

การออกแบบตัวควบคุมแบบปรับตัวได้ชนิดโมเดลอ้างอิงสำหรับระบบลูกตุ้มผกผัน

Model Reference Adaptive Control Design for Inverted Pendulum System

ณัฐพงษ์ จิตมานะ*¹ และมนูศักดิ์ จานทอง¹

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล รัตนบุรี 39 หมู่ 1 ถ.รังสิต-นครนายก ต.คลองหก อ.รัตนบุรี

จ.ปทุมธานี 12110

*ติดต่อ: โทร 0-2549-3433 โทรสาร 0-2549-3432

E-mail: riot_new@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพของระบบลูกตุ้มผกผัน ซึ่งระบบลูกตุ้มผกผันเป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้นและไม่เสถียรภาพ โดยระบบที่ใช้ในการทดลองจะประกอบไปด้วยลูกตุ้มผกผันยึดติดกับรางเลื่อน ตัวรางเลื่อนใช้เซอร์โวมอเตอร์ในการขับเคลื่อนและใช้เอ็นโคเดอร์วัดตำแหน่งการเคลื่อนที่ นอกจากนี้ยังใช้กล้องความเร็วสูงในการตรวจจับตำแหน่งปลายของลูกตุ้มเพื่อวัดมุมเอียง ส่วนตัวควบคุมการรักษาเสถียรภาพของระบบจะถูกออกแบบด้วยหลักการควบคุมแบบปรับตัวได้ชนิดโมเดลอ้างอิง (Model Reference Adaptive Control) การใช้ตัวควบคุมแบบปรับตัวได้ จะทำให้ค่าอัตราขยายที่ได้จากระบบแบบป้อนกลับมีการปรับค่าตัวเองตามสภาพของระบบซึ่งต่างจากการควบคุมที่มีค่าอัตราขยายคงที่ ทำให้ระบบมีความยืดหยุ่นมากยิ่งขึ้น โดยการทดลองแบ่งเป็นการรักษาเสถียรภาพของระบบและการติดตามตำแหน่งของรางเลื่อน โดยเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQR ซึ่งเป็นการควบคุมแบบมีค่าอัตราขยายคงที่ จากผลการทดลองพบว่าตัวควบคุม LQR และ MRAC สามารถควบคุมให้ลูกตุ้มตั้งตรงอยู่ได้ ส่วนการทดลองการติดตามตำแหน่งตัวควบคุม MRAC สามารถควบคุมให้รางติดตามตำแหน่งได้ใกล้เคียงกับตำแหน่งอ้างอิงมากกว่าตัวควบคุม LQR แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่มีค่าอัตราขยายปรับตัวได้สามารถควบคุมตำแหน่งได้ดีกว่าตัวควบคุมแบบมีค่าอัตราขยายคงที่

คำหลัก: ลูกตุ้มผกผัน, ระบบไม่เป็นเชิงเส้น, การควบคุมแบบปรับตัว

Abstract

This paper presents the controller design for stabilizing the inverted pendulum system which is non-linear and unstable system. The inverted pendulum used in the experiment was mounted on the linear drive transmission which was driven by servomotor and measured its position by encoder. In order to measure the tilt angle a high speed camera was implemented. In this paper, Model Reference Adaptive Control (MRAC) technique was designed for controlled the inverted pendulum system. The adaptive controller will adapt the gain of state feedback system which is difference from the fixed gain controller and makes the system more flexible. The experiments can be divided into 2 parts as stabilizing the

inverted pendulum and tracking the position of linear drive transmission which their results were compared with a fixed gain controller as LQR controller. From the experiments shown that the LQR and MRAC controllers can stabilize the inverted pendulum into upright the position. For the tracking position result, MRAC can control the position of the cart for tracking the reference position better than the LQR controller. It means, the adaptive gain controller is able to adjust the gain for controller the position better than the fixed gain controller.

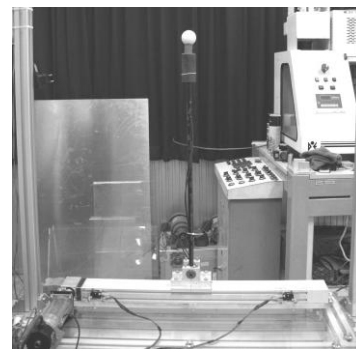
Keywords: Inverted pendulum, Non-linear system, Adaptive control

