

## การวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสถานะคงตัวและไม่คงตัวโดยใช้ ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน และระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซ

### An Analysis of Steady-State and Transient Heat Conduction Problems By Using Dual Reciprocity Method and Laplace Transform Dual Reciprocity Method

รัฐภาคย์ ขันธตันธง<sup>1\*</sup> พรชัย สัตราวหา<sup>2</sup> พิชัย กฤชไมตรี<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ บางเขน กรุงเทพฯ 10900

<sup>2</sup>ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

\*Email: [ratthapark@yahoo.com](mailto:ratthapark@yahoo.com)

Ratthapark Khantonthong<sup>1\*</sup> Pornchai Satravaha<sup>2</sup> Phichai Kritmaitree<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University, Bangkok, Bangkok 10900, Thailand,

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand,

\*Email: [ratthapark@yahoo.com](mailto:ratthapark@yahoo.com)

#### บทคัดย่อ

ปัญหาที่พบส่วนใหญ่ในทางวิศวกรรมมักจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ ดังนั้นการวิเคราะห์ปัญหาส่วนใหญ่จึงมักจะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแทน ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยม คือ ไฟไนท์เอลิเมนต์, วิธีไฟไนท์ดิฟเฟอเรนซ์, และวิธีไฟไนท์โวลุ่ม วิธีทั้งสามนี้มีข้อดีตรงที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลายรวมถึงปัญหาที่มีโดเมนรูปทรงซับซ้อน แต่การใช้วิธีเหล่านี้จำเป็นต้องมีการสร้างเมชภายในรูปทรง ซึ่งการกระทำดังกล่าวทำให้ต้องมีการจัดเตรียมพื้นที่สำหรับเก็บข้อมูลจำนวนมากและต้องแก้ปัญหาตลอดทั้งโดเมน ทำให้ใช้เวลาในการวิเคราะห์ปัญหาเป็นอย่างมาก อย่างไรก็ตามยังมีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอีกวิธีหนึ่งที่สามารถแก้ปัญหาได้โดยการสร้างเมชเฉพาะที่ขอบและอาศัยค่าเฉพาะที่บางจุดในโดเมน ซึ่งก็คือ ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน บทความนี้นำเสนอการใช้วิธีส่วนกลับคู่กันเพื่อแก้ปัญหาตัวอย่างคือปัญหาการนำความร้อนในสถานะคงตัวซึ่งอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ และระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซแก้ปัญหาตัวอย่างคือปัญหาการนำความร้อนในสถานะไม่คงตัว ผลของการใช้ระเบียบวิธีดังกล่าวแก้ปัญหาเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์เป็นที่พอใจ

**คำหลัก** ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน, การแปลงลาปลาซ

#### Abstract

Most of engineering problems in practice could not be solved analytically. Therefore, these problems are usually solved by numerical methods. There are three popular numerical methods, i.e., Finite Element, Finite Difference and Finite Volume methods. These methods could solve many practical problems within complex geometry domain. However, these methods require domain subdivision by using mesh or grid generator, which consumes memory and time. There is a numerical method that needs only boundary mesh generation and some solutions in domain i.e., “Dual Reciprocity Method”. In this study, the Dual Reciprocity Method and Laplace Transform Dual Reciprocity Method are applied to steady-state and transient heat conduction problems, expressed by non-homogeneous and time-dependent diffusion-type Partial Differential Equations, respectively. Finally, the methods have been verified their accuracy using these examples.

