

การศึกษาเทคนิคการแก้ปัญหากระบวนการแข็งตัวในหนึ่งมิติ โดยใช้กริดที่มีขนาดคงที่

A Study of a Fixed Grid Technique for Investigating a One-Dimensional Solidification Process

Chittin TANGTHIENG

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University,
Pyathai Road, Patumwan, Bangkok, 10300, Thailand
Tel : 218-6590, Fax : 218-6642, E-mail fmectt@eng.chula.ac.th

Keywords: Solidification, Heat Transfer, Fixed Grid, Numerical Method

บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของงานวิจัยฉบับนี้คือการศึกษาเทคนิคการแก้ปัญหาคำนวณการถ่ายเทความร้อนที่เกี่ยวข้องกับแข็งตัวของสารซึ่งปัญหาดังกล่าวถูกตั้งสมมุติฐานให้เป็นปัญหาในหนึ่งมิติและอยู่ในสภาวะไม่คงที่ ระบบสมการกำกับซึ่งเดิมเขียนอยู่ในบริเวณของแข็งและของเหลวจะถูกนำมา รวมกันและเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการกำกับเพียงสมการเดียวโดยมี อัตราส่วนของเหลวเป็นพารามิเตอร์ใหม่ที่เพิ่มเติมขึ้น ในการคำนวณเชิงตัวเลขพบว่าปัญหาเกิดขึ้นเนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของ อัตราส่วนของเหลว ดังนั้นเพื่อที่จะจัดปัญหาดังกล่าว จึงได้สมมุติให้อัตราส่วนของเหลวเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นในช่วงแคบๆ ที่อุณหภูมิใกล้กับจุดเยือกแข็ง ส่วนพารามิเตอร์อื่นๆ ที่ปรากฏอยู่ในสมการกำกับและเงื่อนไขขอบเขตจะสามารถคำนวณได้โดยให้น้ำเป็นสารที่เกิดการแข็งตัวขึ้น ผลการคำนวณเชิงตัวเลขได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง จะเห็นได้ว่าความแม่นยำของเทคนิคที่กล่าวมาจะขึ้นอยู่กับระยะความกว้างของฟังก์ชันของอัตราส่วนของเหลวที่ทำให้การสมมุติขึ้น นอกจากนี้เทคนิคดังกล่าวยังสามารถทำนายความหนาของน้ำแข็งที่เกิดขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปได้อย่างมีความผิดพลาดต่ำกว่า 3 เปอร์เซ็นต์

Abstract

The aim of this paper is to investigate a numerical technique to solve the heat transfer problem associated with phase change. The problem is assumed one dimensional and transient. The governing equations for the solid and liquid regions are combined into a single equation with a liquid fraction as an additional parameter. To overcome the numerical difficulty due to discontinuity of the liquid fraction, the artificial linear piecewise continuous function of the liquid fraction is introduced. The

parameters appearing in the governing system are calculated by assuming ice as a freezing material. The comparison between the analytical and numerical solutions is performed. The results indicate that the accuracy of the numerical scheme strongly depends on the range of the artificial function of the liquid fraction. The error of the ice thickness, which is a function of time, predicted by this technique is less than 3 percent.

1. บทนำ

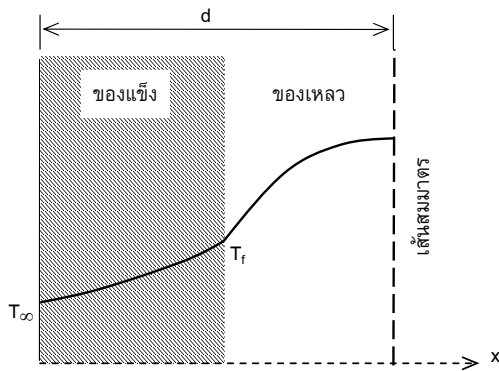
การศึกษาการแข็งตัวของสารนั้นมีประวัติเริ่มต้นจากการงานของ Neumann [1] ซึ่งเป็นการศึกษาการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ในหนึ่งมิติ ปัญหาของ Neumann ดังกล่าวเป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่าจะสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ หากแต่ถ้าปัญหาของการแข็งตัวมีความซับซ้อนยิ่งขึ้นเช่น เงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบการพาความร้อน ปัญหามักมีมากกว่าหนึ่งมิติ หรือสารที่แข็งตัวเป็นสารละลาย ความซับซ้อนดังกล่าวเป็นสาเหตุให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้และต้องนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้เพื่อหาคำตอบ ดังนั้นในช่วง 50 ปีที่ผ่านมาจึงมีงานวิจัยจำนวนมากที่มุ่งเน้นไปด้านการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแข็งตัวทั้งสารบริสุทธิ์ [2] และสารละลาย [3]

