1 + m_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ m_2 (l_2 + l_1 \cos \theta_2) & m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2) l_1 + m_2 l_2 \{ \cos \theta_2 - K_{v1} (l_2 + l_1 \cos \theta_2) \} \\ & m_2 l_2 (\cos \theta_2 - l_2 K_{v1}) \\ & m_1 + m_2 + m_2 l_2 K_{v1} \cos \theta_2 \\ & m_2 (\cos \theta_2 - l_2 K_{v1}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m_2 (l_2 + l_1 \cos \theta_2) (1 + K_{v2} l_2^2) \\ m_2 l_2 (1 + K_{v2} l_2^2) \\ m_2 \cos \theta_2 (1 + K_{v2} l_2^2) \\ m_2 (1 + K_{v2} l_2^2) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{1b} - \frac{K_{1e}^2}{K_{1d}} & \frac{K_{1e}}{K_{1d}}(K_{2b} - \frac{K_{2e}^2}{K_{2d}})l_2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{2b} - \frac{K_{2e}^2}{K_{2d}} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} m_1 l_1 \cos \theta_2 + m_2 L_c \\ m_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ (m_1 + m_2) \cos \theta_1 \\ m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} g_0,$$

และ  $L_c = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2),$

$L_s = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$

$K_{h1} = \frac{K_{1e}}{K_{1d}} \cos \theta_2,$

$K_{h2} = (K_{2b} - \frac{K_{2e}^2}{K_{2d}})(\frac{\sin^2 \theta_2}{K_{1c}} + \frac{\cos^2 \theta_2}{K_{1d}}),$

$K_{v1} = \frac{K_{1e}}{K_{1d}}, \quad K_{v2} = (K_{2b} - \frac{K_{2e}^2}{K_{2d}}) / K_{1d}$

จากสมการที่ (32) ทำการแปลงเป็นสมการปริภูมิสถานะ (state space equation) โดยกำหนดค่าตัวแปรปริภูมิ (state variables) ใหม่ดังนี้

$$x = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \delta_{1y} \quad \delta_{2y} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\delta}_{1y} \quad \dot{\delta}_{2y}]^T$$

$$u = [\tau_1 \quad \tau_2]^T,$$

สมการปริภูมิสถานะ (state-space equation) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & E_4 \\ -M^{-1}F & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}G \end{bmatrix} \quad (33)$$

$E_i$  แทน unit matrix  $i \times i$

พิจารณาค่าชดเชยแรงโน้มถ่วงในสมการที่ (33) จะได้  
อินพุตค่าใหม่คือ

$$u' = u + \begin{bmatrix} m_1 l_1 \cos \theta_2 + m_2 L_c \\ m_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} g_0 \quad (34)$$

พิจารณาเทอมที่ 3 และ 4 ของ  $G$  สามารถตั้งค่าอ้างอิง

หรือค่าที่ต้องการ (desired values) ของ

$\delta_{1y}$  และ  $\delta_{2y}$  คือ  $\delta_{1yd}$  และ  $\delta_{2yd}$  ให้มีค่า deformation ในแนวแกนของแขนที่ต้องการเมื่อแขนมีการยืดหรือหดได้ดังนี้

$$\delta_{1yd} = -\frac{m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) l_1^2 l_2 g_0}{2E_1 I_1} - \frac{(m_1 + m_2) \cos \theta_1 l_1^3 g_0}{3E_1 I_1} \quad (35)$$

$$\delta_{2yd} = -\frac{m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) l_2^3 g_0}{3E_2 I_2} \quad (36)$$

