

การชดเชยและประมาณค่าแรงเสียดทานคูลอมบ์โดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย

Compensation and Estimation of Coulomb's Friction by Using Extended Kalman Filter

โอภาส โกมลวัฒนาพานิชย์^{1*} อุดลย์ พัฒนภักดี² มงคล มงคลวงศ์โรจน์³
^{1,2} ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยศรีปทุม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900
³ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ ReCCIT
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520
* E-mail: ogomo@yahoo.com

Opart Gomonwattanapanich^{1*} Aduai Pattanapukdee² Mongkol Mongkolwongrojn³
^{1,2} Department of Mechanical Engineering, Sripatum University, Jatujak, Bangkok 10900
³ Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, ReCCIT,
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520
* E-mail: ogomo@yahoo.com

บทคัดย่อ

แรงเสียดทานปรากฏอยู่ในทุกระบบทางกล และเป็นปริมาณที่มีความสลับซับซ้อนสูง อีกทั้งเป็นปริมาณที่ยากต่อการวัด หรือ ทราบค่าที่แท้จริง บทความนี้กล่าวถึงการชดเชย และการประมาณค่าแรงเสียดทานคูลอมบ์ ที่เกิดขึ้นในระบบทางกล โดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย ในการประมาณค่าแรงเสียดทาน

ผลการศึกษาด้วยการจำลองการทำงานด้วยคอมพิวเตอร์พบว่า ระบบที่มีการชดเชยแรงเสียดทานที่ได้จากการประมาณค่าโดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย จะมีสมรรถนะของระบบที่ดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับระบบที่ไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน สมรรถนะของระบบวัดได้จากดัชนีชี้วัด 2 ตัว คือ root-mean-square error (RMS Error) และ peak error (Peak Error) โดยค่า RMS Error ลดลง 89% 93.2% และ 4.2% สำหรับสัญญาณทางเข้าที่เป็นรูปสามเหลี่ยม รูปซายด์ และรูปสี่เหลี่ยม ตามลำดับ ส่วนค่า Peak Error ลดลง 79.4% และ 93% สำหรับสัญญาณทางเข้าที่เป็นรูปสามเหลี่ยม และ รูปซายด์ ตามลำดับ ในส่วนสัญญาณทางเข้าที่เป็นรูปสี่เหลี่ยม Peak Error มีค่าเพิ่มขึ้น 15.4% เนื่องจากเกิด Overshoot ในระบบที่มีการชดเชยแรงเสียดทาน

คำหลัก การชดเชยแรงเสียดทาน การประมาณค่าแรงเสียดทาน แรงเสียดทานคูลอมบ์ ตัวกรองคาลมานแบบขยาย

Abstract

A friction exists in every mechanical system. The phenomenon of friction is complicated and difficult to measure the exact value. In this paper, the compensation and estimation of Coulomb's friction by using the Extended Kalman Filter (EKF) have been introduced and investigated.

The results from computer simulations showed that a system with the friction compensation by using the EKF had the better performances than a system without the friction compensation. The performances of the system were indicated by root-mean-square error (RMS Error) and peak error (Peak Error). The RMS Errors of the system were decrease by 89%, 93.2%, and 4.2% for triangular, sinusoidal, and square input signals, respectively. Also, the Peak Errors were decrease by 79.4% and 93% for triangular and sinusoidal input signals, respectively. However, for square input signal, the Peak Error was increase by 15.4% due to the overshoot of the system with friction compensation.

Keywords: friction compensation, friction estimation, Coulomb's friction, Extended Kalman Filter

1. บทนำ

แรงเสียดทาน(Friction) เป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในทุกระบบทางกล ที่มีการเคลื่อนที่ พฤติกรรมของแรงเสียดทานมีความสลับซับซ้อน และ ยังไม่เป็นที่เข้าใจอย่างแน่ชัด [1] คุณลักษณะของแรงเสียดทาน มีทั้ง ความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity), ความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinearity) และ เวลาหน่วง (Time Delay)