**Keywords:** Dual Reciprocity, Method Laplace transform

## 1. บทนำ

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมอาจแบ่งได้เป็น 2 วิธีคือ 1. ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) ระเบียบวิธีนี้เหมาะสำหรับปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ซับซ้อน ผลลัพธ์ที่ได้จะให้คำตอบที่มีลักษณะแม่นยำตรง (Exact Solution) 2. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ระเบียบวิธีนี้เหมาะกับปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตที่มีความซับซ้อนซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะคำตอบเชิงประมาณ ซึ่งปัญหาที่พบส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ การวิเคราะห์ปัญหาส่วนใหญ่จึงมักจะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแทน ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมคือ วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite Element Method), วิธีไฟไนท์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method) และ วิธีไฟไนท์โวลุ่ม (Finite Volume Method) วิธีทั้งสามนี้มีข้อดีตรงที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลายรวมถึงปัญหาที่มีโดเมน (Domain) ซับซ้อน อย่างไรก็ตามก็มีข้อเสียตรงที่ต้องมีการสร้างเมช (Mesh) ภายในโดเมนถึงแม้ว่าผลเฉลยที่ต้องการจะอยู่บนขอบของโดเมน การกระทำดังกล่าวจะทำให้สิ้นเปลืองเวลาและการเตรียมข้อมูลรวมถึงการจัดเก็บข้อมูลเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ภายในหากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาที่ซับซ้อน

วิธีบาวตารีเอลิเมนต์ (Boundary Element Method) เป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าสำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้น ข้อดีสำหรับวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ คือสามารถลดมิติของปัญหาลงได้ 1 มิติ และมีการสร้างเมชแต่เพียงที่ขอบเขตของโดเมน (Boundary Mesh) เท่านั้น อย่างไรก็ตามวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ จำเป็นต้องการผลเฉลยพื้นฐาน (Fundamental Solution) ซึ่งหากรูปแบบปัญหาเป็นปัญหาที่ซับซ้อน เช่น ปัญหาที่อธิบายด้วยสมการอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ (Non - Homogeneous Equations) หรือปัญหาที่ขึ้นกับเวลา (Time - Dependent) การหาผลเฉลยพื้นฐานอาจกระทำได้ยาก

ได้มีการพัฒนาวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ขึ้นมาใหม่ โดยที่ยังคงรักษาข้อดีไว้ เรียกว่า วิธีส่วนกลับคู่กัน (Dual Reciprocity Method) วิธีดังกล่าวมีการเลือกฟังก์ชันที่เหมาะสมมาประมาณค่าพจน์ที่ไม่เป็นเอกพันธ์ และแปลงกลับจากการเมชภายในโดเมนให้ไปให้เหลือแต่เพียงที่ขอบและจุดภายในโดเมน ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้สามารถทำให้วิธีดังกล่าวสามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างหลากหลาย รวมถึงปัญหาที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น (Non - Linear Problem) [1],[2]

สำหรับปัญหาที่ขึ้นกับเวลา (Time - Dependent) ได้มีผู้ใช้ระเบียบวิธีบาวตารีเอลิเมนต์และระเบียบวิธีลำดับขั้นเวลา (Time - stepping method) ในการวิเคราะห์กับปัญหาการแผ่รังสีของคลื่นแบบไม่เชิงเส้นใน 2 มิติซึ่งขึ้นกับเวลา ผลการวิเคราะห์ให้ความแม่นยำและถูกต้องถึงแม้ว่าจะต้องมีการใช้เวลาในการคำนวณอยู่บ้าง Zhu et al., ใช้ระเบียบวิธีการแปลงลาปลาซจัดพจน์ที่ขึ้นกับเวลาแล้วใช้ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันในการแก้สมการ จากนั้นใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขย้อนกลับแปลงผลลัพธ์ที่ได้จากเวลาที่อยู่ในลาปลาซสเปซ (Laplace Space) ให้กลับมาอยู่ในเวลาบนโดเมน

โดยทำการวิเคราะห์กับปัญหาการนำความร้อนในสถานะไม่คงตัวผลลัพธ์ที่ได้ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยเมื่อเวลาที่ต้องการมีค่ายาวนานเมื่อเทียบกับเวลาเริ่มต้น ยังคงให้ค่าความถูกต้องเป็นอย่างมาก [3],[4]

