การศึกษาการกระจายความเค้นบนทรงกระบอกกลมตันภายใต้การกดอัดโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

An Evaluation of Stress Distribution in the Solid Circular Cylinder Compression using FEM

สุภกิจ รูปขันธ์ และ สุรสิทธิ์ ปิยะศิลป์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น 40002
โทร. +66-43-244296 ต่อ 125, โทรสาร +66-43-245878, E-mail: supakit_r@hotmail.com, surasith@kku.ac.th

Supakit Rooppakhun and Surasith Piyasin
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University, Khon Kaen, 40002, Thailand.
Tel. +66-43-244296 Ext. 125 Fax: +66-43-245878, E-mail: supakit_r@hotmail.com, surasith@kku.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการกระจายค่าความเค้นบนทรงกระบอกกลมตันภายใต้การรับภาระกดอัด โดยศึกษาถึงทฤษฎีและการคำนวณเชิงตัวเลข ด้วยการสร้างแบบจำลองของทรงกระบอกกลมในรูปแบบ 3 มิติด้วยโปรแกรมทางไฟไนต์เอเลเมนต์ ANSYS 5.4 โดยที่แบบจำลองของงานวิจัยครั้งนี้ได้พิจารณาถึงอิทธิพลของความเค้นสัมผัสที่เกิดขึ้นระหว่างหัวกดกับพื้นผิวทรงกระบอกกลม ค่าการกระจายความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์ในแบบจำลองถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลที่คำนวณได้ทางทฤษฎีจากงานวิจัยของ M. AL-Chalabi และ C. L. Huang ผลของการศึกษาพบว่าค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์ทั้ง 2 วิธีมีค่าใกล้เคียงกัน โดยที่ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในแนวรัศมี(σ_r) และแนวเส้นรอบวง(σ_θ) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเค้นในแนวยาว(σ_z) และเมื่อทำการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับภาระที่กระทำของแบบจำลองและทฤษฎีเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดสอบชิ้นงานที่สร้างขึ้น พบว่าค่าที่ได้มีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน

Abstract

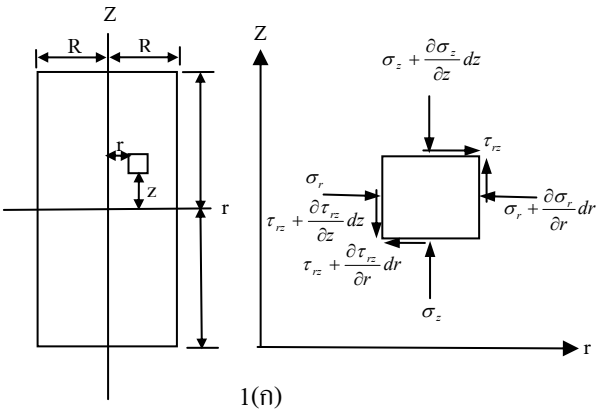
This research is to evaluate the stresses distribution on the solid circular cylinder under compression load. Theory and numerical analysis have been used in the research. The three dimensional finite element model of circular cylinder is created using commercial finite element software (ANSYS 5.4). The contact between machine plate and cylinder surface is considerably. The results of stresses distribution from finite element analysis are likely the same results from the theory (M. AL-Chalabi and C. L. Huang's research). The radial stress (σ_r) and circumferential stress (σ_θ) are the smallest values when compares with the longitudinal stress (σ_z). The relations of strain-load curve from strain gauge technique results are in tending with the result from the numerical analysis and theory.