จากคุณลักษณะที่สลับซับซ้อนของแรงเสียดทาน และ ไม่สามารถวัดค่าแรงเสียดทานได้โดยตรงจากระบบ ทำให้วิศวกรผู้ออกแบบจำนวนมากละเลยผลของแรงเสียดทาน หรือ แก้ปัญหาของแรงเสียดทานอย่างไม่ถูกต้อง ทำให้ระบบที่ถูกออกแบบทำงานผิดพลาด, ขาดประสิทธิภาพ และขาดความเที่ยงตรงในการทำงาน

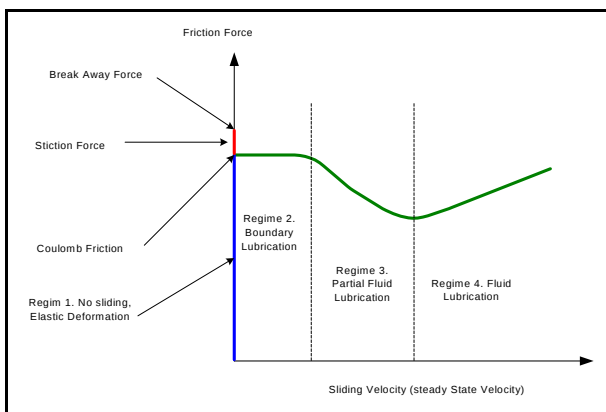
ในบทความนี้ จะกล่าวถึงความรู้และคุณลักษณะเบื้องต้นของแรงเสียดทาน ขั้นตอนของตัวกรองคาลมาน การประมาณค่าแรงเสียดทาน कुลอมบ์โดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย การชดเชยแรงเสียดทาน และผลการจำลองการทำงานด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของระบบ เมื่อมี และไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน कुลอมบ์

2. ความรู้และคุณลักษณะเบื้องต้นของแรงเสียดทาน

แรงเสียดทาน คือแรงต้านทานการเคลื่อนที่ของวัตถุ ที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุสองชิ้น ขนาดของแรงเสียดทาน ขึ้นอยู่กับตัวแปรหลายอย่าง อาทิ ขนาดของแรงกดตั้งฉากกับผิวสัมผัส ลักษณะการเคลื่อนที่ ความเร็วสัมพัทธ์ รูปร่างของผิวสัมผัส ความหยาบของผิว หรือ คุณสมบัติของเหลวระหว่างผิวสัมผัส เป็นต้น

การศึกษาเกี่ยวกับแรงเสียดทานเริ่มต้นในหลายทศวรรษมาแล้ว Leonardo Da Vinci (1519) ได้ศึกษา และ สังเกต คุณลักษณะของแรงเสียดทานเป็นคนแรก เขาได้บันทึกไว้ว่า “แรงเสียดทาน แปรผันโดยตรงกับการงาน ด้านทานการเคลื่อนที่ และ ไม่ขึ้นกับพื้นที่ของผิวสัมผัส” การค้นพบของ Da Vinci เป็นความลับอยู่ในบันทึกของเขานานนับร้อยปี จนกระทั่ง Amontons [1] ได้ทำการค้นคว้า และ เปิดเผยขึ้นในปี 1699 จากนั้น Coulomb (1785) ได้พัฒนาความรู้ขึ้นนี้ เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง และเป็นที่รู้จักกันทั่วไปในชื่อของแรงเสียดทาน कुลอมบ์ (Coulomb's Friction)

คุณลักษณะสำคัญประการหนึ่งของแรงเสียดทาน คือ กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงเสียดทานกับความเร็วสัมพัทธ์สม่ำเสมอเมื่อวัตถุสองชิ้นเคลื่อนที่สัมผัสกันภายใต้สารหล่อลื่น เรียกว่า Stribeck Curve ซึ่งมีลักษณะทั่วไปแสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ลักษณะทั่วไปของ Stribeck Curve

ตามรูปที่ 1 ลักษณะของแรงเสียดทาน แบ่งออกเป็น 4 ย่านตามความเร็วสัมพัทธ์สม่ำเสมอ ได้แก่ ย่านที่ไม่มีการเคลื่อนที่ (No Sliding Regime), ย่านที่ไม่มีของเหลวหล่อลื่น (Boundary Lubrication Regime), ย่านที่มีของเหลวหล่อลื่นบางส่วน (Partial Fluid Lubrication Regime), และ ย่านที่มีของเหลวหล่อลื่นเต็ม (Fluid Lubrication Regime)