## 5. การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้แบบจำลองที่หาได้

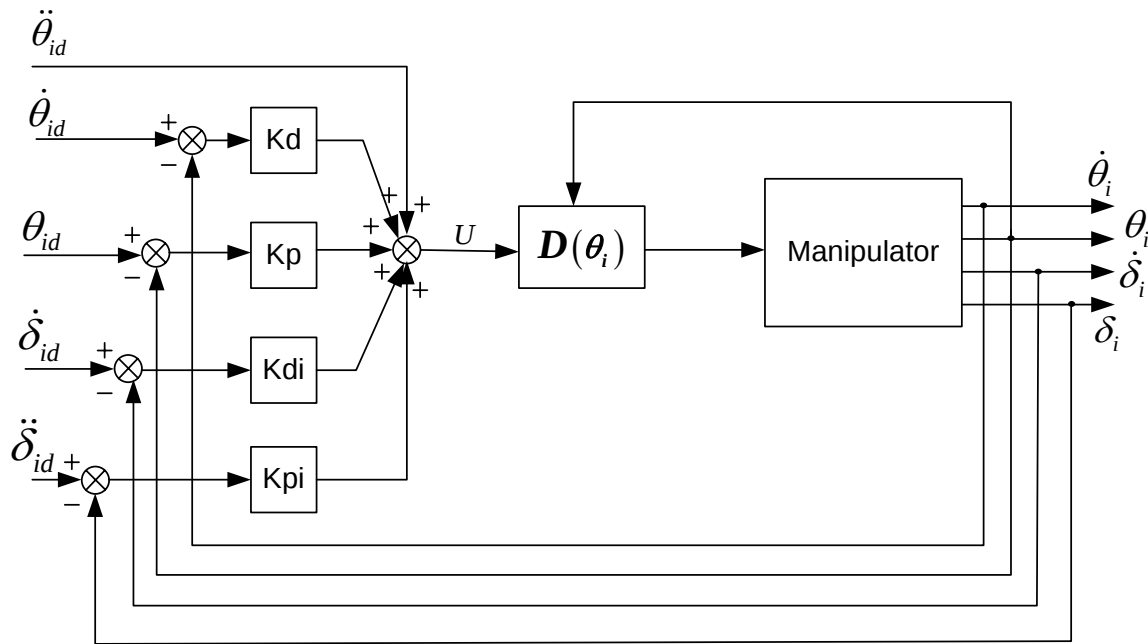
ในการสอบนี้ เป็นการทดสอบเพื่อสำหรับตรวจสอบความถูกต้องของสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่หามาได้จากหัวข้อที่ 4 สามารถนำมาใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้สำหรับการออกแบบระบบควบคุมของแขนกลแบบยืดหยุ่นโดยใช้ accelerometer เป็นอุปกรณ์ตรวจรู้ (sensor) ที่ติดตั้งไว้ที่ปลายก้านต่อโยงที่ 4 สมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่หาได้จะอยู่ในรูปของสมการปริภูมิสถานะ การทดลองนี้จะเป็นการนำสมการปริภูมิสถานะ (33) และสมการ (34) ถึงสมการ (36) มาทำการ simulation ในคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบแบบจำลองทางพลศาสตร์ที่หามาได้จากสมมติฐานที่กล่าวในหัวข้อที่ 4 ว่ามีความถูกต้องในระดับหนึ่งโดยใช้ระบบควบคุมแบบ PD-control ในรูปของ state variable feedback ในการควบคุมตำแหน่งข้อต่อหรือแกนหมุนของมอเตอร์ และตำแหน่งของปลายแขนกลตามรูปที่ 5 โดยที่สมมติว่าสามารถวัดค่าของตัวแปรได้ทุกตัวแปรสถานะ (state variable) โดยค่าตัวแปรสถานะ คือ

$$x = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \delta_{1y} \quad \delta_{2y} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\delta}_{1y} \quad \dot{\delta}_{2y}]^T$$

รูปที่ 5 เป็นรูปแผนภูมิบล็อกแสดงระบบควบคุม โดยมีสัญญาณอ้างอิงคือ  $\theta_{id}, \dot{\theta}_{id}, \ddot{\theta}_{id}, \delta_{id},$  และ  $\dot{\delta}_{id}$  ที่

ต้องการระบบที่ต้องการควบคุมติดตามสัญญาณอ้างอิงนี้ การออกแบบค่าเกนในระบบควบคุมนี้มีลักษณะคล้ายกับการควบคุมแบบ state variable feedback โดยต้องการ regulate ค่าความผิดพลาดจากสัญญาณอ้างอิงนี้ให้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ที่สถานะอยู่ตัว การเลือกค่าเกนของตัวควบคุมทำได้โดยเราจะให้น้ำหนักที่ตัวควบคุมตำแหน่งของแกนหมุนมอเตอร์มากที่สุด ค่าเกนดังกล่าวจึงมีค่าค่อนข้างสูงและเราจะใช้ค่าเกนที่เคยใช้ในตัวควบคุมที่ดีใน