บทความนี้มีจุดประสงค์ที่จะนำเสนอวิธีการของการวิเคราะห์ปัญหาเชิงวิศวกรรมโดยใช้ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน และส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซให้เป็นแพร่หลายและเป็นอีกทางเลือกหนึ่ง โดยวิเคราะห์ปัญหาเชิงวิศวกรรมตัวอย่าง ซึ่งในที่นี้คือปัญหาการนำความร้อนในสถานะคงตัวอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ และปัญหาการนำความร้อนที่ขึ้นกับเวลาระเบียบวิธีดังกล่าวนี้เป็นวิธีที่ Zhu et al., และ Partridge and Brebbia นำเสนอ [2],[4]

## 2. ปัญหาตัวอย่าง

ปัญหาเชิงวิศวกรรมตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนใน 2 มิติในสถานะคงตัวมีแหล่งกำเนิดความร้อนภายในตัวกลางซึ่งรูปแบบของสมการคือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{g_o(x, y)}{k} \quad (1)$$

โดยที่  $g_o(x, y) = f(x, y)$  และ  $k$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีหน่วยเป็น  $W/m^2 \cdot ^\circ C$

ปัญหาเชิงวิศวกรรมตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซเป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนใน 2 มิติในสถานะไม่คงตัวซึ่งรูปแบบของสมการคือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

โดยที่  $t$  คือเวลามีหน่วยเป็น  $s$  และ  $k$  เป็นสมบัติของการแพร่เชิงความร้อนมีหน่วยเป็น  $m^2/s$

## 3. การวิเคราะห์ปัญหา

รูปแบบของปัญหาในสมการที่ (1) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\nabla^2 u = b \quad (3)$$

โดยที่  $b$  อาจเป็นฟังก์ชันของ  $(x, y, u)$

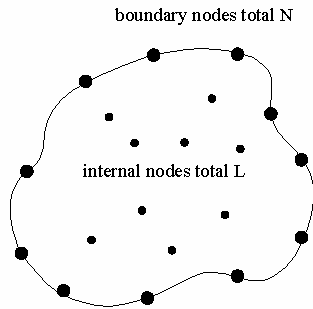
ทำการประมาณค่า  $b$  ด้วยฟังก์ชันประมาณค่า  $f_j$

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j F_j \quad (4)$$

$\alpha_j$  เป็นสัมประสิทธิ์ที่เป็นค่าคงตัวมีจำนวน  $N$  จุดบนของเขตและ  $L$  จุดภายในโดเมน (แสดงในรูปที่ 1) สำหรับค่าของ  $f_j$

สามารถหาค่าได้จาก  $\sum_{m=0}^s r_j^m$  โดยที่  $r_j$  เป็นระยะทางจากจุดของแหล่งกำเนิด (source point) ไปยังจุดอื่นๆ (field point)

คุณสมบัติของสมการที่ (3) ด้วยผลเฉลยพื้นฐาน (Fundamental Solution)  $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$  และทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน  $\Omega$



รูปที่ 1 แสดงจุดบนขอบเขตและจุดภายในโดเมน  $\Omega$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} f_j u^* d\Omega \quad (4)$$

แทนค่า  $u_j$  ลงในสมการที่ (4) ซึ่ง  $u_j$  เป็นผลเฉลยจากสมการ

$$\nabla^2 u = f_j \text{ สำหรับค่า } s=1 \text{ ทำให้ได้ค่า } u_j = \frac{r_j^2}{4} + \frac{r_j^3}{9} \text{ ซึ่ง}$$

สามารถเปลี่ยนโดเมนอินทิกรัลในสมการที่ (4) ให้ไปเป็นบาวดารีอินทิกรัลได้และเมื่อทำการอินทิเกรตแบบแยกส่วน 2 ครั้งจะได้

$$c_i u(x_i) + \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (c_i u_j(x_i) + \int_{\Gamma} u^* q_j d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u_j d\Gamma) \quad (5)$$

