การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 19
19-21 ตุลาคม 2548 จังหวัดภูเก็ต

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์

The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems

ทวิวัชร วีระแกล้ว [1] ปเสฏฐา สารลักษณ์ [2]
กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ส่วนการศึกษา
โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า จ. นครนายก 26001
โทร 0-37393487 โทรสาร 0-37393487 E-mail: tawiwat@hotmail.com [1]

Tawiwat Veeraklaew [1] Pasettha Saraluk [2]
Department of Mechanical Engineering
Chulachomklao Royal Military Academy Nakhon-Nayok, 26001
Tel: 0-37393487 Fax: 0-37393487 E-mail: tawiwat@hotmail.com [1]

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้เป็นการนำเสนอปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในรูปแบบของความต้องการความนิ่มนวลของระบบตลอดการทำงาน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการกำหนดฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้นนิยมใช้ พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในบทความวิชาการหรืองานวิจัยชิ้นนี้จะเน้นเป็นพิเศษที่ความนิ่มนวลของระบบเนื่องจากเป็นที่ทราบกันดีว่าในการทำงานของระบบพลศาสตร์นั้นความนิ่มนวลเป็นที่ต้องการในหลายระบบด้วยกัน อาทิเช่น ความนิ่มนวลของการขับขี่รถยนต์ ความนิ่มนวลในการทำงานของหุ่นยนต์ที่เกี่ยวข้องกับวัสดุที่เปราะบาง เสียรูปร่างได้ง่าย ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจในปัญหานี้และต้องการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด จากการวิจัยพอสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขและนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม กล่าวคือ ได้ทั้งความนิ่มนวลและประหยัดพลังงาน

Abstract

This paper deals with the problem of finding the extremal solutions of the dynamic systems in term of minimum jerk. In general, energy, time, velocity and displacement are used as an objective function; however, this paper is emphasizing the minimum jerk instead. Moreover, this objective is needed in many dynamic systems such as automobile and robot that work with the fragile equipments. Not only the minimum jerk is become an objective of this work, but also the results are used to compare with the minimum energy problem. After comparison, the conclusion is that both results from the minimum jerk and energy are quite similar when the total energy consumptions are compared.

Keywords

1. **Minimum Jerk**
2. **Minimum Energy**
3. **Dynamic Optimization**
4. **Calculus of Variations**

1. บทนำ

ในรูปแบบปัญหาของระบบการเคลื่อนที่โดยทั่วๆไป จะต้องประกอบไปด้วยหลายส่วน เช่น สมการการเคลื่อนที่ เงื่อนไขของค่าเริ่มต้น (Initial Conditions) เงื่อนไขที่เป็นขอบเขต (Boundary Conditions) หรือ เงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่ง (Two-Point Boundary Value Conditions) โดยเฉพาะในกรณีของเงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่งนั้น มีการนำเสนอในหลายรูปแบบด้วยกันแต่เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า คำตอบของปัญหาดังกล่าวมีได้หลายคำตอบตัวอย่างเช่น การเดินทางจากจังหวัดหนึ่งไปอีกจังหวัดหนึ่งนั้นมีด้วยกันมากมายหลายเส้นทาง ทำให้มีการเลือกหาเส้นทางที่มีความเหมาะสมสูงสุดทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ ผู้ที่ตั้งปัญหานั้นว่าจะสนใจในเรื่องใดหรือความประสงค์ใดเป็นหลัก เช่น เส้นทางที่สั้นที่สุด

เส้นทางที่ประหยัดพลังงานมากที่สุด เป็นต้น จากปัญหาดังกล่าวในทางทฤษฎี ก็คือปัญหาของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด (Optimization Problems) นั่นเอง หนึ่งในวัตถุประสงค์ทั้งหลายนั้นนักวิจัยส่วนมากได้ให้ความสนใจในเรื่องของ การใช้พลังงานน้อยที่สุด[1] และนักวิจัยอีกหลายท่านก็ได้ให้ความสนใจในเรื่อง ของความนิ่มนวลของระบบ แต่จากการค้นคว้าก็ยังไม่มีผู้ใดทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ระหว่าง วัตถุประสงค์ทั้งสองอย่างนี้ ที่ผู้วิจัยมีความเห็นว่า น่าจะมีความสอดคล้องกันในผลลัพธ์ที่ได้และน่าจะมีข้อดีข้อเสียในการพิจารณาเลือกใช้ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ทั้งสองนี้

2. รูปแบบของปัญหา (Problem Statement)