โดยปรกติปัญหาการแข็งตัวจะมีลักษณะเด่นคือขอบเขตของปัญหาที่มีการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น (moving boundary problem) ซึ่งส่งผลให้สมการกำกับที่ได้มีลักษณะที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) ลักษณะของการเคลื่อนที่ของขอบเขตดังกล่าวสร้างความยุ่งยากแก่ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่จะนำมาประยุกต์ใช้ จากการสำรวจพบว่าระเบียบวิธีเชิงเลขที่นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการแข็งตัวนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 3 แบบคือแบบแรกใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์เพื่อให้โดเมนสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขมีขนาดคงที่ แบบที่สองคือทำการติดตาม (track)

ขอบเขตที่เคลื่อนที่โดยการเปลี่ยนขนาดของกริด จะพบว่าวิธีทั้งสองจะให้คำตอบที่แม่นยำสำหรับปัญหาในหนึ่งมิติ แต่การคำนวณจะมีความซับซ้อนมากสำหรับปัญหาที่มากกว่าหนึ่งมิติ ส่วนแบบสุดท้ายคือการใช้กริดที่คงที่ (fixed grid) ซึ่งจะไม่เปลี่ยนไปตามขอบเขตที่เคลื่อนที่ ซึ่งวิธีดังกล่าวจะเป็นที่นิยมในปัจจุบันเนื่องจากมีความยืดหยุ่นสูง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหามากกว่าหนึ่งมิติได้ ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้จึงเป็นการศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใช้กริดคงตัวเพื่อนำมาทำนายปัญหาการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ ซึ่งต้องอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและอัตราส่วนของเหลวที่ทำการประมาณขึ้น และจะส่งผลให้คำตอบเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ลู่เข้า ซึ่งรายละเอียดของขั้นตอนดังกล่าวจะกล่าวถึงในส่วนถัดไป

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสมการกำกับ

สำหรับปัญหาที่จะนำมาพิจารณาในงานวิจัยชิ้นนี้นั้นจะเป็นปัญหาการแข็งตัวในหนึ่งมิติและอยู่ในสภาวะไม่คงที่ (transient) โดยที่ด้านหนึ่งของระบบจะมีอุณหภูมิที่ T_∞ ในขณะที่อีกด้านหนึ่งของผนังจะมีความร้อนส่งผ่านเนื่องจากความสมมาตรของระบบ การแข็งตัวจะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงที่ซึ่งมีค่าเท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง (T_f) นอกจากนี้ อุณหภูมิตั้งต้นระบบก่อนเริ่มการแข็งตัวคือ T_i ซึ่งมีค่าสูงกว่า T_f แผนภาพของระบบที่กำลังพิจารณาจะแสดงอยู่ในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนภาพแสดงระบบที่พิจารณา

จากข้อสมมุติฐานดังกล่าว แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่รวมเอาของแข็งและของเหลวเข้าด้วยกัน จะสามารถเขียนได้เป็นสมการเดียวคือ [4]

$$C_{vol} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{vol} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \delta H \frac{\partial g_l}{\partial t} \quad (1)$$

$$t = 0; \quad T = T_i \quad (2a)$$

$$x = 0; \quad T = T_\infty \quad (2b)$$

$$x = d; \quad k_{vol} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2c)$$

โดยที่

$$C_{vol} = \rho_s c_s g_s + \rho_l c_l g_l \quad (3)$$

$$k_{vol} = k_s g_s + k_l g_l \quad (4)$$

$$\delta H = \int_{T_{ref}}^T (\rho_l c_l - \rho_s c_s) d\theta + \rho_l L \quad (5)$$