โดยที่  $x_i$  เป็นจุดของแหล่งกำเนิด  $u^*$  อาจอยู่ในโดเมนหรือบนขอบเขตของโดเมนก็ได้สำหรับค่าของ  $u$  จะเป็นเวกเตอร์ของอุณหภูมิและที่บนขอบเขตและภายในของโดเมนส่วนค่าของ  $q$  จะเป็นเวกเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนที่บนขอบเขตของโดเมน  $q^*, q_j$  คืออนุพันธ์ของ  $u^*, u_j$  ค่าของ  $c_i$  ขึ้นกับจุดของแหล่งกำเนิด  $x_i$  ซึ่งแบ่งเป็นกรณีสำหรับเอลิเมนต์แบบคงที่กล่าวคือ

$$\begin{aligned} c_i &= 0.5 \text{ เมื่อ } x_i \text{ เป็นจุดที่อยู่บนขอบเขตของโดเมน} \\ &= 1 \text{ เมื่อ } x_i \text{ เป็นจุดที่อยู่ในโดเมน} \\ &= 0 \text{ เมื่อ } x_i \text{ เป็นจุดที่อยู่ในอาณาบริเวณอื่น} \end{aligned}$$

ทำการประยุกต์สมการ (5) ลงใน  $k$  เอลิเมนต์ย่อยและในทุก

$N+L$  จุดจะได้สมการเชิงเส้น  $N+L$  สมการ

$$2\pi c_i u(x_i) - \sum_{k=1}^N q_k g_{ik} + \sum_{k=1}^N u_k h_{ik} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c_i (u_j)_i - \sum_{k=1}^N (q_j)_k g_{ik} + \sum_{k=1}^N (u_j)_k h_{ik} \right\} \quad (6)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์คือ

$$Hu - Gq = (HU - GQ)\alpha \quad (7)$$

โดยที่  $H, U, G, Q$  จะเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับลักษณะขอบเขตและฟิสิกส์ของขอบเขตของปัญหาสมการ (7) จะมีจำนวนสมการ  $N+L$  สมการแต่  $(N+L) \times (N+L)$  ตัวไม่ทราบค่าซึ่งหากทราบค่าของสัมประสิทธิ์  $\alpha$  สมการ (7) ก็จะสามารถแก้หา

คำตอบของสมการได้ทั้งหมด ซึ่งสำหรับปัญหาตัวอย่างสมการ (4) สามารถเขียนได้อีกในรูปแบบหนึ่งคือ

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j F_j = s \quad (8)$$

ทำการหาอินเวอร์สและเขียนเป็นเมทริกซ์จะได้ว่า

$$\alpha = F^{-1}s \quad (9)$$

แทนค่าสมการ (9) ใน (7) แล้วจัดรูปสมการ

$$Hu - Gq = (HU - GQ)F^{-1}s \quad (10)$$

สมการ (10) หลังจากแทนค่าเงื่อนไขขอบเขตและจัดรูปจะได้สมการเชิงเส้น

$$Ax = y \quad (11)$$

ซึ่งจะสามารถแก้หาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้ทั้งหมด

รูปแบบของปัญหาในสมการที่ (2) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, x \in \Omega \quad (12)$$

พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t), x \in \tau_1 \quad (13)$$

$$q(x, t) = \bar{q}(x, t), x \in \tau_2 \quad (14)$$

และผลเฉลยเริ่มต้น ณ เวลา  $t_o$

$$u(x, t) = u_o(x, t_o) \quad (15)$$

โดยที่  $\bar{u}, \bar{q}$  คือผลเฉลยและอนุพันธ์ของผลเฉลยบางค่าที่ทราบค่า  $\tau_1, \tau_2$  คือเงื่อนไขขอบเขตแบบ ดิริคัล (Dirichlet type) และแบบ นอยมันน์ (Neumann type) ตามลำดับ

สำหรับค่า  $k$  จะหมายถึงค่าสภาพการแพร่เชิงความร้อนของสสาร (Thermal diffusivity of substance) ซึ่งจะถือว่าให้มีค่าคงที่ตลอดเวลาที่พิจารณา

ในการหาผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) จะนิยามให้ผลการแปลงลาปลาซสามารถหาได้โดย

$$L[u(x, t)] = U(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt \quad (16)$$