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x} = f(x,u,t); \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า states และ control ตามลำดับ x_0 คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปร states t_0 คือเวลาเริ่มต้นและ $f(x,u,t)$ เป็นฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปของ states control และ เวลา รูปแบบของปัญหาในที่นี้ก็คือการหาค่าของ control input $u(t)$ และ ตัวแปร state $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุดหรือความนิ่มนวลสูงสุดเป็นจริง และสุดท้ายก็คือนำระบบไปสู่จุดหมายปลายทางที่

$$x(t_f) = x_f. \tag{2}$$

โดยที่ t_f คือเวลา ณ ที่จุดสุดท้ายที่พิจารณา

2.1 ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

ในปัญหานี้ ฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum u_i^2 dt,\ i = 1,\ldots,m \tag{3}$$

2.2 ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดได้มีข้อแตกต่างดังนี้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา (Jerk) คือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ u ดังนั้น jerk สามารถถูกเขียนในรูปของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้

กำหนดให้

$$u = \bar{x} \tag{4}$$

จากสมการที่ (1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x} = f(x,\bar{x},t) \tag{5}$$

โดยที่

$$\bar{x} = \tilde{u} \tag{6}$$

$\bar{x}$ และ $\tilde{u} \in R^m$ เมื่อเปรียบเทียบตัวแปรกับปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุดแล้ว $\bar{x}$ ก็คือ ตัวแปร controls ดังสมการที่ (4) นั่นเอง แต่ $\tilde{u}$ ในที่นี้ก็คือ jerk ทำให้ฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาความนิ่มนวลสูงสุดอยู่ในรูปของ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum \tilde{u}_i^2 dt,\ i = 1,\ldots,m \tag{7}$$

3. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Conditions)

โดยการศึกษาในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงาน ให้ฟังก์ชันนอล (Functional; $J[x]$) เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน ซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \Phi(t, x_L, \ldots, x_u)_{t_f} + \int_{L_o}^{L_1} L(t, x_l, \ldots, x_u, u_l, \ldots u_m) dt \tag{8}$$

แต่ถ้าพิจารณาคอสฟังก์ชันนอลที่ค่าพลังงานของระบบที่น้อยที่สุด (Minimum energy) จะเหลือรูปสมการเพียง

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left(L' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) \right) dt \tag{9}$$

การเลือกใช้เงื่อนไขใดนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณาโดยฟังก์ชันนอล $J[x]$ ในการศึกษานี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and end points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น (t_0) เวลาสุดท้าย (t_f) รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0), x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable functions) เป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_0 \le t \le t_f$ ให้ฟังก์ชัน $F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ แสดงเป็นฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1, x_2, ..., x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n) dt \qquad (10)$$

ถ้าให้ $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_i(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n] - J[x_1, x_2, ..., x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} F(t, x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, ..., \dot{x}_n + \dot{h}_n) \\ - F(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \end{bmatrix} dt\end{aligned} \qquad (11)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher order terms) ทิ้ง จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \qquad (12)$$

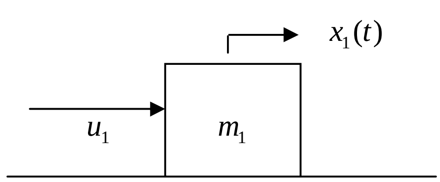
ซึ่ง δJ เป็นการประมาณค่าของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป และเมื่ออินทิเกรทเทอมที่สองด้วยวิธีอินทิเกรทบายพาร์ท (by part) จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i |_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i |_{t_0} \right] \qquad (13)$$

ส่วนเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดของค่าเหมาะสมสูงสุดเป็นค่าที่ทำให้ $\delta J = 0$ คือการทำให้ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ดังนั้นจึงสมมติให้ เป็นอนุพันธ์ต่อเนื่อง (Continuous derivatives) ทำให้ได้ค่าเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, ..., n \qquad (14)$$

4. ตัวอย่าง (Example)



รูปที่ 1 ระบบพลศาสตร์ของมวล m_1

จากรูปที่ 1 กำหนดให้ $m_1 = 1kg$ จะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบอยู่ในรูป

$$\ddot{x}_1 = u_1 \qquad (15)$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการที่ (1) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1\end{aligned} \qquad (16)$$

และกำหนดให้ $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$ และ $x_2(1) = 0$