1. บทนำ

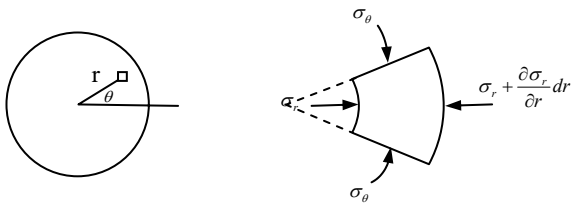
ในการทดสอบสมบัติทางกลของชิ้นงานที่มีลักษณะทรงกระบอกกลมตันภายใต้การกดอัด ข้อมูลการทดสอบที่ได้อาจมีค่าความคลาดเคลื่อน เนื่องจากอิทธิพลของความเค้นสัมผัสที่เกิดขึ้นระหว่างหัวกดและชิ้นงานทดสอบ ซึ่งจะทำให้ค่าการกระจายความเค้นบนชิ้นงานมีลักษณะไม่สม่ำเสมอและจะส่งผลต่อคุณสมบัติทางกล(Poisson's ratio, modulus of elasticity, ultimate strength) ของชิ้นงานที่ทดสอบ โดยที่การวิเคราะห์ในทางทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น[1] ของค่าการกระจายความเค้นและความเครียดในชิ้นงานทรงกระบอกกลมตันที่รับภาระการกดอัดจะสามารถอธิบายได้ แต่ในปัจจุบันเราสามารถใช้โปรแกรมทางไฟไนต์เอเลเมนต์มาช่วยในการวิเคราะห์ซึ่งจะทำให้มีความรวดเร็วและสะดวก ดังนั้นคณะผู้วิจัยจึงทำการศึกษาค่าการกระจายความเค้นและทำการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับภาระที่กระทำของแบบจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ โดยนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทางทฤษฎีและค่าที่ได้จากการทดสอบชิ้นงานจริง

2. ทฤษฎี

การวิเคราะห์ในทางทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นกรณีทรงกระบอกกลมรับภาระแบบสมมาตรรอบแกน ส่วนประกอบความเค้นในระบบพิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) แสดงในรูปที่ 1(ก) และ 1(ข)



1(ก)



2(ข)

รูปที่ 1 แสดงระบบพิกัดและความเค้นในทรงกระบอกกลม

โดยที่ r, θ และ z คือ พิกัดของเอเลเมนต์ใดๆ ที่พิจารณา

H, R คือ ความสูงและรัศมีของทรงกระบอก

σ_r, σ_θ และ σ_z คือ ค่าความเค้นในแนว r, θ, z ตามลำดับ

τ_{rz} คือ ค่าความเฉือนในระนาบ rz

สำหรับปัญหาสมมาตรรอบแกน ส่วนประกอบความเค้นและความเครียดที่มีค่าเท่ากับศูนย์ มีดังนี้

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$$

จากงานวิจัยของ M. AL-Chalabi และ C. L. Huang[1] ในการวิเคราะห์การกระจายความเค้นบนทรงกระบอกกลมตันภายตันภาระกดอัด ได้ส่วนประกอบความเค้นตามสมการที่ (1) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_3 + \theta \cdot A(p) + \Delta \cdot B(p) - h(b) \\
\sigma_z &= \sigma_1 + \theta \cdot C(p) + \Delta \cdot D(p) + i(b) \\
\sigma_\theta &= \sigma_3 + \theta \cdot E(p) + \Delta \cdot F(p) - j(b) \\
\tau_{rz} &= \theta \cdot G(s) + \Delta \cdot H(s) + k(b)
\end{aligned} \tag{1}$$

โดยที่ σ_1, σ_3 คือ ค่าความเค้นเฉลี่ยที่กระทำ

θ, Δ คือ ค่าคงที่

$h(b), i(b), j(b)$ และ $k(b)$ คือ ฟังก์ชันในรูป Bessel

$A(p), B(p), C(p), D(p), E(p)$ และ $F(p)$ คือ ฟังก์ชันพหุนามในรูปของ H, z, R และ r

3. ขนาดของชิ้นงานทดสอบ

การออกแบบเพื่อหาขนาดของชิ้นทดสอบ จะพิจารณาให้มีลักษณะเป็นเสาสั้น[2] และมีความสามารถรับภาระขนาด 1 ตัน โดยเลือกใช้เหล็ก St.42 ที่มีสมบัติทางกลดังนี้

ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $(E) = 210\ GPa$,

อัตราส่วนบัวซอง $(\upsilon) = 0.3$,

ความเค้นคราก $(\sigma_y) = 255 MPa$

จากการวิเคราะห์ตามสมการที่ (2) และ (3)

$$\sigma_d = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{F}{A} \tag{2}$$

$$L_e / r \le 30 \tag{3}$$

โดยที่ σ_d คือ ค่าความเค้นออกแบบ

σ_y คือ ค่าความเค้นคราก(Yield stress)

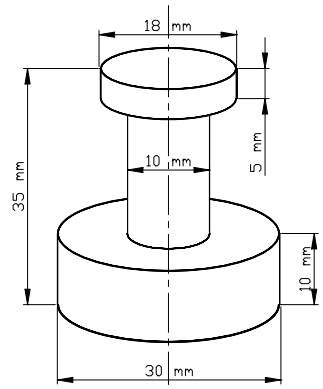
L_e / r คือ อัตราส่วนความเพรียว(Slenderness ratio)

F, A คือ แรงและพื้นที่ที่รับภาระตามลำดับ

N คือ ค่าเผื่อความปลอดภัย(เลือกใช้เท่ากับ 2)

ได้ขนาดของชิ้นทดสอบแสดงตามรูปที่ 2 ดังนี้

เส้นผ่านศูนย์กลางเสาเท่ากับ	10	มม.
เส้นผ่านศูนย์กลางส่วนหัวเท่ากับ	36	มม.
เส้นผ่านศูนย์กลางส่วนฐานเท่ากับ	60	มม.
ความยาวของเสาเท่ากับ	20	มม.
ความหนาของส่วนหัวเท่ากับ	5	มม.
ความหนาของส่วนฐานเท่ากับ	10	มม.

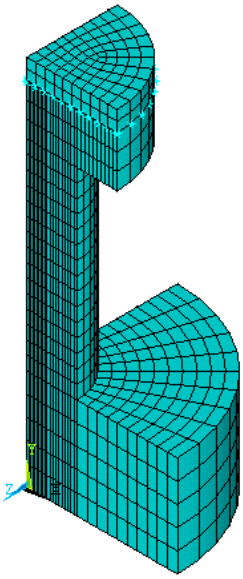


รูปที่ 2 แสดงขนาดของโครงสร้างชิ้นทดสอบที่ได้ออกแบบ

4.แบบจำลองโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

4.1 การสร้างแบบจำลอง

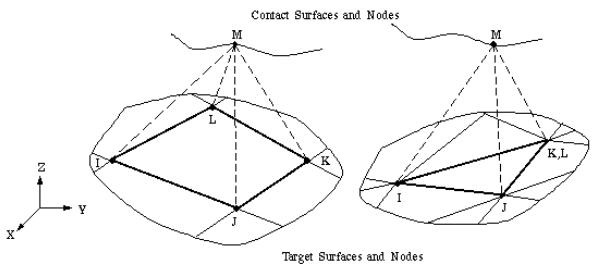
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ถูกนำมาใช้เพื่อวิเคราะห์หาค่าการกระจายความเค้นและเครียดตลอดทั้งโครงสร้างของชิ้นทดสอบเพื่อนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการวิเคราะห์โดยทฤษฎีและโดยการทดสอบ ซึ่งรูปร่างของชิ้นทดสอบตามรูปที่ 2 ถูกนำมาสร้างเป็นแบบจำลองโดยโปรแกรมทางไฟไนต์เอเลเมนต์ที่ชื่อว่า ANSYS 5.4 และเนื่องจากรูปร่างของโครงสร้างมีความสมมาตร ดังนั้นเพื่อลดเวลาและจำนวนเอเลเมนต์ในการวิเคราะห์จึงพิจารณาแบบจำลองเพียง 1 ใน 4 ส่วน (ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3)