1. บทนำ

ระบบลูกตุ้มผกผัน เป็นเครื่องมือที่ได้รับความนิยมในการนำมาศึกษาระบบควบคุม ในงานทางด้านวิศวกรรม เนื่องจากระบบลูกตุ้มผกผันเป็นระบบที่มีข้อศึกษาอยู่หลายประการ เช่น เป็นระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น เป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ เป็นต้น จึงเหมาะแก่การนำมาศึกษาเพื่อออกแบบตัวควบคุม ซึ่งรูปแบบของลูกตุ้มผกผันที่นำมาศึกษานั้น มีอยู่หลายรูปแบบ เช่น ระบบลูกตุ้มผกผันแบบรถราง ซึ่งประกอบด้วยตัวควบคุมพีดี ใช้สำหรับควบคุมตำแหน่งรถรางในการเหวี่ยงขึ้นของลูกตุ้ม จากสมดุลล่างขึ้นไปยังจุดสมดุลบนและตัวควบคุมแบบสไลด์ดิงโหมด ใช้สำหรับรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้ม [1] ระบบลูกตุ้มผกผันแบบฐานหมุน ลูกตุ้มจะถูกเหวี่ยงขึ้นโดยการหมุนของฐาน ซึ่งปลายด้านหนึ่งต่อกับก้านของลูกตุ้ม ซึ่งตัวควบคุมการเหวี่ยงขึ้นจะถูกออกแบบด้วยหลักการควบคุมพลังงาน ส่วนตัวควบคุมการรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้ม จะใช้ตัวควบคุมเซอร์โวป้อนกลับสถานะ ร่วมกับออบเซอร์เวอร์แบบอันดับต่ำสุด ที่ถูกออกแบบด้วยวิธีการกำหนดอัตราส่วนคุณลักษณะ [2]

หัวข้อหลักในงานวิจัยระบบลูกตุ้มผกผัน จะมีอยู่สองหัวข้อหลักคือ การรักษาสมดุลให้ลูกตุ้มตั้งตรงอยู่ได้ และการติดตามตำแหน่งขณะรักษาสมดุล ซึ่งในงานวิจัยนี้ ผู้ทำการวิจัยใช้ระบบลูกตุ้มผกผันแบบรถรางเป็นแบบจำลองในการวิจัย ซึ่งเป็นการศึกษาระบบที่ไม่ซับซ้อนมากนัก เพื่อให้เข้าใจต่อระบบการทำงานของระบบที่ไม่มีเสถียรภาพได้โดยง่าย โดยในการวิจัยนี้ใช้การควบคุมแบบปรับตัวได้ชนิด Model

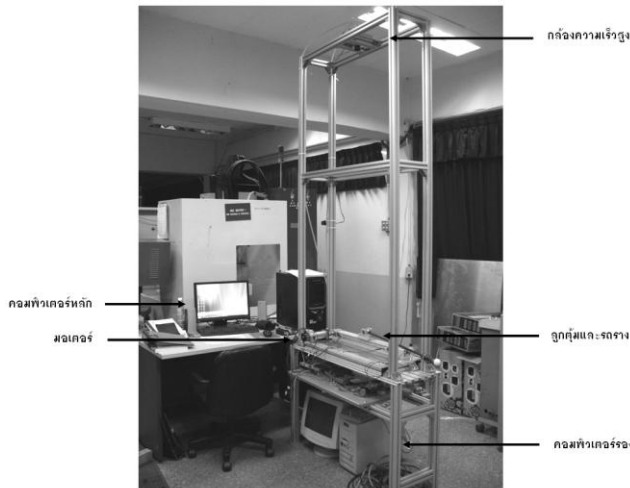
Reference Adaptive Control (MRAC) ซึ่งเป็นการควบคุมแบบแปรผันตามสภาพการณ์ของระบบ จึงมีความยืดหยุ่น และมีความเหมาะสมต่อระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น



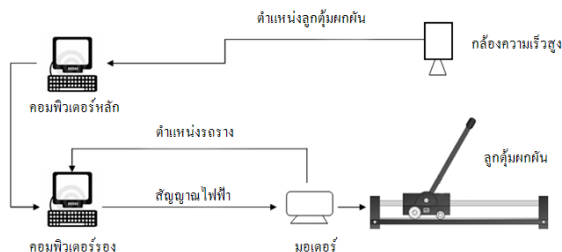
รูปที่ 1 ระบบลูกตุ้มผกผัน

2. ระบบลูกตุ้มผกผันที่ใช้ในการทดลอง

ในระบบลูกตุ้มผกผัน ที่ใช้ในการทดลองจะประกอบไปด้วยส่วนประกอบสำคัญคือ 1.ลูกตุ้ม 2.รางเลื่อนและรถราง 3.ไดร์และมอเตอร์ 4.กล่องความเร็วสูง 5.คอมพิวเตอร์ โดยมีระบบดังนี้