สมการดังกล่าวสามารถทำการพิสูจน์โดยเขียนสมการกำกับลงในปริมาตรควบคุมขนาดเล็กๆ ที่เรียกว่า representative elemental volume หรือ REV [5] สมการกำกับที่ได้จะเรียกว่าสมการกำกับในระดับจุลภาค (macroscopic governing equation) ของแต่ละเฟส ซึ่งเมื่อนำสมการของทั้งเฟสของแข็งและของเหลวมารวมเข้าด้วยกันจะได้เป็นสมการในรูปของของผสม (mixture equation) สำหรับสมการที่ (1) เป็นรูปแบบหนึ่งของสมการในรูปของของผสมดังที่กล่าวมา โดยที่เขียนในรูปแบบของความร้อนแฝง (latent heat source form) [4]

ค่า g_s และ g_l ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (1), (3-5) คือค่าอัตราส่วนของแข็งและอัตราส่วนของเหลวในเชิงปริมาตร (solid and liquid volume fraction) ตามลำดับ โดยที่

$$g_s + g_l = 1 \quad (6)$$

ในทางทฤษฎีสำหรับการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ จะพบว่าในบริเวณของแข็งหรือของเหลวที่ไม่มีแนวโน้มว่าจะมีการเปลี่ยนเฟส ค่า g_l จะมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ตามลำดับ ดังนั้นในบริเวณดังกล่าวพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (1) หรือก็คือพจน์ของค่าความร้อนแฝงของการแข็งตัว (latent heat of fusion term) จะมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจาก $\partial g_l / \partial t = 0$ และค่า C_{vol} และ k_{vol} จะมีค่าเท่ากับค่าความจุความร้อนและค่าสภาพการนำความร้อนของของแข็งหรือของเหลวอย่างใดอย่างหนึ่ง ส่งผลให้สมการที่ (1) สามารถลดรูปได้เป็นสมการการนำความร้อนตามปกติ ในทางตรงกันข้ามหากมีการเปลี่ยนเฟสเกิดขึ้น ซึ่งถ้าเป็นกรณีของการแข็งตัวค่า g_l จะเปลี่ยนจาก 0 ไปเป็น 1 โดยฉับพลัน (jump condition) ส่งผลให้พจน์ที่มีค่าความร้อนแฝงของการแข็งตัวมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งปรากฏการณ์ดังกล่าวจะเกิดบริเวณที่เป็นขอบเขต (interface) ระหว่างของแข็งและของเหลวเท่านั้น

3. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

สมการที่ (1-5) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการไร้มิติ ซึ่งสามารถทำได้โดยการนิยามตัวแปรต่อไปนี้

$$\tau = \frac{\alpha_s t}{d^2}, \quad \xi = \frac{x}{d} \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_i - T_f} \quad (7)$$

เมื่อแทนค่าดังกล่าวลงไปในสมการที่ (1-5) จะได้ว่า

$$\frac{1 + (R_p R_c - 1) \frac{\partial \theta}{\partial \tau}}{1 + (R_k - 1) g_l} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{R_k - 1}{1 + (R_k - 1) g_l} \frac{\partial g_l}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{(R_p R_c - 1) \theta + (R_p / Ste) \frac{\partial g_l}{\partial \tau}}{1 + (R_k - 1) g_l} \quad (8)$$

$$\tau = 0; \quad \theta = 1 \quad (9a)$$

$$\xi = 0; \quad \theta = \theta_\infty \quad (9b)$$

$$\xi = 1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad (9c)$$

จะเป็นได้ว่าพจน์แรกทางด้านขวามือของสมการที่ (1) จะถูกแยกออกเป็นสองพจน์แรกทางด้านขวามือของสมการที่ (8) เนื่องจากค่า k_{vol} ไม่คงที่และขึ้นกับ g_i ส่วนพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (1) จะเปลี่ยนรูปไปเป็นพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (8) โดยการตั้งสมมติฐานว่าค่า $\rho_l c_l - \rho_s c_s$ ในสมการที่ (5) เป็นค่าคงที่และค่า T_{ref} มีค่าเท่ากับ T_f

นอกจากนี้ยังพบว่าไม่มีพารามิเตอร์ไร้มิติอยู่ทั้งหมดห้าพารามิเตอร์ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (8-9) กล่าวคือ

$$R_p = \frac{\rho_l}{\rho_s}, \quad R_c = \frac{c_l}{c_s}, \quad R_k = \frac{k_l}{k_s}, \quad Ste = \frac{c_s(T_f - T_i)}{L}, \quad \theta_\infty = \frac{T_\infty - T_f}{T_i - T_f} \quad (10)$$

4. การวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

การแก้สมการที่ (8) ข้างต้นสามารถทำได้โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference) เนื่องจากสมการที่ (8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ parabolic เพื่อให้เกิดเสถียรภาพในการทำงานของอัลกอริทึม จึงเลือกใช้การประมาณโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในรูปแบบฟูลลิมพลิท (fully implicit) [6] ดังนั้นตัวแปรที่ติดอยู่ในรูปอนุพันธ์จะสามารถแทนได้ด้วยการประมาณแบบผลต่างสืบเนื่องดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{\Delta \xi^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta \xi} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta \tau} \quad (13)$$

โดยที่ i และ n คือดัชนีของโหนดในแกน ξ และ τ ตามลำดับ เมื่อนำสมการที่ (11-13) ที่อยู่ด้านบนไปแทนลงในสมการที่ (8) แล้วจัดรูปสมการใหม่ตามตำแหน่งของโหนดที่ปรากฏอยู่บนโดเมนของการคำนวณ (computation domain) ดังต่อไปนี้

(i) โหนดที่อยู่ภายใน

$$\begin{aligned} & \left(1 - K \frac{\Delta \xi}{2}\right) \theta_{i-1}^{n+1} - \left(2 + L \frac{\Delta \xi^2}{\Delta \tau}\right) \theta_i^{n+1} + \left(1 + K \frac{\Delta \xi}{2}\right) \theta_{i+1}^{n+1} \\ &= - \left(L \frac{\Delta \xi^2}{\Delta \tau}\right) \theta_i^n + S \Delta \xi^2 \end{aligned} \quad (14)$$

(ii) โหนดที่อยู่บนเส้นสมมาตร: $\xi = 1$

$$2\theta_{i-1}^{n+1} - \left(2 + L \frac{\Delta \xi^2}{\Delta \tau}\right) \theta_i^{n+1} = - \left(L \frac{\Delta \xi^2}{\Delta \tau}\right) \theta_i^n + S \Delta \xi^2 \quad (15)$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ K , L , และ S คือ

$$K = \frac{R_k - 1}{1 + (R_k - 1)g_i} \frac{\partial g_i}{\partial \xi}, \quad L = \frac{1 + (R_p R_c - 1)}{1 + (R_k - 1)g_i}, \quad S = \frac{(R_p R_c - 1)\theta + (R_p / Ste) \frac{\partial g_i}{\partial \tau}}{1 + (R_k - 1)g_i} \quad (16)$$

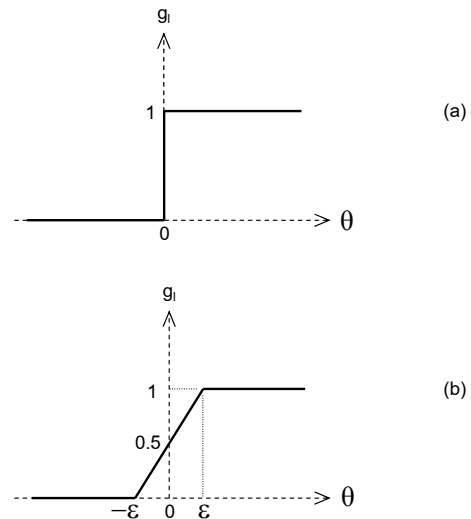
สำหรับการแก้ตัวของสารบริสุทธิ์ จะพบว่าการแก้ตัวจะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงที่ ณ รอยต่อระหว่างของแข็งและของเหลวที่มีลักษณะที่เป็นรอยต่อเรียบ (sharp interface) ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วค่าของ g_i จะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอุณหภูมิในลักษณะของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (discontinuous function) กล่าวคือ

$$g_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \leq 0 \\ 1, & \text{if } \theta > 0 \end{cases} \quad (17)$$