รูปที่ 3 แสดงแบบจำลองทางไฟไนต์เอเลเมนต์

4.2 ลักษณะของการวิเคราะห์

ในการศึกษาครั้งนี้แบบจำลองของชิ้นทดสอบได้ถูกพิจารณาใช้เอเลเมนต์รูปสี่เหลี่ยมแบบ 8 จุดขั้ว(Solid45) เนื่องจากเป็นเอเลเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ให้ค่าความแม่นยำสูง[3] และพิจารณาอิทธิพลการสัมผัสกันระหว่างหัวกดกับชิ้นทดสอบจึงใช้เอเลเมนต์สัมผัสแบบจุดสัมผัสพื้นผิว (Point-to-surface หรือContact49)[4] ในสร้างแบบจำลองของการสัมผัสดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 แสดงเอเลเมนต์สัมผัสแบบจุดสัมผัสพื้นผิว

โดยพิจารณาค่า Normal Contact Stiffness (K_n) ตามความสัมพันธ์ที่ (4)

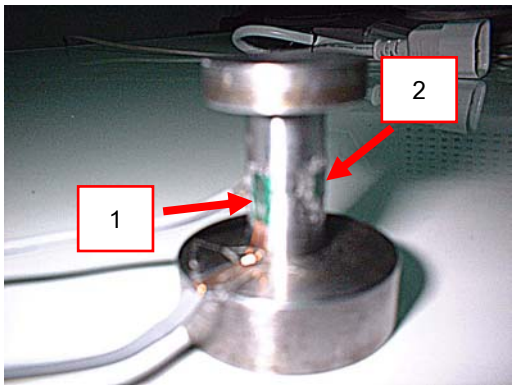
$$K_n = a \times E \qquad (4)$$

โดยที่ค่า K_n นี้จะมีผลต่อการความแม่นยำและการลู่เข้าของคำตอบ ซึ่งจากการศึกษาค่า a ที่เหมาะสมควรมีค่าอยู่ระหว่าง 0.1 ถึง 10[5] ในการศึกษาอิทธิพลการสัมผัสของชิ้นงานซึ่งปัญหาที่มีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นครั้งนี้จึงเลือกใช้ค่าเท่ากับ 0.1

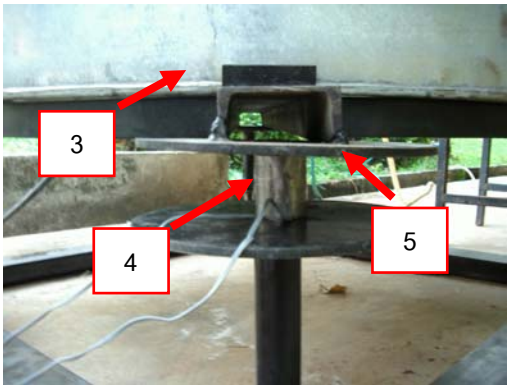
5.ชุดทดสอบและวิธีการทดสอบ

รูปที่ 5, 6 และ 7 แสดงโครงสร้างของชิ้นทดสอบทรงกระบอกกลมที่ได้สร้างขึ้น ตำแหน่งที่ติดสเตนเกจอยู่กึ่งกลางของชิ้นทดสอบ โดยที่สเตนเกจจะอยู่ในแนวแรงที่กระทำและในแนวเส้นรอบวง(จุด 1 และจุด 2 ตามลำดับ) ชุดทดสอบที่ใช้ทดสอบเป็นถังน้ำ ขนาด 1,000 ลิตร หรือ 1 ลูกบาศก์เมตร(จุด 3 ตามรูป)

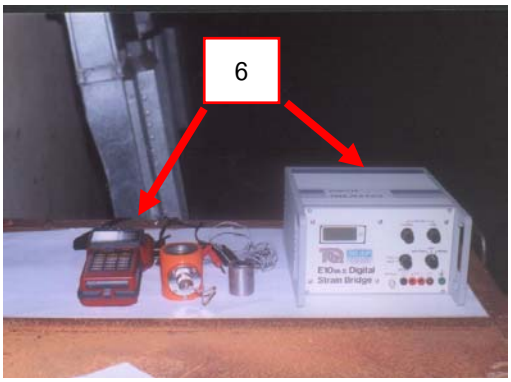
โดยในการทดสอบจะติดตั้งชิ้นทดสอบ(จุด 4 ตามรูป) ที่ประกอบด้วยตัวชิ้นงานและตัวเรือนที่ครอบเผื่อป้องกันอิทธิพลต่างๆ เข้ากับชุดทดสอบที่มีแผ่นกดระหว่างถังกับชิ้นทดสอบ(จุด 5 ตามรูป) และชุดแสดงผล(จุด 6 ตามรูป) ในการทดสอบใช้น้ำหนักตั้งแต่ 0 ถึง 1,000 kg โดยการทดสอบทั้ง Loading และ Unloading