การทดลองก่อนหน้านี้มาใช้เป็นหลัก ส่วนค่าเกนสำหรับตัวแปรอื่นนั้นสามารถหาได้โดยวิธีการคาดเดาได้ เนื่องจากงานวิจัยนี้ไม่ได้ทำการหาตัวควบคุมที่ดีที่สุด แต่เพียงต้องการทดสอบระบบพลศาสตร์ที่ประมาณได้ว่าเป็นไปได้อาจหรือไม่ได้ในการนำมาใช้เป็นแบบจำลองสำหรับการออกแบบตัวควบคุมขั้นสูงต่อไป จึงใช้ตัวควบคุมที่พอใช้ได้เท่านั้นมาทดสอบ



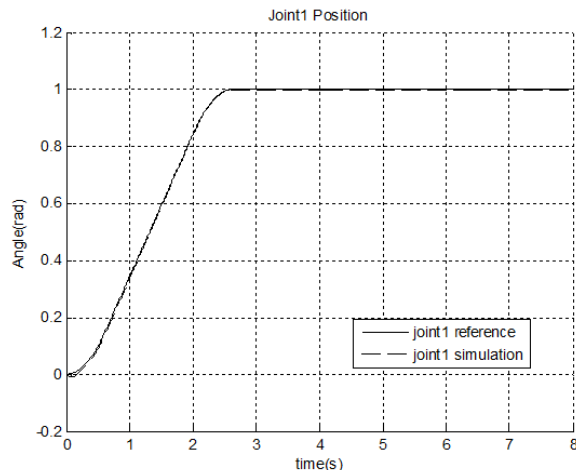
รูปที่ 5 แผนภาพบล็อกสำหรับทดสอบสมการพลศาสตร์

จากรูปที่ 6 แสดงผลของการเปรียบเทียบสัญญาณอ้างอิงที่ใส่ให้ระบบกับสัญญาณการขับเคลื่อนตัวที่ 1 ที่ได้จากการ simulation โดยเลือกค่าเกน  $K_p = 5750$  และค่าเกน  $K_d = 200$  จากการทำการจำลองการทำงานสามารถหาค่าความผิดพลาดระหว่างทั้ง 2 สัญญาณได้ดังแสดงในรูปที่ 14 ซึ่งจะเห็นว่าค่าความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวหรือค่า steady state error มีค่าอยู่ที่ประมาณ 0.0025 องศา ซึ่งเป็นค่าที่ไม่สูงมาก และทำให้มั่นใจในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในระดับหนึ่ง

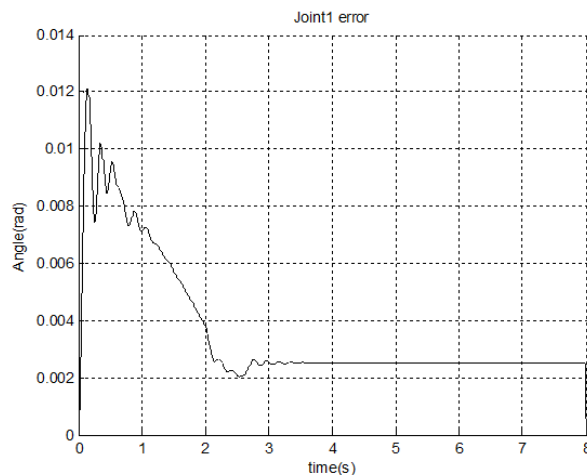
จากรูปที่ 8 แสดงผลของการเปรียบเทียบสัญญาณอ้างอิงที่ใส่ให้ระบบกับสัญญาณการขับเคลื่อนตัวที่ 2 ที่ได้จากการ simulation โดยเลือกค่าเกน  $K_p = 800$  และค่าเกน  $K_d = 2$  จากการทำการจำลองเราสามารถหาค่าความผิดพลาดระหว่างทั้ง 2 สัญญาณได้ดังแสดงในรูปที่ 9 ซึ่งจะเห็นว่าค่าความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวหรือค่า steady state error มีค่าอยู่ที่ประมาณ 0.0018 องศา