การนำสมการที่ 17 มาใช้ จะพบว่าสมการดังกล่าวจะก่อให้เกิดการลู่ออกของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้ในลักษณะของการแกว่ง (oscillated solution) เนื่องจากการเปลี่ยนอย่างฉับพลันของค่า g_i [2] ดังนั้นเพื่อขจัดปัญหาดังกล่าว จึงต้องทำการปรับความสัมพันธ์ระหว่าง g_i และอุณหภูมิเสียใหม่ให้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีลักษณะของความต่อเนื่อง (continuous linear function) เกิดขึ้น [4]

$$g_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \leq -\varepsilon \\ \frac{\theta + \varepsilon}{2\varepsilon}, & \text{if } -\varepsilon < \theta \leq \varepsilon \\ 1, & \text{if } \theta > \varepsilon \end{cases} \quad (18)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง g_i และอุณหภูมิก่อนและหลังทำการปรับสามารถนำมาแสดงให้เห็นได้ในรูปที่ 2



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่าง g_i และอุณหภูมิ
(a) ก่อนการปรับ (b) หลังการปรับ

ค่า ε เป็นค่าที่แสดงถึงระยะความกว้างของฟังก์ชันของอัตราส่วนของเหลวที่ทำการสมมุติขึ้น ซึ่งมีผลต่อการเข้าสู่และความแม่นยำของคำตอบ

สมการที่ (14-15) จะก่อให้เกิดระบบสมการที่ยังไม่ได้เป็นแบบเชิงเส้นเนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ K , L , และ S ยังเป็นฟังก์ชันของ g และอนุพันธ์ของ g ซึ่งยังคงไม่ทราบค่า ดังนั้นในตอนเริ่มต้นจะต้องทำการสมมติค่า g จากสมการ (18) โดยใช้อุณหภูมิตั้งต้นก่อน จากนั้นสมการที่ (14-15) กลายเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปสามแนวทแยง (tridiagonal system) และสามารถหาการกระจายของอุณหภูมิที่โหนดต่างๆ ได้โดยอัลกอริทึมของโทมัส (Thomas algorithm) จากผลของการทดสอบโปรแกรมในเบื้องต้น พบว่า S หรือ source term ในสมการที่ (14-15) จะส่งผลอย่างมากต่อการเข้าสู่ของคำตอบ [4] ดังนั้นจึงต้องมีการนำเอาค่า relaxation factor มาประยุกต์ใช้ โดยที่ค่า relaxation factor ที่ใช้จะอยู่ประมาณ 0.02 ถึง 0.1 ซึ่งเป็นค่าที่ค่อนข้างต่ำ (under relaxation factor) หลังจากที่ได้ค่าการกระจายของอุณหภูมิแล้วก็นำไปแทนค่าในสมการที่ (18) เพื่ออัปเดตค่าของ g และนำค่า g ดังกล่าวไปแทนระบบสมการเพื่อหาอุณหภูมิอีกครั้งในลักษณะของการคำนวณซ้ำ (iteration) จนกว่าค่าความผิดพลาดของคำตอบจะน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ (tolerance) เมื่อโปรแกรมออกจากลูปดังกล่าวก็จะทำการบันทึกค่าการกระจายของอุณหภูมิและความหนาของน้ำแข็ง แล้วเริ่มทำการคำนวณในเวลาถัดไปจนกระทั่งสิ้นสุดระยะเวลาที่กำหนดสำหรับค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของน้ำและน้ำแข็งจะอยู่ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของน้ำและน้ำแข็ง [7]

คุณสมบัติ	ค่าที่ใช้
ρ_s (kg/m ³)	920
k_s (W/m-K)	1.88
c_s (J/kg-K)	2,040
ρ_l (kg/m ³)	1,000
k_l (W/m-K)	0.569
c_l (J/kg-K)	4,217
L (kJ/kg)	333.7

สำหรับค่าของอุณหภูมิตั้งต้นของน้ำ (T_i) มีค่าเท่ากับ 30°C และอุณหภูมิที่เงื่อนไขขอบเขต $\xi = 0$ (T_∞) มีค่า -8°C ในขณะที่อุณหภูมิเยือกแข็งของน้ำ (T_f) มีค่า 0°C ส่วนระยะ d มีค่าเป็น 0.125 m ดังนั้นจากค่าคุณสมบัติของน้ำและน้ำแข็งรวมถึงค่าที่กำหนดดังที่กล่าวมาข้างต้น จะสามารถนำมาคำนวณค่าของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามสมการที่ (10) ได้ดังนี้