รูปที่ 2 ระบบลูกตุ้มผกผันที่ใช้ในการทดลอง
ในการทดลองจะใช้รางเลื่อนแบบเชิงเส้น (Linear drive transmission) โดยมีมอเตอร์เป็นตัวขับเคลื่อนรถรางซึ่งต่อกับก้านลูกตุ้ม ที่ปลายลูกตุ้มติดหลอดไฟกลมขนาด 30mm. เป็นตัวอ้างอิงในการวัดมุมเอียงของลูกตุ้มโดยใช้กล้องความเร็วสูงซึ่งติดตั้งอยู่ด้านบนวัดตำแหน่งรถรางโดยใช้เอ็นโค้ดเดอร์ โดยมีโครงสร้างการทำงานดังนี้



รูปที่ 3 โครงสร้างของระบบลูกตุ้มผกผันในการทดลอง

3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 สมการลากรองจ์ (Lagrange's Equation)

สมการลากรองจ์ เป็นสมการกลศาสตร์ดั้งเดิมแบบหนึ่ง ซึ่งเสนอโดย โจเซฟ หลุยส์ ลากรองจ์ (Joseph Louis Lagrange) มีรูปแบบของสมการคือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

เมื่อ L คือ Lagrangian function

q_i คือ Generalized coordinates

Q_i คือ Generalized forces

โดยที่ Lagrangian function คือผลต่างระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ภายในระบบ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (2)$$

เมื่อ T คือ พลังงานจลน์ของระบบทั้งหมด

V คือ พลังงานศักย์ของระบบทั้งหมด

Q_i สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \quad (3)$$

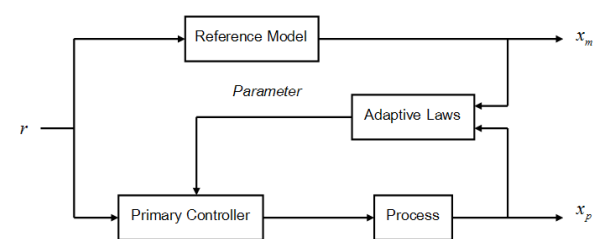
เมื่อ N คือ จำนวนอนุภาคหรือวัตถุในระบบ

$\bar{F}$ คือ เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุในระบบ

$\bar{r}$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคหรือวัตถุในระบบ

3.2 Model Reference Adaptive Control (MRAC)

การควบคุมแบบ Model Reference Adaptive Control (MRAC) มีโครงสร้างดังนี้



รูปที่ 4 โครงสร้าง MRAC

จากรูปที่ 4 กำหนดให้ r เป็นอินพุตอ้างอิงของระบบ โดยโมเดลอ้างอิง (Reference model) มีสัญญาณเอาต์พุตเป็น x_m และสัญญาณเอาต์พุตจากระบบ (Process) เป็นสัญญาณ x_p ส่วนกฎการปรับตัว (Adaptive laws) จะรับค่าจากสัญญาณ x_m และ x_p เพื่อเปรียบเทียบผลตอบสนองจากสัญญาณทั้งสอง ซึ่งผลต่างของสัญญาณทั้งสอง คือค่าความผิดพลาด (Parameter error) โดยนำค่าความผิดพลาดนี้ไปใช้ในกระบวนการปรับตัว ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากกฎการปรับตัวจะเข้าสู่ส่วนควบคุมปฐมภูมิ (Primary controller) โดยกำหนดให้เป็นส่วนของกฎการควบคุม (Control laws) ใช้การควบคุมแบบป้อนกลับ ค่าอัตราขยายที่ได้จะนำไปใช้เพื่อควบคุมระบบ ในส่วน

การออกแบบกฎการปรับตัวผู้วิจัยเลือกใช้ทฤษฎีเสถียรภาพของเลียปูนอฟ (Lyapunov's method)

3.3 การปรับตัวของระบบ MRAC

กำหนดให้กระบวนการเป็นระบบต่อเนื่องเชิงเส้นและสามารถควบคุมได้ (Controllable) ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}\quad (4)$$