ตัวแปร  $p$  จะถูกเรียกว่าลาปลาซพารามิเตอร์ซึ่งเมื่อทำการอินทิเกรตแบบแยกส่วน 1 ครั้งจะได้ว่า

$$L\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right] = pU(x, p) - u_o(x, t_o) \quad (17)$$

หลังจากกระทำกับสมการที่ (12) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla^2 U(x, p) = \frac{1}{k} \{pU(x, p) - u_o(x, t_o)\} \quad (18)$$

เงื่อนไขขอบเขตเมื่อกระทำกับสมการที่ (16) จะได้

$$U(x, p) = \bar{U}(x, p) = \frac{\bar{u}(x, t)}{p}, x \in \tau_1 \quad (19)$$

$$Q(x, p) = \bar{Q}(x, p) = \frac{\bar{q}(x, t)}{p}, x \in \tau_2 \quad (20)$$

สมการที่ (18) พจน์ทางซ้ายถูกแทนค่าด้วยฟังก์ชันการประมาณค่า  $f_j$

$$\frac{1}{k}\{pU(x, p) - u_o(x, t_o)\} = \sum_{j=1}^{N+L} f_j \alpha_j \quad (21)$$

สมการที่ (21) เมื่อแทนค่าลงในสมการ (18) และกระทำแบบเดียวกันวิธีข้างต้นจะให้ผลลัพธ์คือ

$$HU - GQ = \frac{1}{k}S(pU - u_o) \quad (22)$$

โดยที่

$$S = (H\bar{U} - G\bar{Q})F^{-1} \quad (23)$$

โดยที่  $H, G, \bar{U}, \bar{Q}$  จะเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับลักษณะ

ขอบเขตและพิกัดของขอบเขตของปัญหาทำการจัดรูปสมการ (23)

แล้วจะได้สมการเชิงเส้น  $(N+L) \times (N+L)$  สมการ ดังสมการ

(24) และเมื่อแทนค่าเงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้นก็จะสามารถแก้สมการ

หาค่าตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่าได้ทั้งหมด

$$(H - \frac{P}{k}S)U - GQ = -\frac{1}{k}Su_o \quad (24)$$

หลังจากที่ได้ผลเฉลย  $U(x, p)$  จากสมการที่ (24) การหาผลการแปลงลาปลาซผกผันจำเป็นที่จะต้องนำมาใช้เพื่อหาค่าของผลเฉลย  $u(x, t)$  ซึ่ง Zhu et al., และ Sutradhar et al., ใช้ระเบียบวิธีของสเตฟรานซ์ (Stehfest's algorithm) ซึ่งให้ค่าความแม่นยำในช่วงกว้างในแต่ละฟังก์ชันซึ่งระเบียบวิธีดังกล่าว ค่าของตัวแปรพารามิเตอร์  $p$  ที่แตกต่างกันตามจำนวน  $N_p$  ซึ่งถูกแบ่งแยกออกสำหรับแต่ละเวลาในแต่ละลาปลาซ

สเปซจะเป็นไปตามสมการคือ [4],[5],[6]

$$p_v = \frac{\ln 2}{t} \cdot v, v = 1, 2, 3 \dots N_p \quad (25)$$

โดยที่  $N_p$  จะต้องเป็นจำนวนคู่สมการที่ (24) จะสามารถแก้สมการหาค่าได้ตามจำนวน  $N_p$  สำหรับแต่ละเวลาในลาปลาซสเปซซึ่งได้ค่าของ  $U(p_v)$  และหรือ  $Q(p_v)$  ที่ตำแหน่งของขอบเขตหรือในอาณาบริเวณโดเมนและหากต้องการทราบค่าของ  $u$  ที่ตำแหน่ง  $\varepsilon$  ซึ่งอยู่บนขอบเขตหรือในอาณาบริเวณโดเมนที่เวลา  $t$  ใดๆจะสามารถหาค่าได้จากสมการที่ (26)

$$[u(t)]_\varepsilon = \frac{\ln 2}{t} \cdot \sum_{v=1}^{N_p} W_v [U(p_v)]_\varepsilon \quad (26)$$