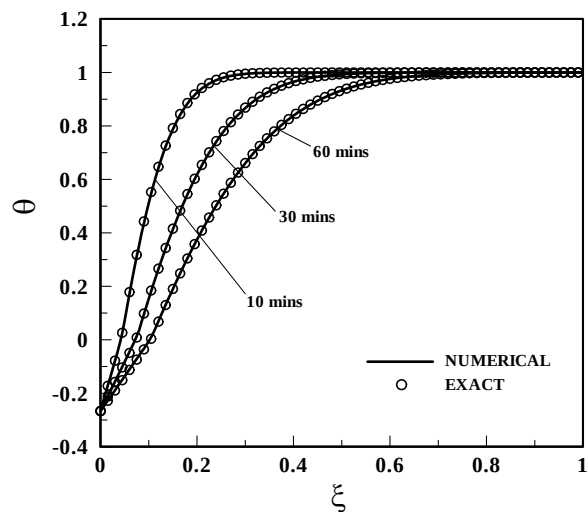
$$R_p = 1.0870, \quad R_c = 2.0672, \quad R_k = 0.3027, \\ Ste = 0.1827, \quad \theta_\infty = -0.2667 \quad (19)$$

คำตอบเชิงตัวเลขที่คำนวณได้จะนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ [1] แต่เนื่องจากผลเฉลยแม่นยำดังกล่าวเป็นของปัญหาที่มีโดเมนเป็นระนาบกึ่งอนันต์ (semi-infinite domain) ดังนั้นภายในช่วงเวลาที่คลื่นความร้อนจากเงื่อนไขขอบเขต $x = 0$ ยังส่งผ่านไปไม่ถึงเส้นสมมาตร $x = d$ นั้น หมายความว่าภายในช่วงเวลาดังกล่าวคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหากำลังพิจารณาอยู่จะเข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำที่กล่าวมาและสามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้ หลังจากได้ทดสอบโปรแกรมพบว่าช่วงเวลาที่สามารถนำสู่ผลเฉลยแม่นยำมาเปรียบเทียบกับคำตอบเชิงตัวเลขคือภายในเวลา 60 นาที

หลังจากนั้นก็ทำการทดสอบความเป็นอิสระต่อกริด (grid independency) ของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้ พบว่าในเบื้องต้นหากจำนวนกริดมากกว่า 100 กริดจะมีค่าความคลาดเคลื่อนจากการกระจายของอุณหภูมิต่ำกว่า 3 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นจึงทำการกำหนดจำนวนกริดในแนวแกน ξ อยู่ที่ 200 กริด และสำหรับในแกนเวลาก็เลือกช่วงห่างของเวลา (time step หรือ $\Delta\tau$) เท่ากับ 0.0005 เป็นจำนวน 462 ครั้งซึ่งจะทำให้เวลาสิ้นสุด (final time) อยู่ที่ 60 นาที ส่วนค่าของ ε ถูกตั้งไว้ที่ 0.03

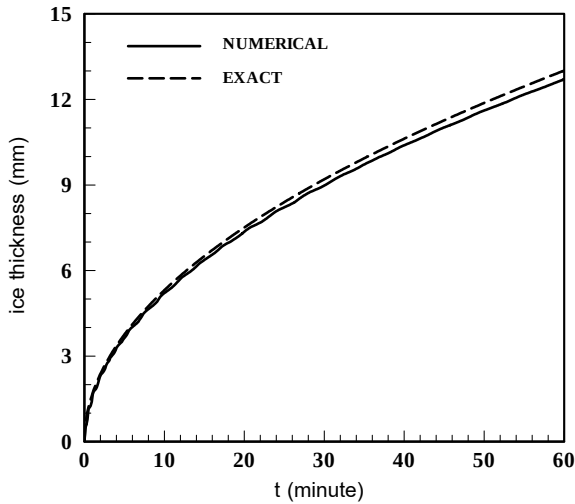
5. ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