รูปที่ 5 ชิ้นทดสอบที่ได้สร้างขึ้น



รูปที่ 6 การติดตั้งชิ้นทดสอบกับชุดทดสอบ



รูปที่ 7 ชุดแสดงผลการทดสอบ

6. ผลการวิจัย

เนื่องจากตำแหน่งที่ติดสเตนเกจอยู่กึ่งกลางของโครงสร้างชิ้นทดสอบ เพื่อสะดวกในการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการวิเคราะห์กับผลจากการทดสอบ งานวิจัยนี้จึงศึกษาผลที่ได้ ณ ตำแหน่งที่ติดสเตนเกจเท่านั้น ซึ่งผลการวิจัยแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อดังนี้

6.1 ผลจากทฤษฎี

จากผลการศึกษาโดยทฤษฎีได้ค่าความเค้นและค่าความเครียดที่ภาระต่างๆ ซึ่งแสดงในตารางที่ 1 และตารางที่ 2 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 ค่าความเค้นจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี

load(kg)	ความเค้น(Mpa)		
	σ_r	σ_z	σ_θ
0	0	0	0
100	0.00000890	-3.85	0.00000403
200	0.000017815	-7.71	0.000008077
300	0.000026711	-11.5599	0.00001211
400	0.00003563	-15.4199	0.000016154
500	0.000044528	-19.2699	0.000020188
600	0.000053446	-23.1299	0.000024231
700	0.00006234	-26.9799	0.000028264
800	0.000071261	-30.8399	0.000032308
900	0.000080155	-34.6898	0.000036341
1000	0.000089052	-38.5398	0.000040374

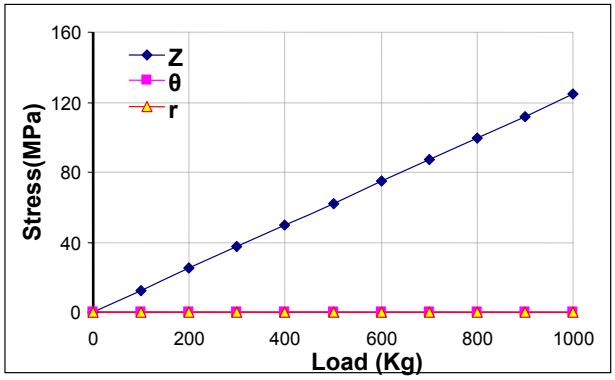
ตารางที่ 2 ค่าความเครียดจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี

load(kg)	ความเครียด($\mu\varepsilon$)		
	ε_r	ε_z	ε_θ
0	0	0	0
100	5.4999	-18.333	5.4999
200	11.014	-36.714	11.014
300	16.514	-55.047	16.514
400	22.028	-73.428	22.028
500	27.528	-91.761	27.528
600	33.042	-110.14	33.042
700	38.542	-128.48	38.542
800	44.057	-146.86	44.057
900	49.557	-165.19	49.557
1000	55.057	-183.52	55.057