4.1 ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

ในปัญหานี้ ฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป ดังนี้

$$J = \int_0^1 u_1^2 \, dt \qquad (17)$$

จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน

$$F = u_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(u_1 - \dot{x}_2) \qquad (18)$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็นจากสมการที่ (14) มีดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ u_1 &= -\lambda_2 / 2\end{aligned} \qquad (19)$$

4.2 ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

ในปัญหานี้ สมการที่ (16) จำเป็นที่จะต้องเขียนใหม่ให้มี jerk อยู่ด้วยในระบบดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1\end{aligned} \qquad (20)$$

และยังคงกำหนดให้ $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$ และ $x_2(1) = 0$ เช่นเดียวกับปัญหาของการใช้พลังงานน้อยที่สุด

ฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป ดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 \, dt \qquad (21)$$

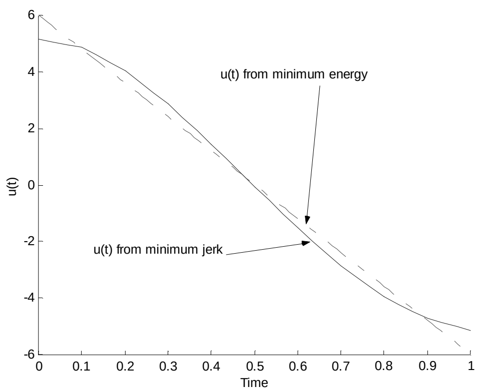
จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน

$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_3 - \dot{x}_2) + \lambda_3(\tilde{u}_1 - \dot{x}_3) \quad (22)$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็นจากสมการที่ (14) มีดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_1 &= -\lambda_3/2 \end{aligned} \quad (23)$$

5. ผลลัพธ์จากระเบียบวิธีทางตัวเลข (Numerical Results)



รูปที่ 2 เปรียบเทียบ $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหา

จากการใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขเพื่อนำมาแก้ปัญหาทั้งสอง แต่จะเห็นได้ว่าปัญหาของการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น (Linear) ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ว่า

$$u_1 = -12t + 6 \quad (24)$$

อย่างไรก็ตามในปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดนั้น ไม่สามารถหาคำตอบได้ในรูปแบบของสมการเชิงเส้นเนื่องจาก เงื่อนไขขอบเขตมีไม่เพียงพอ ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้นำระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่มีชื่อเรียกว่า Linear Programming ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่ใช้ในการหา ค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการของ $x_3(t)$ ซึ่งหมายความถึง $u_1(t)$ ในปัญหาของการใช้พลังงานน้อยที่สุด ดังจะเห็นได้จากสมการที่ (20)

เมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้เฉพาะ แรงที่กระทำต่อระบบพลศาสตร์นี้มาเขียนกราฟด้วยกันแล้วจะเห็นว่า แรง $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหามีความใกล้เคียงกันมากเนื่องจากค่าของ $J = \int_0^1 u_1^2 \, dt$ ของปัญหาที่พิจารณาการใช้พลังงานน้อยที่สุดและ ความนิ่มนวลสูงสุดมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 158 และ 151 โดยลำดับ และจากการเปรียบเทียบโดยการใช้ ค่าความเบี่ยงเบนในทฤษฎีของทางวิชาสถิติศาสตร์ จะเห็นได้ว่าค่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 0.3 ซึ่งเป็นค่าที่ยอมรับได้ว่าข้อมูลทั้งสองมีความใกล้เคียงกันจริง

6. สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

จากการวิจัยพอสรุปได้ว่า คำตอบที่ได้จากการพิจารณาหาค่าความนิ่มนวลสูงสุดนั้น มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขในเรื่องของ การที่สามารถกำหนดค่าเริ่มต้นและสุดท้ายให้กับแรงที่จะมาทำกับระบบได้ในอนาคต และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม กล่าวคือ ได้ทั้งความนิ่มนวลและประหยัดพลังงาน

เอกสารอ้างอิง

[1] Agrawal SK., Fabien BC.(1999). Optimization of Dynamic Systems. Boston: Kluwer Academic Publishers.

[2] Bock HG.(1978). Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems with Application to Optimal Control. ZAMM. p. 58.

[3] Craig JJ. (1986). Introduction to Robotic: Mechanics and Control. Addision-Wesley Publishing Company.

[4] Mark WS. (1989).Robot Dynamics and Control. University of Illinois at Urbana-Champaign.

[5] Kane TR., Levinson DA. (1985). Dynamics: Theory and Applications. McGraw-Hill Inc.

[6] Veeraklaew T. (2000) Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-order Dynamic systems [Dissertation]. Delaware: The University of Delaware.