เมื่อ $x_p(t)$ คือ เวกเตอร์สถานะของระบบ

$y_p(t)$ คือ เวกเตอร์เอาต์พุตของระบบ

$u(t)$ คือ เวกเตอร์ควบคุมของระบบ

A_p คือ เมทริกซ์สถานะของระบบ

B_p คือ เมทริกซ์อินพุตของระบบ

C_p คือ เมทริกซ์เอาต์พุตของระบบ

โมเดลอ้างอิง (Reference model) จะกำหนดให้รูปแบบเดียวกับกระบวนการ คือ

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\quad (5)$$

เมื่อ $x_m(t)$ คือ เวกเตอร์สถานะของโมเดลอ้างอิง

$y_m(t)$ คือ เวกเตอร์เอาต์พุตของโมเดลอ้างอิง

$r(t)$ คือ เวกเตอร์อินพุตอ้างอิง

A_m คือ เวกเตอร์ของโมเดลอ้างอิง

B_m คือ เมทริกซ์อินพุตของโมเดลอ้างอิง

C_m คือ เมทริกซ์เอาต์พุตของโมเดลอ้างอิง

มีตัวควบคุมแบบสถานะป้อนกลับเป็น

$$u = K_r(t)r(t) - K_x(t)x_p(t)\quad (6)$$

เมื่อ $K_r(t)$ และ $K_x(t)$ คือ ค่าอัตราขยายเมทริกซ์

จากสมการ (6) สามารถเขียนในรูป

$$u = \theta^T \omega\quad (7)$$

เมื่อ $\theta^T = [K_r \ K_x]$ และ $\omega = [r \ x_p]^T$

เมื่อนำสมการ (6) แทนใน (4) ทำให้ได้ระบบควบคุมใหม่เป็น

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_c x_p(t) + B_c r(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}\quad (8)$$

เมื่อ $A_c = A_p - B_p K_x(t)$ และ $B_c = B_p K_r(t)$

สามารถเขียนสมการค่าความผิดพลาด ระหว่างระบบและโมเดลอ้างอิงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}_p(t) - \dot{x}_m(t) \\ &= A_m e(t) + A x_p(t) - B r(t)\end{aligned}\quad (9)$$

เมื่อ $A = A_c - A_m$ และ $B = B_c - B_m$

นำสมการ (7) แทนใน (9) จะได้ระบบของค่าความผิดพลาดคือ

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + B_1 \phi^T \omega\quad (10)$$

เมื่อ $B_1 = [0 \ 0 \dots 1]^T$ และ $\phi^T = [B \ A]$

การเลือกเลียปูนอฟฟังก์ชัน (Lyapunov function) มีรูปแบบเป็นฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) ของผลต่างของสัญญาณ Signal error vector (e) และ Parameter error vector (ϕ) โดยทั่วไปจะเลือกเลียปูนอฟฟังก์ชันให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$V = e^T(t) P e(t) + \phi^T \Gamma^{-1} \phi\quad (11)$$

เมื่อ Γ คือ Adaptive gain matrix

เมื่อต้องการให้ระบบเป็น Asymptotically stable adaptive system $\dot{V}$ ต้องเป็น Negative definite สามารถหา $\dot{V}$ ได้ดังนี้

$$\dot{V} = e^T(t) (A_m^T P + P A_m) e(t) + 2e^T(t) P B_1 \phi^T \omega + 2\phi^T \Gamma^{-1} \dot{\phi}\quad (12)$$

เมื่อ P และ Q ต้องเป็น Positive definite ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยใช้สมการเลียปูนอฟ (Lyapunov equation) คือ

$$A_m^T P + P A_m = -Q\quad (13)$$

ซึ่งจะได้จากเทอมแรกทางขวาของสมการ (12) คือ

$$e^T(t) (A_m^T P + P A_m) e(t) = -e^T(t) Q e(t)\quad (14)$$

เพื่อให้ระบบมีความเสถียร กำหนดให้เทอมที่มี ϕ ทางขวาของสมการ (12) มีค่าเป็นศูนย์

$$2e^T(t) P B_1 \phi^T \omega + 2\phi^T \Gamma^{-1} \dot{\phi} = 0\quad (15)$$

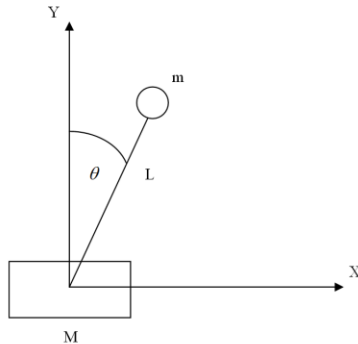
ซึ่งจะได้กฎการปรับตัวคือ

$$\dot{\phi} = -\Gamma e^T(t) P B_1 \omega\quad (16)$$

4.แบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์ของระบบ

4.1 แบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มผกผันและรถราง

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของ ลูกตุ้มและรถรางจะนำทฤษฎีลากรองจ์มาใช้ โดยมี ขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 5 แบบจำลองระบบลูกตุ้มผกผันและรถราง

พิจารณาที่มวล (m)

เวกเตอร์ตำแหน่ง m คือ

$$\vec{r}_m = (x + L \sin \theta) \vec{i} + (L \cos \theta) \vec{j} \quad (17)$$

เวกเตอร์ความเร็ว m คือ

$$\dot{\vec{r}}_m = \dot{x} \vec{i} + L \dot{\theta}^2 \vec{j} + 2L \cos \theta \dot{\theta} \vec{j} \quad (18)$$