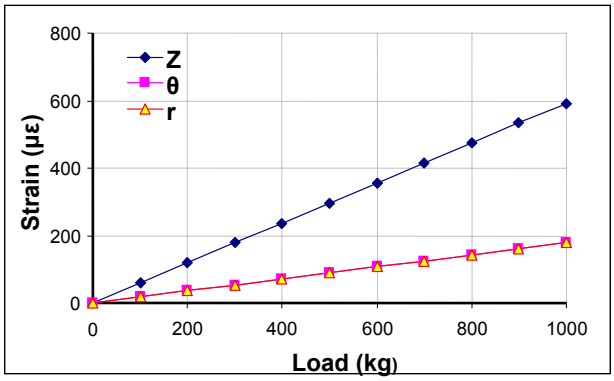
ซึ่งพบว่าค่าความเค้นในแนวรัศมี(σ_r) จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความเค้นในแนวเส้นรอบวง (σ_θ) โดยที่ค่าความเค้นทั้ง 2 แนวจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าความเค้นในแนวยาว (σ_z) นอกจากนี้พบว่าค่าความเครียดในแนวรัศมี (ε_r) และในแนวเส้นรอบวง (ε_θ) จะมีค่าเท่ากันโดยจะมีค่าน้อยกว่าค่าความเครียดในแนวยาว (ε_z)

6.2 ผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

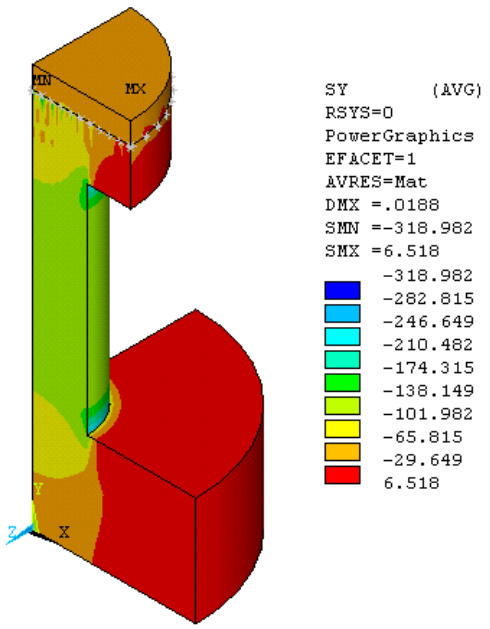
จากผลการศึกษาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ได้ค่าความเค้นและค่าความเครียดบนระนาบแกนต่างๆ ที่ภาระใดๆ ดังแสดงในรูปที่ 8 และ 9 ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่าผลการกระจายของความเค้นในแนวยาว(σ_z) บนชิ้นงานเป็นไปตามรูปที่ 10



รูปที่ 8 ค่าความเค้นตามแนวแกนต่างๆ โดย FEM



รูปที่ 9 ค่าความเครียดตามแนวแกนต่างๆ โดย FEM



รูปที่ 10 การกระจายความเค้นบนชิ้นงานในแนวแกน Z

ซึ่งพบว่าค่าความเค้นในแนวรัศมีและค่าความเค้นในแนวเส้นรอบวงมีค่าเท่ากันและจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าความเค้นในแนวยาว ค่าความเครียดในแนวรัศมีและค่าความเครียดในแนวเส้นรอบวงมีค่าเท่ากัน นอกจากนี้พบว่าการกระจายความเค้นในแนวยาวบริเวณตรงกลางชิ้นงาน ณ ตำแหน่งที่ติดสเตนเกจจะมีค่าที่เท่ากันตามแนวรัศมี

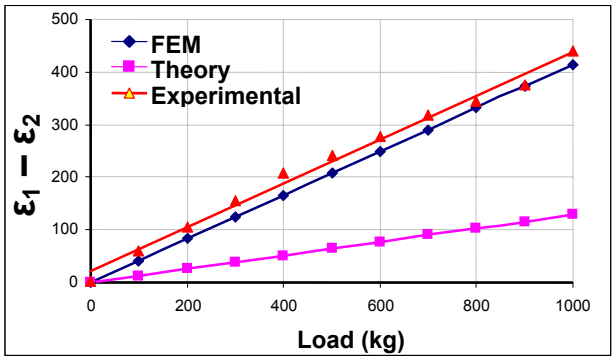
6.3 ผลจากการทดสอบชิ้นงานที่สร้างขึ้น

จากการทดสอบการกดอัดชิ้นงานที่สร้างขึ้นทั้งการ Loading และ Unloading ได้ผลแสดงตามตารางที่ 5