โดยที่

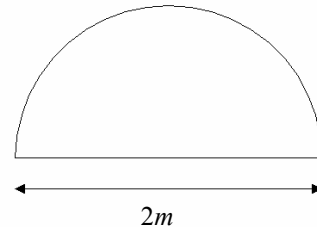
$$W_v = (-1)^{(N_p/2)+v} \times \frac{\sum_{k=\lceil \frac{1}{2}(v+1) \rceil}^{\min\{v, (N_p/2)\}} \frac{k^{N_p/2} (2k)!}{(-\frac{N_p}{2}-k)! k! (k-1)! (v-1)! (2k-v)!}} \quad (27)$$

#### 4. ผลเฉลยวิเคราะห์

ปัญหาเชิงวิศวกรรมตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนใน 2 มิติในสถานะคงตัวมีแหล่งกำเนิดความร้อนภายในตัวกลางซึ่งกำหนดให้

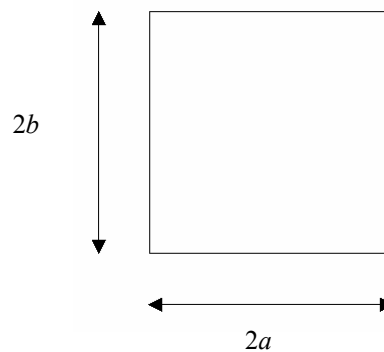
$$g_o(x, y) = -200 - 400 \sin(x + y) \quad (28)$$

ซึ่งขอบเขตของโดเมนเป็นรูปครึ่งวงกลมรัศมี 2 เมตร ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงขอบเขตของโดเมนสำหรับปัญหาตัวอย่างซึ่งอธิบายด้วยสมการ (1)

ปัญหาเชิงวิศวกรรมตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซเป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนใน 2 มิติในสถานะไม่คงตัว มีโดเมนคือ  $-a < x < a$  และ  $-b < y < b$  ตลอดทั้งโดเมนมีอุณหภูมิคงที่คือ  $1^\circ C$  และเมื่อเวลา  $t = 0$  วินาทีขอบเขตของโดเมนจะมีอุณหภูมิคงที่คือ  $0^\circ C$  แสดงในรูปที่ 3 ซึ่งผลเฉลยวิเคราะห์สำหรับปัญหาดังกล่าวคือ [7]



รูปที่ 3 แสดงขอบเขตของโดเมนสำหรับปัญหาดตัวอย่างซึ่งอธิบายด้วยสมการ (2)

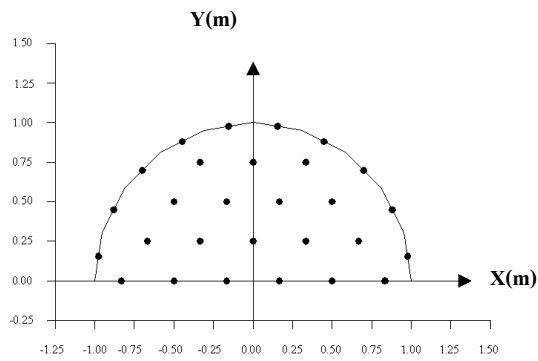
$$u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,n} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{2a} \cdot \frac{\sin(2n+1)\pi y}{2b} \cdot e^{-D_{m,n}t}$$

$$\text{โดยที่ } L_{m,n} = \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2n+1)}$$

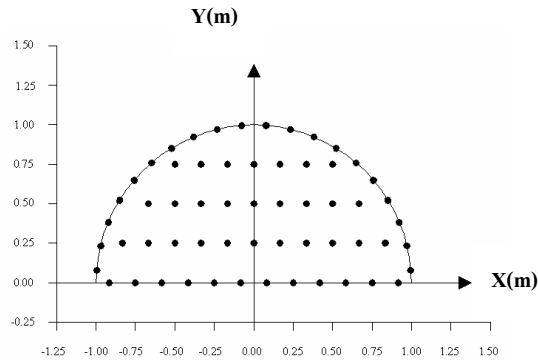
$$\text{และ } D = \frac{k\pi^2}{4} \left[ \frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2b+1)^2}{b^2} \right]$$