ในย่านที่ไม่มีการเคลื่อนที่ แรงเสียดทานไม่ขึ้นกับความเร็ว แต่จะขึ้นอยู่กับระยะการเปลี่ยนรูปของวัตถุ (Displacement Deformation) แรงยึดติด (Stiction Force) อาจเกิดขึ้นได้ในย่านนี้ เนื่องจากแรงยึด

เหนี่ยวระหว่างผิวสัมผัสเมื่อผิววัตถุถูกวางนิ่งติดกันในช่วงเวลาหนึ่ง สำหรับในย่านที่ไม่มีของเหลวหล่อลื่น ความเร็วสัมพัทธ์สม่ำเสมอ จะมีค่าต่ำมาก ทำให้ไม่เกิดชั้นของเหลวระหว่างผิวสัมผัส การสัมผัสกันของผิววัตถุทั้งสอง จะเป็นแบบผิวของแข็งกับของแข็ง (Solid-to-Solid) เมื่อความเร็วสัมพัทธ์เพิ่มขึ้น ชั้นของเหลวจะถูกสร้างขึ้นบางส่วน สอดแทรกระหว่างผิวสัมผัสของของแข็ง ทำให้ผิวสัมผัสส่วนที่เป็นของแข็งกับของแข็งลดลงซึ่งส่งผลให้แรงเสียดทานมีค่าลดลงด้วย ในย่านนี้แรงเสียดทานจะแปรผกผันกับความเร็วสัมพัทธ์ เรียกว่าย่านที่มีของเหลวหล่อลื่นบางส่วน ในย่านที่มีของเหลวหล่อลื่นเต็ม ชั้นของเหลวจะพัฒนาขึ้นแบบเต็มรูป และมีความหนามากขึ้น ทำให้ไม่มีการสัมผัสกันระหว่างผิวที่เป็นของแข็งกับของแข็ง ซึ่งแรงเสียดทานในย่านนี้จะแปรผันกับความเร็วสัมพัทธ์

คุณลักษณะของแรงเสียดทาน นอกจากมีความสัมพันธ์กับความเร็วสัมพัทธ์สม่ำเสมอแบบไม่เป็นเส้นตรงตาม Stribeck Curve แล้วยังมีเวลาของความล่าช้า ในการตอบสนองต่อความเร็วที่เปลี่ยนแปลงอีกด้วย ทั้งนี้เนื่องจากความล่าช้าของการพัฒนาชั้นของเหลว ระหว่างผิวสัมผัสก่อนเข้าสู่สภาวะคงตัว เวลาของความล่าช้าที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า “Frictional Memory” [1]

3. ขั้นตอนของตัวกรองคาลมาน

ตัวกรองคาลมาน คือกระบวนการประมาณค่า ของสภาวะระบบหรือข้อมูล ที่มีประสิทธิภาพอย่างหนึ่ง ซึ่งเสนอโดย R.E. Kalman ในปี 1960 [2] ขั้นตอนของตัวกรองคาลมานโดยสังเขปมีดังนี้

กำหนดให้ระบบเชิงเส้นตรง (Linear System) มีสมการสภาวะของระบบเป็น

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k + Gw_k \quad (1)$$

และตัวแปรที่สามารถวัดค่าได้มีสมการเป็น

$$Z_k = CX_k + n_k \quad (2)$$

โดย X_k คือ สภาวะของระบบ, u_k คือ สัญญาณควบคุม, Z_k คือ ข้อมูลที่สามารถวัดได้; A, B, G และ C เป็น Constant Matrices ที่มีขนาดสอดคล้องกับเวกเตอร์ X_k, u_k และ Z_k ; w_k และ n_k เป็นตัวแปรแบบสุ่ม (Random Variables) เรียกว่า Process Noise และ Measurement Noise ตามลำดับ โดยมีคุณสมบัติ เป็น white noises และไม่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน (Uncorrelated)