ตารางที่ 5 แสดงผลที่ได้จากการทดสอบ

load(kg)	load($\mu\varepsilon$)		Unload($\mu\varepsilon$)	
	$\varepsilon_1(\varepsilon_z)$	$\varepsilon_2(\varepsilon_\theta)$	$\varepsilon_1(\varepsilon_z)$	$\varepsilon_2(\varepsilon_\theta)$
0	0	0	-22	-27
100	-62	-8	-102	-35
200	-122	-18	-164	-58
300	-188	-31	-222	-69
400	-242	-33	-278	-71
500	-288	-47	-323	-79
600	-324	-43	-357	-82
700	-383	-57	-398	-90
800	-415	-74	-431	-85
900	-461	-85	-461	-85
1000	-528	-89	-538	-99

จากผลการวิจัยเมื่อนำค่าความเครียดที่ภาระต่างๆ จากทั้ง 3 วิธี มาหาค่าผลต่างความเครียดหลัก($\varepsilon_1 - \varepsilon_2$) จะได้ผลตามรูปที่ 11



รูปที่ 11 แสดงการเปรียบเทียบค่าผลต่างความเครียดหลักที่ภาระต่างๆ

ซึ่งพบว่าค่าผลต่างความเครียดหลักที่ได้ทั้ง 3 วิธี มีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน กล่าวคือเมื่อภาระที่กระทำเพิ่มขึ้นค่าผลต่างความเครียดก็จะเพิ่มขึ้น ซึ่งสามารถดูได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงผลต่างความเครียดที่ภาระใดๆมีค่าคงที่ โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงผลต่างความเครียดที่ภาระต่างจากการทดสอบ, ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ และโดยทฤษฎีมีค่าเท่ากับ 0.439, 0.4144 และ 0.128 ตามลำดับ นอกจากนี้พบว่าผลการวิเคราะห์ค่าความเค้นและค่าความเครียดในทางทฤษฎีจะมีค่าต่ำกว่าทั้งสองวิธี ทั้งนี้เนื่องจากอิทธิพลความเค้นที่เกิดจากการรับภาระในแนวแกน z ซึ่งวิธีทางไฟไนต์เอเลเมนต์และการทดลองจะมีการรับภาระโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นบริเวณที่มีการลดพื้นที่หน้าตัดจากส่วนหัวและส่วนเสาด้วย

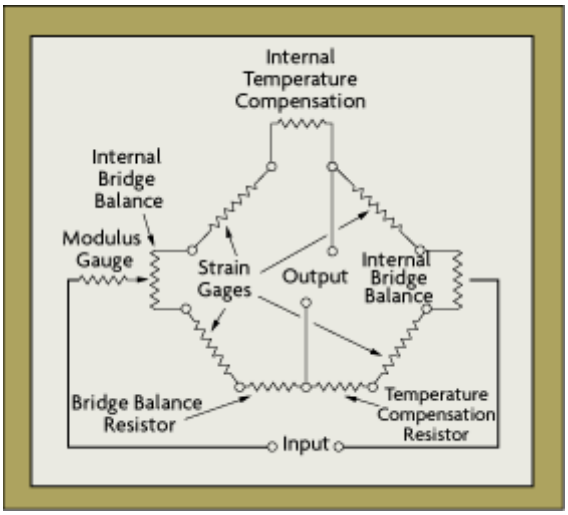
6.วิเคราะห์ผลการวิจัย

6.1 การวิเคราะห์ค่าความเค้นที่ได้จากการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอเลเมนต์และโดยทฤษฎีพบว่า ค่าความเค้นในแนวยาวมีค่าสูงกว่าความเค้นในแนวรัศมีและความเค้นในแนวเส้นรอบวงค่อนข้างมาก และค่าความเค้นในแนวยาวที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์จะให้ค่าที่สูงกว่าผลที่ได้จากการวิเคราะห์ในทางทฤษฎีประมาณ 3 เท่า เนื่องจาก

