

การออกแบบตัวควบคุม H_∞ ด้วยเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณวงกลมสำหรับระบบรองรับแอ็กทีฟ
โดยอาศัยตัวสังเกตสถานะOBSERVER-BASED ROBUST H_∞ CONTROLLER DESIGN WITH CIRCULAR POLE
CONSTRAINTS FOR ACTIVE SUSPENSION SYSTEMSธีรเดช ชีวนันทชัย[†] และ อติรักษ์ กาญจนหฤทัย[‡][†]สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต กรุงเทพมหานคร 10250

โทร. 321-6930-9 ต่อ 1203, โทรสาร 321-4444, e-mail: theeradet_ch@kbu.ac.th

[‡]ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ วิทยาลัยวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยรังสิต ปทุมธานี 12000Theeradet Cheewananthachai[†] and Adirak Kanchanaharuthai[‡][†]Dept. of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University, Bangkok, 10250

Tel: 321-6930-9 Ext. 1203, Fax: 321-4444. e-mail: theeradet_ch@kbu.ac.th

[‡]Dept. of Electrical and Electronic Engineering, College of Engineering, Rangsit University, Phatum-Thani, 12000

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุม H_∞ ที่คงทนด้วยเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณวงกลม โดยอาศัยโครงสร้างของตัวสังเกตสถานะกับระบบรองรับแอ็กทีฟ เพื่อรองรับผลของความไม่แน่นอนของระบบทางกายภาพที่เกิดขึ้น และเพื่อปรับปรุงผลตอบสนองเชิงเวลาได้ตามความต้องการ จากการกำหนดตำแหน่งโพลให้อยู่ในบริเวณที่กำหนด นอกจากนี้สมรรถนะของเงื่อนไข H_∞ และเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณวงกลมจะถูกแปลงสู่เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อใช้ในการหาตัวควบคุมที่ต้องการ

คำสำคัญ: ตัวควบคุม H_∞ ที่คงทน, การวางตำแหน่งโพลในบริเวณวงกลม, ระบบรองรับแบบแอ็กทีฟ

Abstract

This paper proposes a method for the design of a robust H_∞ controller with circular pole constraints, based on an observer structure, for active suspension systems to support uncertainties in physical systems. This proposed controller can improve desired transient responses which can be defined from a specified region. Also, the H_∞ performance and pole constraints are transformed to Linear Matrix Inequality (LMI) constraints to use in finding out a desired controller.

Keywords: robust H_∞ controller, pole assignment in a specified disk, active suspension systems.

1 บทนำ

ในปัจจุบันอุตสาหกรรมยานยนต์ได้พยายามพัฒนาออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบรองรับในยานยนต์ เพื่อลดความสะเทือนในรถยนต์อันเนื่องมาจากความไม่ราบเรียบของพื้นถนน และเพื่อลดความเสียหายของช่วงล่างของยานพาหนะ รวมทั้งเพื่อช่วยให้ผู้โดยสารในยานพาหนะมีความรู้สึกพึงพอใจในการโดยสาร ดังเช่นงานวิจัยของ Li *et al.* [1] ศึกษาเกี่ยวกับการออกแบบตัวควบคุมสัญญาณออกที่เหมาะสมที่สุด Camino *et al.* [2] ศึกษาการออกแบบตัวควบคุมสัญญาณออกเชิงสถิติ และ Cherry *et al.* [3] ทำการออกแบบตัวควบคุมพัสซีในการควบคุม เป็นต้น อย่างไรก็ตามในการออกแบบตัวควบคุม พบว่ามีปัญหาหนึ่งซึ่งเกิดขึ้นกับระบบรองรับของยานยนต์อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ นั่นคือปัญหาของความไม่แน่นอน ของพารามิเตอร์ของระบบรองรับ เช่นความดันภายในยาง และเงื่อนไขของสภาพพื้นถนนที่แปรเปลี่ยนไป เป็นต้น ดังนั้นปัญหานี้อาจทำให้เกิดผลทำให้สมรรถนะต่างๆ ที่ผู้ออกแบบกำหนดไว้ตั้งแต่เริ่มต้นไม่สามารถเป็นไปตามเป้าหมาย

การออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนต่อ ความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ที่มีต่อระบบรองรับแอ็กทีฟนี้ โดยอาศัยโครงสร้างของตัวสังเกตสถานะนี้ ต้องเผชิญปัญหาของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดที่ไม่เป็นเชิงคอนเวกต์ (nonconvex optimization) ซึ่งจะอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (Bilinear Matrix Inequality: BMI) และค่อนข้างยากในการคำนวณ อย่างไรก็ตามเราใช้เทคนิคการแปลงจาก BMI ไปเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequality: LMI) ในการออกแบบตัวควบคุมสัญญาณออกพลวัตแทน