Noise Covariance Matrices นิยามโดย

$$Q = E\{w_k w_k^T\} \quad (3)$$

$$R = E\{n_k n_k^T\}$$

(4) โดย $E\{\cdot\}$ แทน Expectation ของตัวแปรใน

เครื่องหมาย $\{\cdot\}$, Q และ R เรียกว่า Process Noise Covariance Matrix และ Measurement Noise Covariance Matrix ตามลำดับ

ค่าความผิดพลาด (Error) ของการประมาณค่าสภาวะระบบมีค่า

$$e_k = X_k - \hat{X}_k \quad (5)$$

โดย $\hat{X}_k$ คือค่าประมาณของสภาวะระบบ และ X_k คือค่าจริงของสภาวะระบบ Error Covariance Matrix นิยามโดย

$$P_k = E\{e_k e_k^T\} \quad (6)$$

Error Covariance Matrix ณ เวลาที่ $k+1$ ก่อนมีข้อมูลการวัดมีค่า

$$P_{k+1}^- = AP_k A^T + GQG^T \quad (7)$$

และค่าประมาณของสภาวะระบบก่อนมีข้อมูลการวัดมีค่า

$$\hat{X}_{k+1}^- = A\hat{X}_k + Bu_k \quad (8)$$

สัญลักษณ์ – แทนปริมาณที่มีการประมาณค่า ก่อนมีข้อมูลการวัด

หลังการวัดข้อมูล P_{k+1} และ X_{k+1} มีค่าตามสมการ

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1}C)P_{k+1}^- \quad (9)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1}^- + K_{k+1}(Z_{k+1} - C\hat{X}_{k+1}^-) \quad (10)$$

โดย

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- C^T (CP_{k+1}^- C^T + R)^{-1} \quad (11)$$

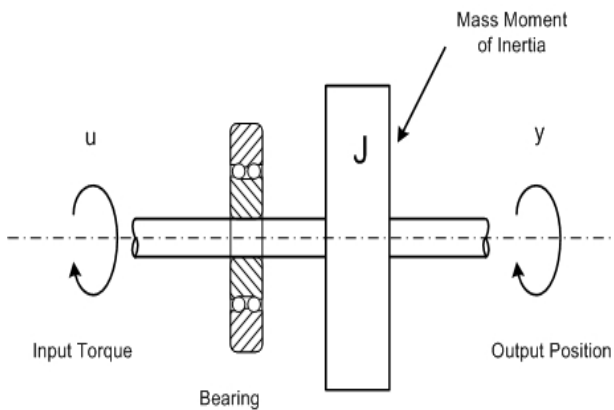
Matrix K เรียกว่า Kalman Gain และปริมาณ $(Z_{k+1} - C\hat{X}_{k+1}^-)$

เรียกว่า Residual ซึ่งแทนปริมาณแตกต่างระหว่างค่าที่ประมาณได้ก่อนการวัด และค่าที่วัดได้จริง

4. สมการทางคณิตศาสตร์ของระบบและตัวควบคุม

4.1 สมการทางคณิตศาสตร์ของระบบ

เพื่อประโยชน์ในการศึกษาเปรียบเทียบจะพิจารณาระบบทางกลที่อาจพบเห็นได้เสมอ คือ ระบบการหมุนของมวลที่รองรับด้วยแบริ่ง ซึ่งควบคุมตำแหน่งเชิงมุมของมวลด้วยแรงบิด แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในระบบเกิดจากแบริ่งที่รองรับการหมุนของเพลาลักษณะทางกายภาพของระบบการหมุนของมวล แสดงดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 ลักษณะทางกายภาพของระบบการหมุนของมวล