ผลการคำนวณในรูปของการกระจายของอุณหภูมิจะแสดงให้เห็นในรูปที่ 3 โดยที่จะแสดงค่าการกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 10, 30 และ 60 นาทีตามลำดับ โดยที่ความคลาดเคลื่อนของการกระจายของอุณหภูมิของการคำนวณเชิงตัวเลขเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจะมีค่าอยู่ที่ 2.9, 1.8 และ 1.4 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ เป็นที่น่าสังเกตว่าเมื่อเวลาผ่านไปความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลง เนื่องจากในช่วงแรกของการแข็งตัว ค่าความชันของอุณหภูมิในแนวแกน ξ มีค่าสูง ทำให้จำนวนโหนดที่อยู่ในช่วงของการแข็งตัว ($-\xi \leq \theta \leq \xi$) มีจำนวนน้อยซึ่งจะก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนในบริเวณดังกล่าว ในทางตรงกันข้ามเมื่อเวลาผ่านไปค่าความชันของอุณหภูมิในแนวแกน ξ มีค่าลดลง ทำให้จำนวนโหนดที่อยู่ในช่วงของการแข็งตัวมีจำนวนเพิ่มขึ้น ส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลง



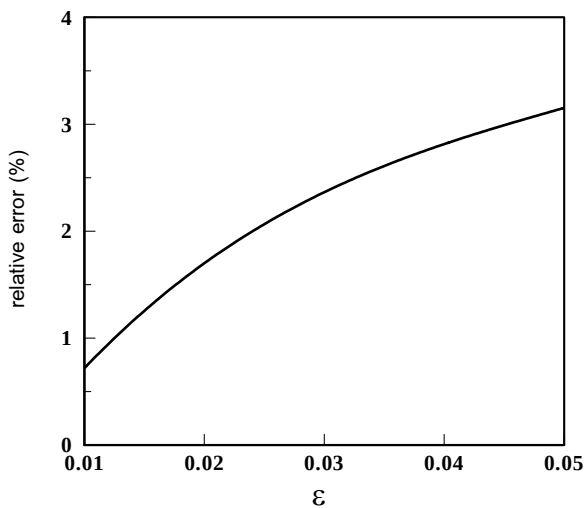
รูปที่ 3 การกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 10, 30 และ 60 นาที

รูปที่ 4 เป็นการเปรียบเทียบค่าความหนาของน้ำแข็งที่เวลาต่างๆ ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วค่าความหนาจะเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปโดยที่ค่าความหนาจะแปรผันตรงกับรากที่สองของเวลา จากกราฟจะเห็นได้ว่าค่าความหนาที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าต่ำกว่าค่าความหนาที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำเล็กน้อย โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยตั้งแต่เวลาตั้งต้นจนถึงเวลาสิ้นสุดอยู่ที่ประมาณ 2.6 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 4 การเปลี่ยนแปลงความหนาของน้ำแข็งเมื่อเทียบกับเวลา

จากรูปที่ 5 ซึ่งแสดงถึงผลของการเปลี่ยน ε ที่มีต่อค่าความคลาดเคลื่อนของความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข จะเห็นว่าหากทำการเพิ่มค่า ε ค่าความคลาดเคลื่อนของความหนาของน้ำแข็งก็จะเพิ่มขึ้นเช่นกัน ทั้งนี้จะสามารถอธิบายได้จากสมการที่ (18) จะเห็นได้ว่าหากค่า ε มีค่าลดลงและเข้าสู่ศูนย์ สมการที่ (18) จะเข้าสู่สมการที่ (17) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ที่ถูกต้องทางทฤษฎีสำหรับการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนของความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขจึงลดลง



รูปที่ 5 ผลของการเปลี่ยน ε ที่มีต่อค่าความคลาดเคลื่อนของความหนาของน้ำแข็ง

อย่างไรก็ดีการลดค่า ε ให้ต่ำลงเรื่อย ๆ จะก่อให้เกิดผลเสียคือ จะทำให้โอกาสที่จะมีไหนดตกอยู่ในช่วงของการแข็งตัว ($-\xi \leq \theta \leq \xi$) มีน้อยลง ส่งผลให้มีโอกาสมากขึ้นที่จะเกิดการล้นออกของคำตอบในลักษณะของการแกว่ง เพื่อขจัดปัญหาดังกล่าวและให้คำตอบเกิดการลู่เข้าจึงจำเป็นต้องลดค่า relaxation factor ให้ต่ำลง ซึ่งจะส่งผลให้การ