พิจารณาที่มวล (M)

เวกเตอร์ตำแหน่ง M คือ

$$\vec{r}_M = x \vec{i} \quad (19)$$

เวกเตอร์ความเร็ว M คือ

$$\dot{\vec{r}}_M = \dot{x} \vec{i} \quad (20)$$

พิจารณาพลังงานที่กระทำต่อระบบ

พลังงานจลน์ของระบบหาได้จาก

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_m^2 \quad (21)$$

พลังงานศักย์ของระบบหาได้จาก

$$V = mgL \cos \theta \quad (22)$$

จะได้พลังงานที่กระทำต่อระบบตามสมการ (2) คือ

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mL \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} - mgL \cos \theta \quad (23)$$

เนื่องจากพิจารณาพิกัดเชิงมุม θ จะไม่มีแรงกระทำ ใดๆ ดังนั้นสมการลากรองจ์คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (24)$$

แทนค่าสมการ (23) ใน (24) จะได้สมการการเคลื่อนที่ ของลูกตุ้มผกผันคือ

$$mL^2 \ddot{\theta} + mL \cos \theta \ddot{x} - mgL \sin \theta = 0 \quad (25)$$

จากนั้นหาสมการเชิงเส้นของระบบ จากสมการ (25) โดยการ Linearization ซึ่งมีตัวแปรของสมการคือ $[\theta \ddot{x}] = [0 \ 0]$ จะได้สมการเชิงเส้นของสมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มผกผันคือ

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \theta - \frac{1}{L} \ddot{x} \quad (26)$$

4.2 แบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์และรถราง

การหาแบบจำลอง สมการทางคณิตศาสตร์ ของมอเตอร์และรถราง ผู้ทำวิจัยได้ใช้ชุดการทดลองที่ ประกอบไปด้วยชุดมอเตอร์ รถรางและรางเลื่อน ดังรูป ที่ 1 โดยทำการทดลองและเก็บข้อมูลจากการทดลอง ไปหาเอกลักษณ์ของระบบ (System identification) โดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์โดยมีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 6 แผนภาพการทำงานของมอเตอร์และซอฟต์แวร์ เพื่อหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ เรา ทำการจ่ายแรงดันไฟฟ้าให้กับมอเตอร์ตั้งแต่ -10V ถึง +10V จากนั้นเก็บข้อมูลสัญญาณเอาต์พุตซึ่งจะได้เป็น ค่าความเร็วของการเคลื่อนที่ $Vel(s)$ และนำสัญญาณ ที่ได้เข้าสู่การหาเอกลักษณ์ของระบบ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ช่วยในการหาค่าโดยมี Transfer function ของระบบคือ

$$G(s) = \frac{Vel(s)}{V(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (27)$$

เมื่อ $Vel(s)$ คือ ความเร็วในการเคลื่อนที่ของรถราง $V(s)$ คือ อินพุตแรงดันไฟฟ้าที่จ่ายให้กับ มอเตอร์

K คือ ค่าอัตราขยาย DC ของระบบ

τ คือ เวลาคงที่ของระบบ

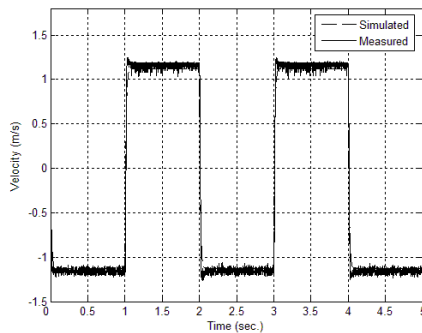
นำสมการ (27) มาอินทิเกรตได้สัญญาณเอาต์พุตเป็น ตำแหน่ง $X(s)$ จะได้ Transfer function ของระบบคือ

$$\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{18.10}{s(s + 80.52)} \quad (28)$$

เมื่อ $X(s)$ คือ ตำแหน่งของรถราง จากสมการ (28) สามารถหาแบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์และรถราง คือ

$$\ddot{x} = 18.10V - 80.52\dot{x} \quad (29)$$

เปรียบเทียบสัญญาณจากแบบจำลอง กับระบบจริง โดยใช้สัญญาณแบบ Step เพื่อดูผลตอบสนอง



รูปที่ 7 ผลตอบสนองสัญญาณเอ้าท์พุทจากการทดลองจริงและแบบจำลอง

4.3 แบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์รวมของระบบ

สามารถหาสมการรวมของระบบ จากการนำแบบจำลองสมการการเคลื่อนที่ (26) ของลูกตุ้มผกผัน และแบบจำลองสมการมอเตอร์และรถราง (29) จะได้