ในทำนองเดียวกัน จากรูปที่ 10 แสดงค่าสัญญาณ  $\delta_{1y}$  (displacement deformation) จากการเลือกค่าเกน  $K_{p1} = 0.1$  และค่าเกน  $K_{d1} = 10$  โดยมีค่าสัญญาณของความผิดพลาดที่หาได้จากการทำการจำลองดังรูปที่ 6.19 และจะพบค่าสัญญาณความผิดพลาดของ  $\delta_{1y}$  จะเข้าสู่ค่าศูนย์ที่ประมาณ 3.5 วินาที และจากรูปที่ 12 แสดงค่าสัญญาณ  $\delta_{2y}$  (displacement deformation) จากการเลือกค่าเกน  $K_{p1} = 1$  และค่าเกน  $K_{d1} = 0$  โดยมีค่าสัญญาณของความผิดพลาดดังรูปที่ 13 พบว่าค่าสัญญาณความผิดพลาดของ  $\delta_{2y}$  จะเข้าสู่ค่าศูนย์ที่ประมาณ 4 วินาทีและจะมีการสั่นมากกว่าก้านต่อโยงที่ 1 เนื่องจากการต่อโยงที่ 4 มีขนาดที่ยาวกว่า และจากที่สรุปในการทดลองในหัวข้อที่แล้ว เราได้สรุปว่าความสั่นไหวเกิดจากก้านข้อต่อที่ 4 มากกว่าก้านข้อต่อที่ 1 ซึ่งในการจำลองการทำงานนี้ก็ให้ผลเช่นเดียวกันกับการ

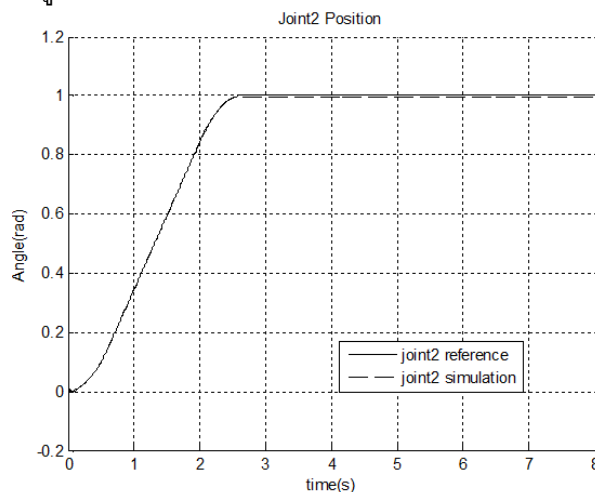
ทดลองจริงที่ใช้หาค่าความถี่ธรรมชาติของแขนหุ่นยนต์แบบยืดหยุ่นนี้ ดังนั้น จากผลการทดลองที่กล่าวมาข้างต้นพอจะสรุปได้ว่าสมการพลศาสตร์ที่เป็นสมการลดรูปที่หาได้จากหัวข้อ 4 มีความเหมาะสมสำหรับการนำไปใช้ในการออกแบบตัวควบคุมขั้นสูงต่อไป



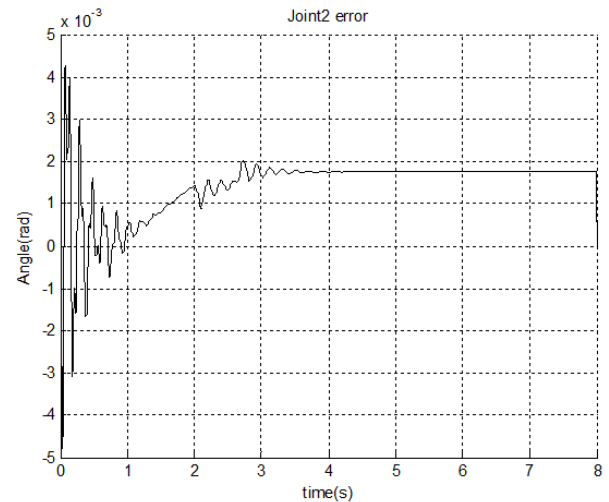
รูปที่ 6 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่มอเตอร์ 1 ระหว่างสัญญาณอ้างอิงกับสัญญาณที่ได้จากการ simulation



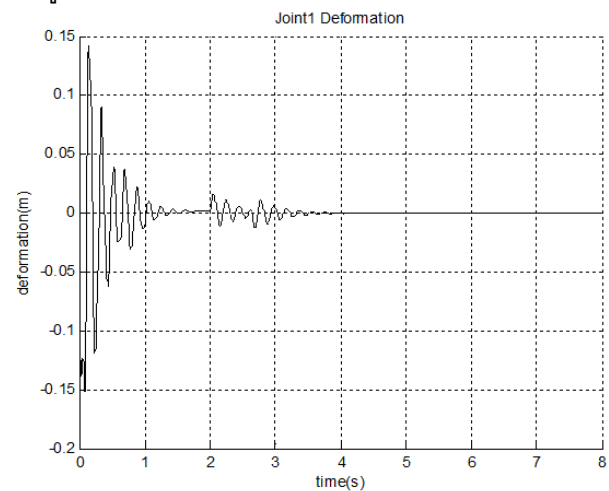
รูปที่ 7 ค่าความผิดพลาดของการเคลื่อนที่มอเตอร์ 1