ลู่เข้าของคำตอบเป็นไปได้ช้าลงเช่นกัน ในทางตรงกันข้ามหากทำการเพิ่มค่า ε จะทำให้คำตอบมีความคลาดเคลื่อนสูง แต่คำตอบจะลู่เข้าได้เร็วขึ้นเนื่องจากสมการที่จะเพิ่มค่า relaxation factor ให้สูงขึ้นได้

6. บทสรุป

ในงานวิจัยชิ้นนี้เป็นการศึกษาเทคนิคของการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบกริดคงที่เพื่อแก้ไขปัญหาการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ในหนึ่งมิติ ซึ่งจะนำคำตอบเชิงตัวเลขดังกล่าวไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ผลการศึกษาพบว่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบจากการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าต่ำกว่า 3 เปอร์เซ็นต์ โดยทั้งนี้ความแม่นยำของคำตอบจะขึ้นอยู่กับระยะความกว้างของฟังก์ชันของอัตราส่วนของเหลวที่ทำการสมมุติขึ้น ถ้าระยะความกว้างดังกล่าวมีต่ำลงค่าความคลาดเคลื่อนก็จะมีค่าลดลง แต่จะทำให้คำตอบมีการลู่เข้าที่ช้าลงเนื่องจากค่า relaxation factor ที่ต่ำลงเช่นกัน

สัญลักษณ์

(i) ตัวปรกติ

- c = ค่าความจุความร้อนจำเพาะ, (J/kg-K)
- C = ค่าความจุความร้อน, (J/m³-K)
- d = ความกว้างของระบบ, (m)
- D = ความหนาของผนังท่อทำน้ำแข็ง, (m)
- g = อัตราส่วนเชิงปริมาตรของแต่ละเฟส
- $\dot{Q}_H$ = พลังงานของ heat source, (J/m³)
- k = สภาพการนำความร้อน, (W/m-K)
- L = ความร้อนแฝงจำเพาะของการแข็งตัวของน้ำ, (J/kg)
- R_p = อัตราส่วนค่าความหนาแน่นของน้ำต่อน้ำแข็ง
- R_c = อัตราส่วนค่าความจุความร้อนจำเพาะของน้ำต่อน้ำแข็ง
- R_k = อัตราส่วนค่าสภาพการนำความร้อนของน้ำต่อน้ำแข็ง
- Ste = สเตฟานนัมเบอร์
- t = เวลา, (s)
- T = อุณหภูมิ, (°C)
- T_f = อุณหภูมิเยือกแข็ง, (°C)
- T_i = อุณหภูมิตั้งต้น, (°C)
- T_∞ = อุณหภูมิที่ระยะ $x = 0$, (°C)
- x = ระยะในระบบพิกัดฉาก, (m)
- α = Thermal diffusivity, (m²/s)
- ε = ระยะความกว้างของฟังก์ชันของอัตราส่วนของเหลว
- ρ = ความหนาแน่น, (kg/m³)
- θ = อุณหภูมิในรูปแบบไร้มิติ
- θ_∞ = อุณหภูมิในรูปแบบไร้มิติที่ระยะ $\xi = 0$
- ξ = ระยะ x ในรูปแบบไร้มิติในระบบพิกัดฉาก
- τ = เวลาในรูปแบบไร้มิติ

(ii) ตัวห้อย

- l = เฟสของเหลว
- s = เฟสของแข็ง
- vol = representative elemental volume

เอกสารอ้างอิง

- [1] M. Necati Özisik, Heat Conduction, John-Wiley & Sons, New York, USA, 1993, pp. 405-408.
- [2] M. Salcudean and Z. Abdullah, "On the Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 25, 1988, pp. 445-473.
- [3] W.D. Bennon and F.P. Incropera, "A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change system-I: model formulation," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 30, 1987, pp. 2161-2170.
- [4] V. R. Voller and C. R. Swaminathan, "Fixed Grid Techniques for Phase Change Problems: a Review," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, 1990, pp. 875-898.
- [5] J. Ni and C. Beckermann, "A volume-averaged two-phase model for transport phenomena during solidification," Metallurgical Transactions B, Vol. 22, 1991, pp. 339-361.
- [6] S. C. Chapra and R. P. Canale, Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill, New York, USA, 1990, pp. 738-741.
- [7] Frank P. Incropera and Dewitt, David P, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John-Wiley & Sons, New York, USA, 2002, pp. 905-916.