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\theta + \frac{80.52}{L}\dot{x} - \frac{18.10}{L}V \quad (30)$$

สามารถเขียนสมการรวมของระบบให้อยู่ในรูปสมการ State space ได้จาก

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (31)$$

โดยมีตัวแปรสถานะ คือ $[\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$ และอินพุท คือ $[V]$

สามารถเขียนสมการ State space ของระบบรวมได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L} & 0 & 0 & \frac{K_1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_2}{L} \\ 0 \\ K_2 \end{bmatrix} V \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

เมื่อ $K_1 = 80.52$ และ $K_2 = 18.10$

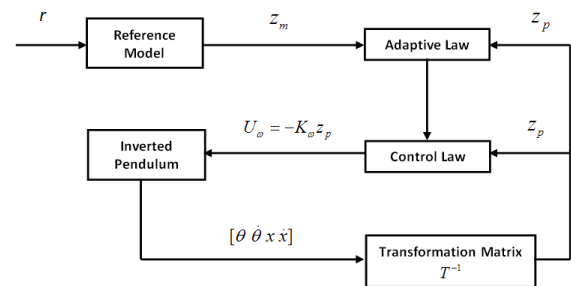
เขียนในรูป Transfer function ได้

$$\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{-K_2 s^3 + \frac{g}{L} K_2 s}{s^4 + K_1 s^3 - \frac{g}{L} s^2 - \frac{g}{L} K_1 s} \quad (33)$$

5. การออกแบบตัวควบคุม

5.1 การออกแบบตัวควบคุม MRAC

การออกแบบตัวควบคุมของระบบ กำหนดตัวแปรอินพุทของระบบ r เท่ากับศูนย์ และมีตัวแปรสถานะออกจากระบบเป็น $[\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$ ซึ่งในการควบคุม MRAC จะใช้โมเดลแบบ Controllable canonical form จึงมีการเปลี่ยนให้เป็นตัวแปรสถานะในโมเดลแบบ Controllable canonical form โดยใช้ Transformation matrix ซึ่งจะได้ตัวแปรสถานะใหม่เป็น z_p โดยโครงสร้างของระบบมีดังนี้



รูปที่ 8 โครงสร้าง MRAC สถานะป้อนกลับ

จาก รูปที่ 8 สัมประสิทธิ์ของสมการคุณลักษณะของโมเดลอ้างอิงถูกเลือกมาจาก ITAE และเขียนให้อยู่ใน Controllable canonical form จะได้เมทริกซ์โมเดลอ้างอิง (Reference model) จากสมการ (5) ซึ่งจะได้ค่า A_m , B_m และ C_m ดังนี้

$$\begin{aligned} A_m &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^4 & -2.7\omega_n^3 & -3.4\omega_n^2 & -2.1\omega_n \end{bmatrix} \\ B_m &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

จากสมการเลี่ยนูป (13) กำหนดเมทริกซ์ Q และ P คือ

$$Q = \begin{bmatrix} -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \quad (36)$$

จากสมการ (16) จะได้กฎการปรับตัวคือ

$$\dot{K}_\omega(t) = -[p_{14}e(t) + p_{24}\dot{e}(t) + p_{34}\ddot{e}(t) + p_{44}\dddot{e}(t)] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} z_p(t) \quad (37)$$

เมื่อค่า γ_i เสมือนค่าอัตราเร็วในการปรับตัว
ตัวแปรสถานะ z_p หาได้จาก

$$z_p = T^{-1}[\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T \quad (38)$$

เมื่อ T คือ Transformation matrix
กำหนดกฎการควบคุมคือ

$$U_\omega(t) = -K_\omega(t)z_p(t) \quad (39)$$

เมื่อ K_ω คือ ค่าอัตราขยายป้อนกลับ

ค่าอัตราขยายเริ่มต้น (K_ω) หาได้ตามสมการของ
ระบบลูกตุ้มผกผัน (33) ซึ่งอยู่ใน Controllable
canonical form ตามสมการ (4) จะได้ค่า A_p , B_p และ
 C_p ดังนี้

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g}{L}K_1 & \frac{g}{L}K_2 & K_1 \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_2}{L} & 0 \\ -\frac{g}{L}K_2 & 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

หา Transformation matrix จาก Controllable
canonical form ได้

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_2}{L} \\ -\frac{g}{L}K_2 & 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{L}K_2 & 0 & -K_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