อิทธิพลการรับภาระโมเมนต์ดัดในแนวแกนบริเวณที่มีการลดพื้นที่ของชิ้นงาน

6.2 ผลจากการวิเคราะห์ค่าความเครียดจากทั้งสามวิธี พบว่าค่าความเครียดจากการวิเคราะห์จากวิธีการทดสอบและวิธีทางไฟไนต์เอเลเมนต์จะมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี ทั้งนี้เนื่องจากค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์ของทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าทางทฤษฎี นอกจากนี้พบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าผลต่างความเครียดที่ภาระใดๆ ที่ได้ทั้งสามวิธีมีค่าคงที่ โดยที่ผลจากการทดสอบจะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์มากกว่าทางทฤษฎีเช่นกัน ค่าผลต่างความเครียดนี้จะสามารถนำไปคำนวณค่าความไว(Sensitivity) ของชิ้นงานได้ต่อไปภายหน้าได้

6.3 ค่าที่ได้จากการทดลองมีความไม่เป็นเชิงเส้นเนื่องจากค่าที่ได้เป็นการอ่านจากสเตนเกจโดยตรง ซึ่งการปรับเปลี่ยนค่าความเป็นเชิงเส้นสามารถปรับปรุงลักษณะของวงจรบริดจ์ต่อไปภายหน้าเพื่อชดเชยอิทธิพลต่างๆ ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12 ลักษณะวงจรบริดจ์ที่ได้ชดเชยอิทธิพล

6.4 ในการวิเคราะห์การกระจายความเค้นบนชิ้นงานทรงกระบอกกลมภายใต้การกดอัด จากแบบจำลองทาง ไฟไนต์เอเลเมนต์โดยการพิจารณาอิทธิพลจากความเค้นสัมผัสที่ภาระต่างๆ สามารถนำไปใช้ในการศึกษาและเป็นข้อมูลในการออกแบบชิ้นงานหรือโครงสร้างที่มีการรับภาระกดอัด เพื่อช่วยลดเวลาและลดค่าใช้จ่ายในการทดลองจริง

7. สรุปผล

จากการศึกษาพบว่าค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์โดยทฤษฎีและระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์มีลักษณะเดียวกันคือ ความเค้นที่ในแนวรัศมี(σ_r) และแนวเส้นรอบวง (σ_θ) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเค้นในแนวยาว (σ_z) และค่าความเครียดในแนวรัศมี (ε_r) และแนวเส้นรอบวง (ε_θ) ของทั้ง 2 วิธีจะให้ค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้ผลการทดสอบชิ้นงานที่ได้สร้างขึ้นเพื่อเปรียบเทียบกับผลที่คำนวณได้ทางทฤษฎีและระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ พบว่าแนวโน้มของค่าผลต่างความเครียดหลักที่ได้มีลักษณะไปทางเดียวกันและค่าที่ได้มีความเป็นเชิงเส้นพอสมควร

8. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยขอนแก่นที่ให้ทุนสนับสนุนงานวิจัยครั้งนี้

9. เอกสารอ้างอิง

[1] M. Al-Chalabi, C.L. Huang. **Stress Distribution within Circular Cylinders in Compression**. Int. J. Rock Mech Min. Sci.& Geomech 1974., Vol.11, pp 45-56

[2] A.C. Ugural and S.K. Fenster. **Advanced Strength and Applied Elasticity**. 2nd ed. Elsevier. Pub. Co.1987

[3] ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน. **ผลกระทบของไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดลต่อผลคำตอบที่คำนวณได้(2).** วารสาร Mechanical Technology. พฤษภาคม 2545

[4] ANSYS Verification Manual. VM191: **Hertz Contact Between Two Cylinders**

[5] David H. Johnson, P.E. **Principles of Simulating Contact between Parts using ANSYS**. http://www.ansys.com/

[6] The technical Staff of Measurements Group. **Strain gage Based Transducers**. Raleigh, North Carolina 27611, USA.1998