ได้ สำหรับการออกแบบตัวควบคุม เราเริ่มจากการจัดโครงสร้างของ ความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ให้มีความสัมพันธ์ในรูปของ ความไม่แน่นอนที่มีขอบเขต (norm-bounded uncertainty) กับ สมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ที่ประกอบด้วยเงื่อนไขบังคับในการวางตำแหน่งโพล ในบริเวณวงกลม เพื่อให้การออกแบบนี้สามารถรับประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ที่เหมาะสมที่สุดและผลตอบสนองเชิงเวลาชั่วคราวที่ได้จากการวาง กำหนดโพลในบริเวณวงกลมที่ต้องการ

บทความนี้ประกอบด้วย 6 หัวข้อ หัวข้อที่ 2 กล่าวถึงการกำหนด ปัญหาและกำหนดสมรรถนะที่ต้องการออกแบบ หัวข้อที่ 3 กล่าว ถึงโครงสร้างของแบบจำลองระบบรองรับแบบแอ็กทีฟที่พิจารณา หัว ข้อที่ 4 กล่าวถึงบทตั้งที่ใช้ในการพิสูจน์และทฤษฎีที่ใช้ในการออก แบบรวมทั้งขั้นตอนการคำนวณหาตัวควบคุมที่ต้องการ หัวข้อที่ 5 กล่าวถึงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ และหัวข้อสุดท้ายเป็น การสรุปผลของงานที่น่าสนใจ

2 การกำหนดปัญหา

พิจารณาระบบที่มีความไม่แน่นอนดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B_u + \Delta B_u)u(t) + (F_w + \Delta F_w)w(t) \\ &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}_u u(t) + \tilde{F}_w w(t)\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}z(t) &= (C_1 + \Delta C_1)x(t) + (D_{12} + \Delta D_{12})u(t) \\ &= \tilde{C}_1 x(t) + \tilde{D}_{12} u(t)\end{aligned}\quad (2)$$

$$y(t) = C_2 x(t) \quad (3)$$

โดย $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ แทนด้วยตัวแปรสถานะของระบบ $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ แทนด้วยสัญญาณควบคุม $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ แทนด้วยสัญญาณออกหรือ สัญญาณที่ต้องการควบคุม $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w \times 1}$ แทนด้วยสัญญาณรบกวน $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ แทนด้วยสัญญาณที่ต้องการควบคุม

ในที่นี้กำหนดให้เมทริกซ์ $\tilde{A}$, $\tilde{B}_u$, $\tilde{F}_w$, C_1 , C_2 , และ D_{12} มีขนาดที่เหมาะสมและมีคุณสมบัติ การควบคุมได้อย่างสมบูรณ์ (completely controllable) และการสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ (completely observable) และกำหนดให้ เมทริกซ์ ΔA , ΔB_u , ΔF_w , ΔC_1 และ ΔD_{12} แทนความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ของระบบ ใน ตัวแปรสถานะ สัญญาณเข้าควบคุม สัญญาณรบกวน และสัญญาณ ที่ต้องการควบคุมตามลำดับ ซึ่งเป็นความไม่แน่นอนที่มีขอบเขตจำกัด ดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} \Delta A & \Delta B_u & \Delta F_w \\ \Delta C_1 & \Delta D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \tilde{\Delta} \begin{pmatrix} E & E_u & E_w \end{pmatrix} \quad (4)$$

โดย $\tilde{\Delta} = \Delta(I - L\Delta)^{-1}$ และ $\Delta \in \mathbb{R}^{k \times l}$ แทนด้วยเมทริกซ์ของ ความไม่แน่นอนที่มีขอบเขตจำกัด

$$\Delta' \Delta \leq I \quad (5)$$

ซึ่ง H_1 , H_2 , E , E_u , และ E_w เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่และขนาดสอดคล้องกันทั้งหมด

ปัญหาที่น่าสนใจในที่นี้คือการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งมีโครงสร้างของ ตัวสังเกตสถานะ (observer) เพื่อใช้ในการประมาณสถานะของระบบ โดยโครงสร้างของตัวสังเกตสถานะนี้แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_u u + L(y - \hat{y}) \quad (6)$$

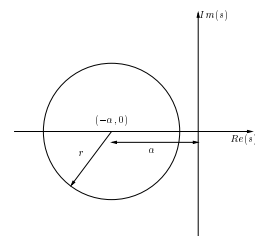
$$\hat{y}(t) = C_2 \hat{x} \quad (7)$$

โดย $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ แทนด้วยตัวแปรสถานะที่ได้จากการประมาณ $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ แทนด้วยสัญญาณออกที่ได้จากการประมาณ $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ แทนด้วยอัตราขยายของตัวสังเกตสถานะซึ่งเป็นค่าหนึ่งที่ต้อง การหาออกจากการสังเกตสถานะ เราจำเป็นต้องคำนวณหาตัว ควบคุมป้อนกลับสถานะที่ได้จากการประมาณ $u = -K\hat{x}$ โดย $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ แทนด้วยอัตราขยายของตัวควบคุมที่ต้องการ