สามารถหาค่า K_ω เพื่อใช้เป็นค่าอัตราขยายเริ่มต้น
โดยใช้ทฤษฎี LQR จาก Controllable canonical form
โดยกำหนดค่า $Q = \text{diag}\{10000 \ 0 \ 1 \ 0\}$ และ $R =$
 0.0001 ซึ่งจะได้ค่าอัตราขยายเริ่มต้น (K_ω) คือ

$$K_\omega = [10000.00 \ 7471.92 \ 1870.26 \ 20.59] \quad (42)$$

5.2 การออกแบบควบคุมสถานะป้อนกลับ

ในการทดลองการควบคุม ระบบลูกตุ้มผกผัน
เบื้องต้นได้ทดลองใช้การควบคุมแบบ Linear quad-
ratic regulator (LQR) ซึ่งเป็นตัวควบคุมแบบมีค่า
อัตราขยายคงที่ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพ
ระหว่างค่าการควบคุมจากตัวควบคุม LQR และ
MRAC สามารถเขียนสมการ State space จากสมการ
(31) และ (33) โดยกำหนด Control law คือ

$$u = -K_x x \quad (43)$$

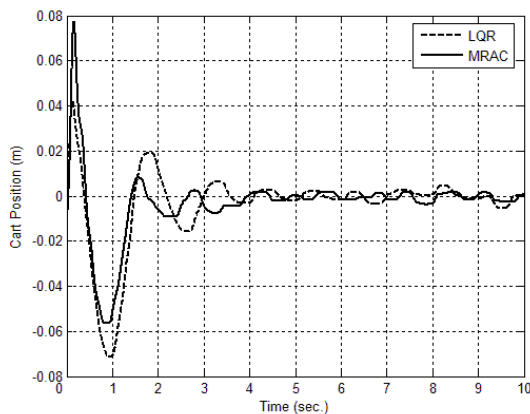
หาค่า K_x โดยกำหนดค่า $Q = \text{diag}\{10000 \ 100 \ 5000$
 $0\}$ และ $R = 1$ จะได้

$$K_x = [198.86 \ 44.69 \ 70.71 \ 58.10] \quad (44)$$

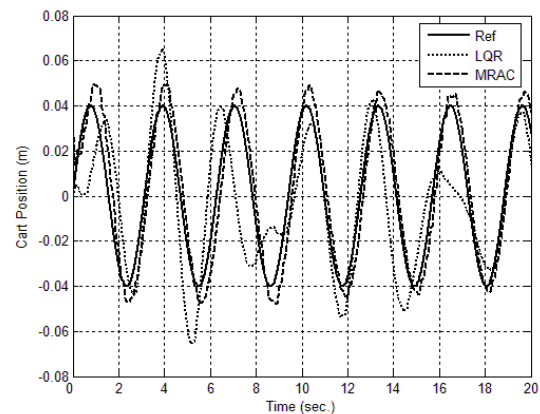
6. ผลการทดลอง

6.1 ผลการทดลองเสถียรภาพ

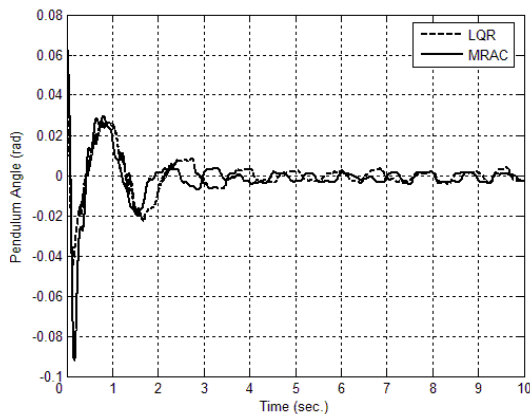
จากผลการทดลอง ความเสถียรของระบบจริง
เปรียบเทียบระหว่างตัวควบคุม LQR และ MRAC
โดยควบคุมให้ก้านลูกตุ้มตั้งขึ้น เพื่อรักษาสมดุลและ
ควบคุมให้รยางค์เคลื่อนที่อยู่บริเวณกึ่งกลาง ของราง
เลื่อน จากสมการ (34) กำหนดค่า $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$
และสมการ (37) กำหนดค่า $\gamma_i = \text{diag}\{1000 \ 1000$
 $1000 \ 1000\}$ จะได้ผลตอบสนองดังนี้



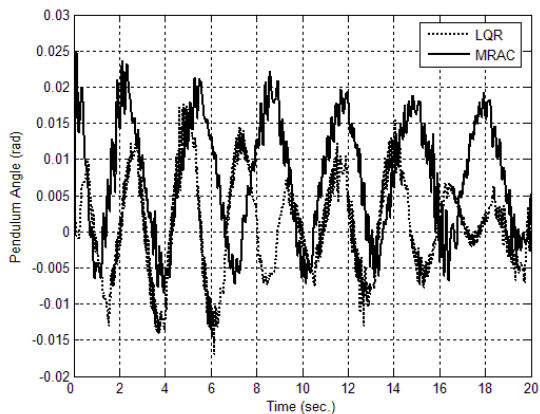
รูปที่ 9 ผลตอบสนองระหว่างตำแหน่งของรถรางกับเวลา