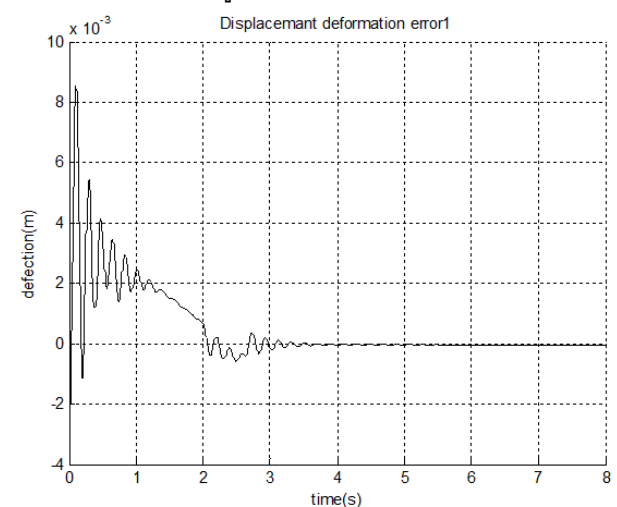
รูปที่ 8 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่มอเตอร์ 2 ระหว่างสัญญาณอ้างอิงกับสัญญาณที่ได้จากการ simulation



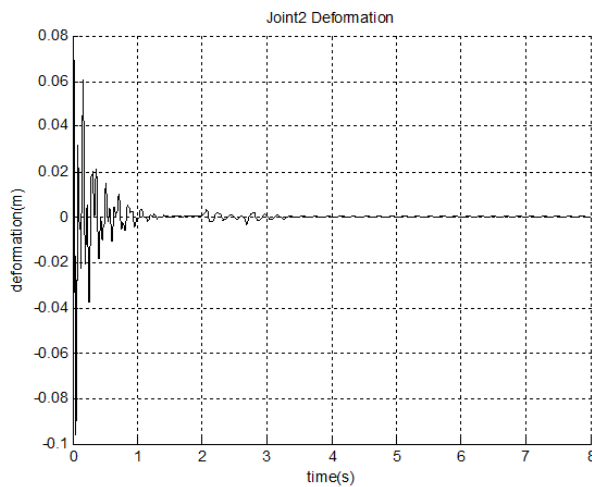
รูปที่ 9 ค่าความผิดพลาดของการเคลื่อนที่มอเตอร์ 2



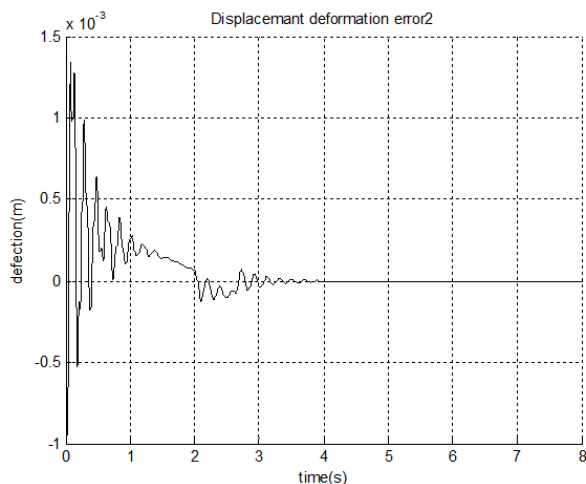
รูปที่ 10 ค่า displacement deformation ของก้านต่อโยงที่ 1 ถูกขับโดยมอเตอร์ 1



รูปที่ 11 ค่าความผิดพลาด displacement deformation ของก้านต่อโยงที่ 1 ถูกขับโดยมอเตอร์ 1



รูปที่ 12 ค่า displacement deformation ของก้านต่อโยงที่ 4 ถูกขับโดยมอเตอร์ 2



รูปที่ 13 ค่าความผิดพลาด displacement deformation ของก้านต่อโยงที่ 4 ถูกขับโดยมอเตอร์ 2