โดยที่  $t$  คือเวลาในที่นี้คือ 9000 วินาทีและ  $k$  เป็นสมบัติของการแพร่เชิงความร้อนในที่นี้คือ  $5.8 \times 10^{-7} m^2 / s$

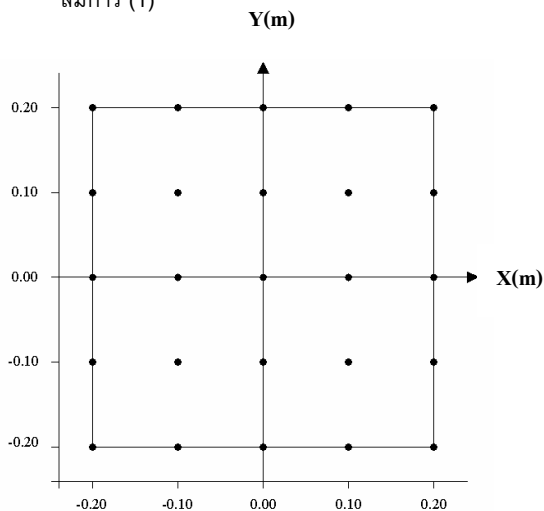
## 4. ผลเฉลยเชิงตัวเลข



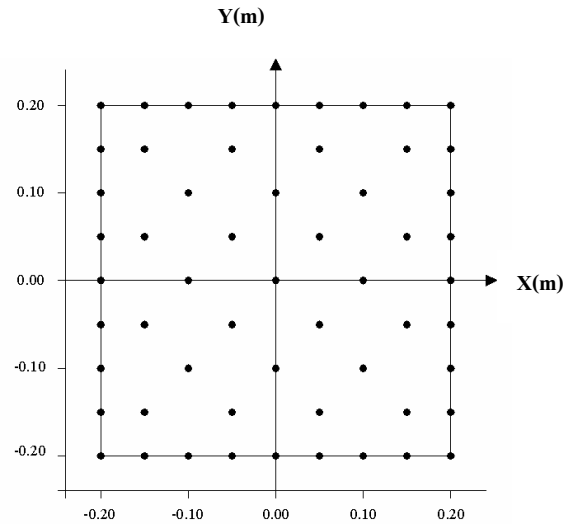
รูปที่ 4 แสดงเมชบนขอบเขตจำนวน 16 เอลิเมนต์และ 12 จุดภายในโดเมนสำหรับปัญหาตัวอย่างอธิบายด้วยสมการ (1)



รูปที่ 5 แสดงเมชบนขอบเขตจำนวน 32 เอลิเมนต์และ 27 จุดภายในโดเมนสำหรับปัญหาตัวอย่างอธิบายด้วยสมการ (1)



รูปที่ 6 แสดงเมชบนขอบเขตจำนวน 16 เอลิเมนต์และ 9 จุดภายในโดเมนสำหรับปัญหาตัวอย่างอธิบายด้วยสมการ (2)



รูปที่ 7 แสดงเมชบนขอบเขตจำนวน 32 เอลิเมนต์และ 25 จุดภายในโดเมนสำหรับปัญหาตัวอย่างอธิบายด้วยสมการ (2)

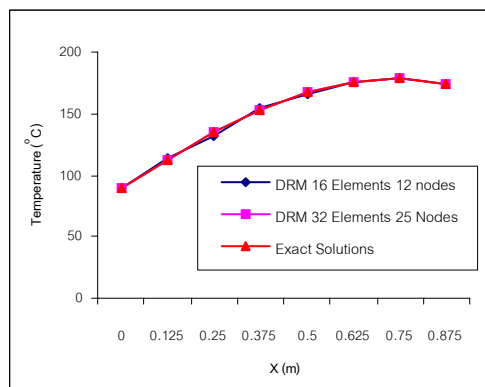
การวัดความคลาดเคลื่อน  $\varepsilon$  ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ตำแหน่งต่างๆจะสามารถหาได้จาก