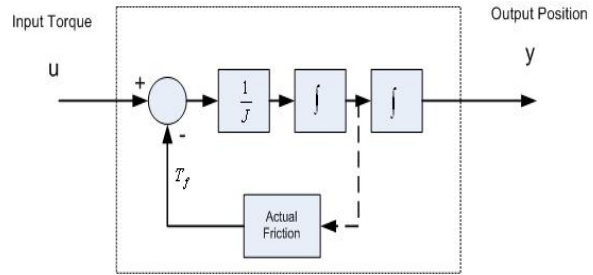
ตามรูปที่ 2 u คือแรงบิดที่ใช้ขับมวล y คือตำแหน่งเชิงมุมของมวล และ J คือ Mass Moment of Inertia ถ้าให้ T_f เป็นแรงเสียดทานของแบริ่ง จากกฎข้อสองของนิวตัน

$$\sum T = J\alpha \quad (12)$$

$$u - T_f = J\ddot{y} \quad (13)$$

หรือ
$$y = \iint \frac{1}{J} (u - T_f) dt dt \quad (14)$$

ระบบตามสมการที่ (14) แสดงด้วย Block Diagram ได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 Block Diagram ของระบบการหมุนของมวล

4.2 ตัวควบคุม สำหรับระบบการหมุนของมวล

ระบบการหมุนของมวลในหัวข้อ 4.1 เมื่อไม่คิดแรงเสียดทานในระบบ จะมี Transfer Function เป็น

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2} \quad (15)$$

ระบบตามสมการ (15) ซึ่งมีคู่ของโพล (Double Poles) ที่จุดกำเนิด สามารถทำให้ระบบมีความเสถียรได้ โดยใช้ตัวควบคุมแบบ PD Controller ร่วมกับ Low-Pass Filter เพื่อลดสัญญาณรบกวนจากเครื่องมือวัด สมการของตัวควบคุม เป็นไปตามสมการที่ (16) [3]

$$u = K_p e + \left(\frac{sK_v}{s + K_v} \right) K_d e \quad (16)$$

โดย u คือสัญญาณทางออกของตัวควบคุม (Plant Input), e คือสัญญาณ error หรือ สัญญาณทางเข้าตัวควบคุม และ K_p , K_d , K_v คือ อัตราการขยาย (Gain) ของตัวควบคุม จากการออกแบบด้วยวิธี Root Locus Technique โดยสมมติให้ระบบมี Mass Moment of Inertia, $J = 0.1 \text{ kg.m}^2$ และกำหนดให้ระบบมี Damping Ratio น้อยกว่า 0.7 และ Time Constant น้อยกว่า 1 วินาที จะได้ค่า $K_p = 4.4 \text{ N.m.rad}^{-1}$, $K_d = 0.9533 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$, และ $K_v = 30 \text{ s}^{-1}$

5. การประมาณแรงเสียดทานโดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย

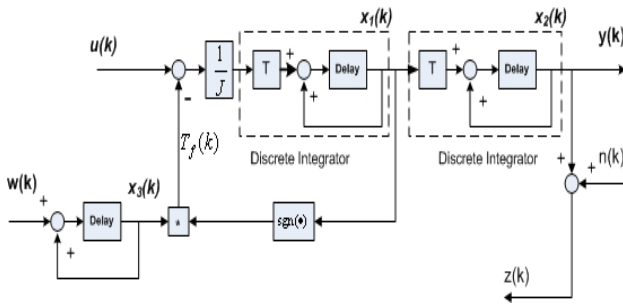
กำหนดให้แรงเสียดทานเป็นไปตามสมการ [4]

$$T_f(k) = a(k) \text{sgn}(v(k)) \quad (17)$$

และ
$$a(k+1) = a(k) + w(k) \quad (18)$$

โดย $T_f(k)$ คือแรงเสียดทาน, $v(k)$ คือความเร็วสัมพัทธ์, และ $w(k)$ คือตัวแปรสุ่มแบบ white noise

จากสมการ (17) และ (18), Discrete Block Diagram สำหรับระบบการหมุนของมวล สามารถเขียนได้ดังรูปที่ 4 โดย T คือ Sampling Period, $z(k)$ คือสัญญาณจากการวัด, $n(k)$ คือสัญญาณรบกวน(noise) จากการวัด, และ $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ คือ State Variables ของระบบ