## 6. บทสรุป

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการออกแบบและสร้างแขนกลแบบยืดหยุ่นที่มีการเคลื่อนที่ใน 2 ทิศทาง ในระบบแนวตั้ง เพื่อให้สามารถใช้งานระยะเอื้อมไกล แขนกลดังกล่าวจะมีความยืดหยุ่น 2 ก้านต่อโยงคือก้านต่อโยงที่ 1 และก้านต่อโยงที่ 4 โดยที่ก้านต่อโยงที่ 4 จะเป็นก้านต่อโยงที่ยาวที่สุด แขนกลที่สร้างขึ้นมีโครงสร้างในการขับเคลื่อนเป็นกลไกแบบ five bar-linkage และมีมอเตอร์แบบขับเคลื่อน 2 ตัวจะติดตั้งอยู่ที่ฐานของแขนกล มอเตอร์ขับเคลื่อนตัวที่ 1 จะขับเคลื่อนก้านต่อโยงที่ 4 โดยขับเคลื่อนผ่านก้านต่อโยงที่ 3 และมอเตอร์ขับเคลื่อนตัวที่ 2 จะขับเคลื่อนก้านต่อโยงที่ 4 โดยขับเคลื่อนผ่านก้านต่อโยงที่ 1 ในงานวิจัยนี้จะหาสมการทางพลศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของแขนกลแบบยืดหยุ่นนี้เพื่อสำหรับใช้

ในการออกแบบระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะใช้ระบบแกนพิกัดที่เหมาะสมสำหรับการติดตั้งอุปกรณ์ตรวจวัดความเร่ง (accelerometer) ที่ปลายแขนของก้านต่อโยงที่ 4 สมการพลศาสตร์ที่ได้นั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการปริภูมิสถานะ (State variable description) มีการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องหรือความเหมาะสมของสมการพลศาสตร์ที่หามาได้ เพื่อใช้สำหรับการออกแบบระบบควบคุมขั้นสูงแบบอื่นต่อไป จากผลของการทดลองสามารถสรุปผลได้ ดังนี้

การทดสอบสมการพลศาสตร์ด้วยการ simulation เป็นการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่หามา โดยการนำสมการปริภูมิสถานะ จากหัวข้อที่ 4 มาทำการ simulation ในคอมพิวเตอร์ และมีเงื่อนไขว่า สามารถวัดค่าตัวแปรได้ทุกตัวแปรสถานะ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางพลศาสตร์ที่หามาได้จากสมมติฐานโดยการใช้ระบบควบคุมแบบ PD-control ในการควบคุมตำแหน่งข้อต่อหรือแกนหมุนของมอเตอร์และตำแหน่งของปลายแขนกล จากผลการทดลองพบว่าก้านต่อโยงที่ 4 จะมีการสั่นมากกว่าก้านต่อโยงที่ 1 เนื่องจากขนาดที่ยาวกว่า และพบว่าระบบควบคุมแบบ PD-control ที่เลือกใช้ในการควบคุมสามารถควบคุมตำแหน่งของปลายแขนกลได้ โดยค่าสัญญาณความผิดพลาดของ  $\delta_{1y}$  และ  $\delta_{2y}$  จะเข้าสู่ค่าศูนย์ จึงสรุปได้ว่าสมการพลศาสตร์ที่เป็นสมการลดรูปที่หาได้จากหัวข้อที่ 4 มีความเหมาะสมสำหรับการนำไปใช้ในการออกแบบตัวควบคุมขั้นสูงต่อไป

## 7. เอกสารอ้างอิง

- [1]. วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ (2548). การควบคุมระบบพลศาสตร์, พิมพ์ครั้งที่ 2, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,
- [2]. นายจิรพงศ์ วชิราธนาภรณ์ (2544). การหาค่าพารามิเตอร์ของแขนกลความเร็วสูงแบบออนไลน์, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี,
- [3]. นายพลรัฐ ฐนการพาณิชย์ (2542). การออกแบบแขนกลที่ทำงานด้วยความเร็วสูง, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี,

มหาวิทยาลัย ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะ  
วิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

[4]. Wayne, B., Practical Models for Practical  
Flexible Arms, Georgia Institute of Technology

[5]. Tsuneo, Y., Hiroki, M. and Koh, H., Modeling  
and control of a three degree of freedom  
manipulator with two flexible links , Division of  
applied systems science, Faculty of engineering,  
Kyoto University

[6]. Somolinos, J.A., Feliu, V. and Sanchez, L.,  
Design dynamic modeling and experimental  
validation of a new three-degree-of-freedom  
flexible arm , Dept. of integrated electrical,  
electronic and automation, UCLM, Campus  
University, Spain

[7]. Sciavicco, L. and Siciliano, B., (1996).  
Modeling and Control of Robot Manipulators, Int.  
Edition.