$$\varepsilon = \left| \frac{u_a - u}{u} \right| \times 100 \quad (26)$$

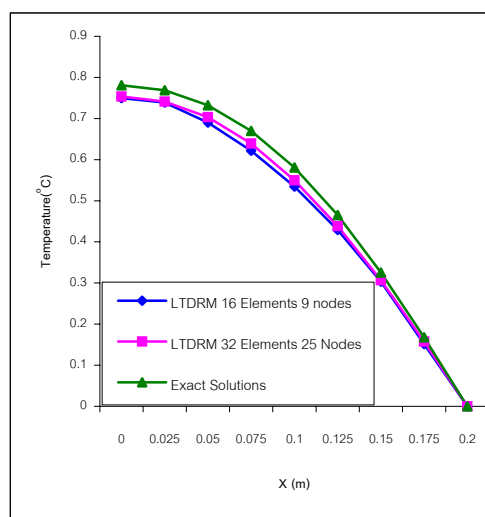
สมการ (26)  $u_a$  และ  $u$  จะหมายถึงผลเฉลยที่ประมาณค่าและผลเฉลยวิเคราะห์ ณ ตำแหน่งใดๆ ตามลำดับ

รูปที่ 4,5,6 และ 7 แสดงการเมชบนขอบเขตและเมชภายในโดเมนสำหรับปัญหาเชิงวิศวกรรมตัวอย่างซึ่งใช้เอลิเมนต์แบบคงที่ในการวิเคราะห์

รูปที่ 8 และ 9 แสดงผลการวิเคราะห์แสดงค่าของความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยซึ่งมีจำนวนต่างกัน 4 กรณีซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันและส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซให้ผลเฉลยเป็นที่น่าพอใจ และความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยลงเมื่อมีการใช้เอลิเมนต์บนขอบเขตและจุดภายในโดเมนมากขึ้น แสดงให้เห็นถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขมีคุณสมบัติลู่เข้า (convergence)



รูปที่ 8 แสดงผลการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างด้วยระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเปรียบเทียบกับผลเฉลยวิเคราะห์



รูปที่ 9 แสดงผลการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างด้วยระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซกับผลเฉลยวิเคราะห์

## 5.สรุป

บทความนี้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปัญหาเชิงวิศวกรรมแบบการนำความร้อนอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์และปัญหาการนำความร้อนที่ขึ้นกับเวลา โดยใช้ระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันและระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กันเชิงลาปลาซตามลำดับ ข้อมูลที่จัดเตรียมเป็นข้อมูลการเมชบนขอบเขตและจุดภายในโดเมน ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์แสดงให้เห็นถึงความแม่นยำและประสิทธิภาพของวิธีดังกล่าว

## 6.เอกสารอ้างอิง

- [1] Nardini, D. & Brebbia, C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements, Boundary Element Methods in Engineering, ed. C. A. Brebbia. Springer - Verlag, Berlin, 1982.
- [2] Partridge, P.W. and Brebbia, C.A. 1990. Computer Implement of The BEM Dual reciprocity Method for the solution of general field equations. Communications in Applied Numerical Method, 1990, Vol. 6, pp. 83-92.
- [3] Bokota, A. and Iskierka, S. 1995. An analysis of the diffusion - convection problem by the boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1995, Vol. 15, pp. 267 - 275.
- [4] Zhu, S. and Satravaha, P. Solving linear diffusion equations with the dual reciprocity method in laplace space. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, Vol 13, pp. 1 - 10.
- [5] Sutradhar, A., Paulino, G.H. and Gray, L.J. Transient heat conduction in homogeneous and non homogeneous material by Laplace transform Galerkin boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, Vol 26, pp. 119 - 132.
- [6] Stehfest, H. Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transform Commum Assoc Comput, 1970, Vol 13, pp.9 - 47
- [7] Carslaw, H.S. and Jacger, J.C. Conduction to heat in solids. Oxford University Press, London, 1959.