รูปที่ 4 Discrete Block Diagram สำหรับระบบการหมุนของมวล

จาก Block Diagram รูปที่ 4 สมการสถานะของระบบมีค่า

$$X(k+1) = f(X(k), u(k)) + G \cdot w(k) \quad (19)$$

และ
$$z(k) = h(X(k)) + n(k) \quad (20)$$

โดย

$$X(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k)]^T \quad (21)$$

$$f(X(k), u(k)) = \begin{bmatrix} x_1(k) - \frac{T}{J} x_3(k) \operatorname{sgn}(x_1(k)) - \frac{T}{J} u(k) \\ T x_1(k) + x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$G = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (23)$$

$$h(X(k)) = x_2(k) \quad (24)$$

และ Jacobean Matrices ของระบบตามสมการ (19) และ (20) มีค่า

$$A(k) = \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{T}{J} \operatorname{sgn}(x_1(k)) \\ T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$B(k) = \frac{\partial f}{\partial u} = [-\frac{T}{J} \ 1 \ 0]^T \quad (26)$$

$$C(k) = \frac{\partial h}{\partial X} = [0 \ 1 \ 0] \quad (27)$$

ระบบตามสมการที่ (19) และ (20) เป็นระบบแบบ nonlinear ซึ่งการประมาณค่าของสถานะระบบจำเป็นต้องใช้ ตัวกรองคาลมานแบบขยาย (Extended Kalman Filter, EKF) ซึ่งมีขั้นตอนคล้ายคลึงกับขั้นตอนของตัวกรองคาลมาน ดังนี้

Error Covariance Matrix และค่าประมาณของสถานะระบบก่อนมีข้อมูลการวัดมีค่า

$$P^-(k+1) = A((\hat{X}(k), u(k))) \cdot P(k) \cdot A^T(\hat{X}(k), u(k)) + G \cdot Q \cdot G^T \quad (28)$$

$$\hat{X}^-(k+1) = f(\hat{X}(k), u(k)) \quad (29)$$

และหลังการวัดข้อมูลมีค่า

$$P(k+1) = \{I - K(k+1) \cdot C(\hat{X}^-(k+1))\} \cdot P^-(k+1) \quad (30)$$

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}^-(k+1) + K(k+1) \cdot \{z(k+1) - h(\hat{X}^-(k+1))\} \quad (31)$$

โดย

$$K(k+1) = P^-(k+1) \cdot C^T(\hat{X}^-(k+1)) \cdot \{C(\hat{X}^-(k+1)) \cdot P^-(k+1) \cdot C^T(\hat{X}^-(k+1)) + R\}^{-1} \quad (32)$$

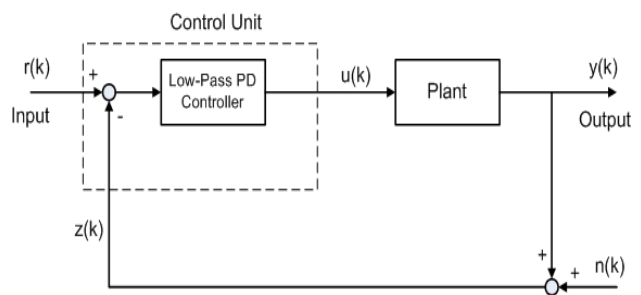
สำหรับค่าแรงเสียดทานประมาณได้โดยใช้สมการที่ (17) โดย

$$\hat{T}_f(k) = \hat{a}(k) \operatorname{sgn}(\hat{v}(k)) \quad (33)$$

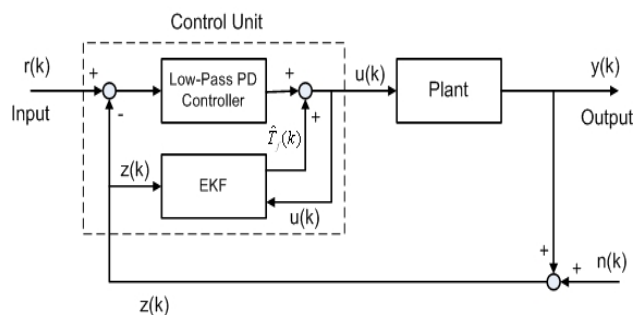
และ
$$\hat{a}(k) = \hat{x}_3(k), \quad \hat{v}(k) = \hat{x}_1(k) \quad (34)$$