รูปที่ 11 ผลตอบสนองระหว่างตำแหน่งของรถรางกับเวลา



รูปที่ 10 ผลตอบสนองระหว่างมุมเอียงของลูกตุ้มกับเวลา



รูปที่ 12 ผลตอบสนองระหว่างมุมเอียงของลูกตุ้มกับเวลา

6.2 ผลการทดลองการติดตามตำแหน่ง

ทดสอบความสามารถของตัวควบคุม ในการติดตามตำแหน่งรถราง และการรักษาเสถียรภาพของระบบ โดยทดลองใส่อินพุทให้ระบบในรูป Sine wave โดยรถรางจะมีระยะของการเคลื่อนที่ระหว่าง $\pm 0.04\text{m}$ และมีความถี่ที่ 2Hz จากจุดกึ่งกลางของรางเลื่อน และลูกตุ้มยังคงตั้งอยู่ได้ จากสมการ (34) กำหนดค่า $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$ และสมการ (37) กำหนดค่า $\gamma_i = \text{diag}\{3000 \ 3000 \ 3000 \ 3000\}$

7. สรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลองเสถียรภาพ ดังรูปที่ 9 และ 10 จะเห็นว่าตัวควบคุม LQR และ MRAC มีระยะเวลาการเข้าสู่จุดสมดุลที่ใกล้เคียงกันที่ประมาณ 4 วินาที เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของรถราง เพื่อเข้าสู่จุดสมดุลการควบคุมทั้งสองมีผลตอบสนองที่ใกล้เคียงกัน ทั้งการเคลื่อนที่ของรถราง และการแกว่งของลูกตุ้มขณะเข้าสู่จุดสมดุล เมื่อพิจารณาผลตอบสนองของรถราง จะเห็นได้ว่าการควบคุม LQR จะเกิด Overshoot มากกว่าการควบคุม MRAC เล็กน้อยก่อนเข้าสู่จุดสมดุลนั้นหมายความว่ารถราง จะเคลื่อนที่ออกจากจุดศูนย์กลางมากกว่าก่อนเข้าสู่จุดสมดุล แต่ตัวควบคุมทั้งสองยังสามารถรักษาสถิตของลูกตุ้มไว้ได้ ส่วนผลการทดลองการติดตามตำแหน่ง ดังรูปที่ 11 และ 12

เมื่อพิจารณาที่ผลตอบสนองของรตรางกับค่าสัญญาณอ้างอิง เมื่อพิจารณาตัวควบคุม LQR จากผลตอบสนองตำแหน่งของรตรางในวินาทีที่ 4 ถึง 10 และ 12 ถึง 18 จะเห็นได้ว่าการลื่นล้าของสัญญาณระหว่างสัญญาณอ้างอิงและสัญญาณจากระบบ ส่วนการควบคุม MRAC เมื่อเปรียบเทียบกับสัญญาณอ้างอิงแล้ว สัญญาณมีการ Overshoot เล็กน้อย แต่ผลตอบสนองของรตราง ยังสามารถเคลื่อนที่ติดตามตำแหน่งได้ใกล้เคียงกับสัญญาณอ้างอิง ส่วนค่าการควบคุม γ_i และ ω_n ตามสมการ (34) และ (37) ตามลำดับ ค่าการทดลองทั้งสองได้จากการทดลองอย่างใดก็ตามค่า γ_i ถ้ามีค่าน้อยเกินไปจะทำให้ระบบเข้าสู่สมดุลได้ช้า แต่ถ้ามีค่ามากเกินไปจะทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ และเนื่องจากในการทดลองยังมีตัวรบกวนจากภายนอก เพื่อให้ระบบทนต่อตัวรบกวนจึงควรเพิ่มตัวควบคุมโรบัส เพื่อให้ระบบมีความคงทนต่อตัวรบกวนมากยิ่งขึ้น

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Panya, S. (2007). *Hybrid PD-Sliding Mode Controller Design for Inverted Pendulum on Cart System*, Control Engineering, School of Control Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.
- [2] Printrakoon, W. (2008). *Swinging Up and Stabilizing Controllers for Rotational Inverted Pendulum System*, Control Engineering, School of Control Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.
- [3] Slotine, E.J. and Weiping, L. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International Editions, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.