6. การจำลองการทำงานระบบด้วยคอมพิวเตอร์

ในส่วนนี้เป็นการศึกษาถึงสมรรถนะระบบ เมื่อมีการชดเชยแรงเสียดทานในระบบ โดยใช้การประมาณแรงเสียดทานด้วยตัวกรองคาลมานแบบขยาย การศึกษาจะใช้คอมพิวเตอร์จำลองการทำงานของระบบ และศึกษาเปรียบเทียบสมรรถนะของระบบภายใต้การควบคุมของ Low-Pass PD Controller ในกรณีที่มีการชดเชยแรงเสียดทาน และในกรณีที่ไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน Block Diagram ของระบบทั้งสองกรณี แสดงดังรูปที่ 5 และ 6



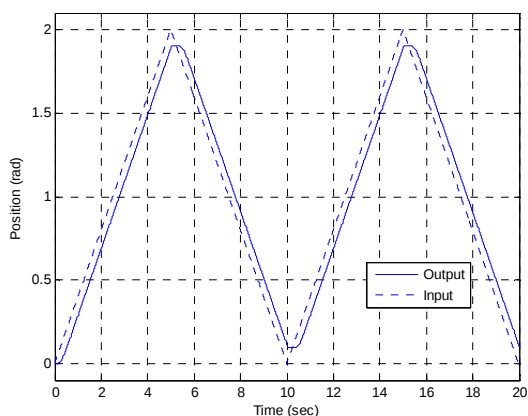
รูปที่ 5 ระบบภายใต้การควบคุมของ Low-Pass PD Controller โดยไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน



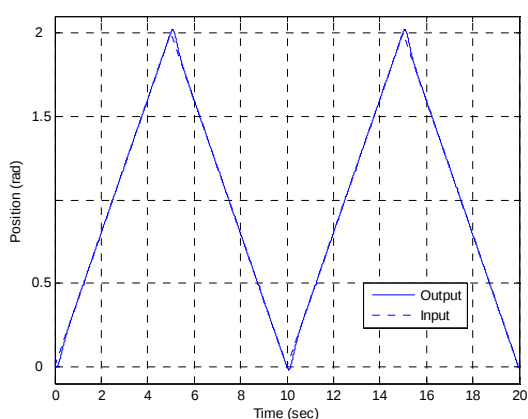
รูปที่ 6 ระบบภายใต้การควบคุมของ Low-Pass PD Controller และมีการชดเชยแรงเสียดทานโดยใช้ EKF

ในแต่ละกรณีของการจำลองการทำงานจะใช้สัญญาณทางเข้า $(r(k))$ 3 รูปแบบ คือ Triangular, Sinusoidal และ Square สำหรับค่าแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นจริงในระบบ สมมุติให้เป็นแรงเสียดทานลูลอมป์ ซึ่งมีขนาดของแรงเสียดทานเป็น 0.5 N.m

ตัวอย่างกราฟแสดงค่าเปรียบเทียบสัญญาณทางเข้าและสัญญาณทางออกของระบบเมื่อมีสัญญาณทางเข้าเป็นแบบ Triangular ในกรณีที่ไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน และในกรณีที่มีการชดเชยแรงเสียดทาน ได้แสดงไว้ตามรูปที่ 7 และ 8 ตามลำดับ



รูปที่ 7 เปรียบเทียบสัญญาณทางเข้าและสัญญาณทางออกของระบบ
เมื่อไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน



รูปที่ 8 เปรียบเทียบสัญญาณทางเข้าและสัญญาณทางออกของระบบ
เมื่อมีการชดเชยแรงเสียดทาน

สำหรับสมรรถนะของระบบสามารถวัดได้ด้วยดัชนีชี้วัดสอง
อย่าง คือ RMS Error และ Peak Error ซึ่งนิยามโดย

$$RMS_Error = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - r_i)^2} \quad (35)$$

$$Peak_Error = \text{Max.} |y_i - r_i| \quad (36)$$

โดย n คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด y_i คือสัญญาณทางออกระบบและ r_i
คือสัญญาณทางเข้าระบบ

ค่าดัชนีชี้วัดสมรรถนะระบบจากการจำลองการทำงานด้วย
คอมพิวเตอร์ทั้งสองกรณีโดยมีรูปแบบสัญญาณทางเข้าต่าง ๆ กัน ได้
คำนวณและแสดงไว้ตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1: ค่าดัชนีชี้วัดสมรรถนะของระบบ

Input Signals	Without Friction Compensation		With Friction Compensation		% Improvement	
	RMS Error (rad)	Peak Error (rad)	RMS Error (rad)	Peak Error (rad)	RMS Error (%)	Peak Error (%)
Triang	0.11143	0.09282	0.01223	0.01916	89.0	79.4
Sinusoi	0.10453	0.09373	0.00706	0.00564	93.2	94.0
Square	0.25460	0.50244	0.24385	0.57959	4.2	-15.4

6. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ผลการศึกษาโดยอาศัยข้อมูลจากการจำลองการทำงานของระบบ
ด้วยคอมพิวเตอร์ พบว่าระบบที่มีการชดเชยแรงเสียดทานคูลอมบ์ โดย
วิธีการประมาณค่าแรงเสียดทานด้วยตัวกรองคาลมานแบบขยาย จะมี
สมรรถนะระบบที่ดีกว่าระบบที่ไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน โดยค่า
RMS Error ของระบบที่มีการชดเชยแรงเสียดทานเปรียบเทียบกับ
ระบบที่ไม่มีการชดเชยแรงเสียดทาน ลดลง 89% 93.2% และ 4.2 %
สำหรับสัญญาณทางเข้าที่เป็นรูปสามเหลี่ยม รูปซายด์ และรูปสี่เหลี่ยม
ตามลำดับ ส่วนค่า Peak Error ลดลง 79.4% สำหรับสัญญาณ
ทางเข้าที่เป็นรูปสามเหลี่ยม และลดลง 93% สำหรับสัญญาณทางเข้าที่
เป็นรูปซายด์ ในส่วนสัญญาณทางเข้าที่เป็นรูปสี่เหลี่ยม Peak Error มี
ค่าเพิ่มขึ้น 15.4% เนื่องจากการเกิด Overshoot ในระบบที่มีการชดเชย
แรงเสียดทาน ซึ่ง Overshoot ที่เกิดขึ้นสามารถปรับลดลงได้ด้วยการ
ปรับเปลี่ยนค่าอัตราการขยายของตัวควบคุม

การที่สมรรถนะของระบบที่มีการชดเชยแรงเสียดทานได้รับการ
ปรับปรุงให้ดีขึ้นได้ เนื่องจากการประมาณค่าแรงเสียดทานโดยใช้ตัว
กรองคาลมานแบบขยายสามารถประมาณค่าได้ใกล้เคียงกับค่าแรง
เสียดทานจริงที่เกิดขึ้นจริงในระบบ อย่างไรก็ตามการศึกษานี้ได้จำกัด
อยู่เฉพาะแรงเสียดทานคูลอมบ์เท่านั้น ซึ่งแรงเสียดทานในระบบจริงจะ
มีความสลับซับซ้อนมากกว่า

กิตติกรรมประกาศ

เนื้อหาในบทความนี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยเรื่อง “การ
ประมาณแรงเสียดทานในแบร์ริงโดยใช้ ตัวกรองคาลมานแบบขยาย” ซึ่ง
ได้รับการสนับสนุนจากกองทุนวิจัย มหาวิทยาลัยศรีปทุม

เอกสารอ้างอิง

- [1] Armstrong-Helouvry, Brian, Pierre Dupont, and Carlos Canudas De Wit, “A survey models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction,” *Automatica*, Vol. 30, No. 7, 1994, pp. 1083-1138.
- [2] R.E. Kalman, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” *Transaction of ASME – Journal of Basic Engineering*, 82(Series D), 1960, pp. 35-45.
- [3] Jayesh Amin, Bernard Friedland and Avraham Harnoy, “Implementation of Friction Estimation and Compensation Technique,” *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*, Dearborn, MI, USA, September 15-18, 1996, pp. 804-808.
- [4] Opart Gomonwattanapanich, “Identification and Compensation of Friction in Mechanical Systems with Stochastic Inputs,” Ph.D. Dissertation, University of Texas at Arlington, 2003, pp. 26-27.