เมื่อกำหนดตัวแปรใหม่คือ $e = x - \hat{x}$ และปรับตัวแปรสถานะใหม่ คือ $\bar{x} = \begin{pmatrix} x' & e' \end{pmatrix}'$ จะได้สมการวงรอบปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร ของระบบและตัวสังเกตสถานะซึ่งแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}(t) \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\Delta) & \mathcal{B}(\Delta) \\ \mathcal{C}(\Delta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} \\ C_{11} & C_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ w \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (8)$$

โดย $A_{11} = (A - B_u K) + (\Delta A - \Delta B_u K)$, $A_{12} = (B_u + \Delta B_u)K$, $A_{21} = \Delta A - \Delta B_u K$, $A_{22} = A - L C_2 + \Delta B_u K$, $B_{11} = B_{21} = F_w + \Delta F_w$, $C_{11} = C_1 + D_{12} K + \Delta C_1 + \Delta D_{12} K$ และ $C_{12} = D_{12} + \Delta D_{12} K$

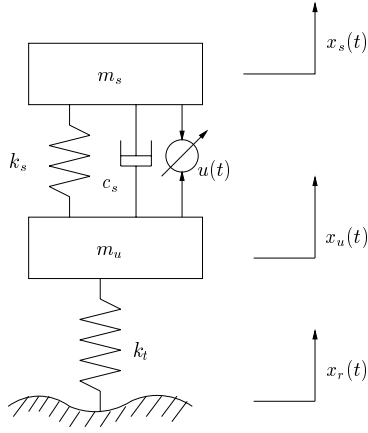


รูปที่ 1: $\mathcal{D}(\alpha, r)$ Region

วัตถุประสงค์ของบทความนี้คือ การออกแบบตัวควบคุมที่มีโครง สร้างของตัวสังเกตสถานะ ซึ่งต้องคำนวณหาอัตราขยาย (K, L) เพื่อให้สามารถสอดคล้องกับเกณฑ์สมรรถนะต่อไปนี้คือ

1. สามารถวางโพลวงรอบปิดทั้งหมด ให้อยู่ในบริเวณวงกลมที่มี เสถียรภาพ $\mathcal{D}(\alpha, r)$ ในระนาบเชิงซ้อนที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $-\alpha + j0$ ($\alpha > 0$) และมีรัศมี r ($r < \alpha$) ในรูปที่ 1
2. สามารถให้สมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ที่ต้องการ โดยสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ แทน ด้วยสมรรถนะของระบบวงรอบปิดซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอน $T_{zw}(s)$ จาก $w(t)$ ไปยัง $z(t)$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$ โดย γ เป็นค่าคงที่บวกและ $T_{zw}(s) = C(\Delta)[sI - A(\Delta)]^{-1}B(\Delta)$

3 แบบจำลองระบบรองรับแบบแอคทีฟ



รูปที่ 2: แบบจำลองของระบบรองรับแบบแอคทีฟ

พิจารณาแบบจำลองของระบบรองรับเพียงล้อเดียว (A quarter-car model) ดังแสดงในรูปที่ 2 และสมการพลวัตดังต่อไปนี้

$$m_s \ddot{x}_s(t) + c_s[\dot{x}_s(t) - \dot{x}_u(t)] + k_s[x_s(t) - x_u(t)] = u(t), \quad (9)$$

$$m_u \ddot{x}_u(t) + c_s[\dot{x}_u(t) - \dot{x}_s(t)] + k_s[x_u(t) - x_s(t)] + k_t[x_u(t) - x_r(t)] = -u(t) \quad (10)$$

โดย พารามิเตอร์แต่ละตัวมีความหมายดังนี้

- m_s : The sprung mass.
- m_u : The unsprung mass.
- c_s : Damping of the uncontrolled suspension system.
- k_s : Stiffness of the uncontrolled suspension system.
- k_t : The tire stiffness.
- $x_s(t)$: The displacements of the sprung mass.
- $x_u(t)$: The displacements of the unsprung mass.
- $x_r(t)$: The road displacement input.
- $u(t)$: The active input of the suspension system.

เมื่อทำการเปลี่ยนจากสมการพลวัตข้างต้น ให้อยู่ในรูปของสมการปริภูมิสถานะ (state space equation) เราจำเป็นต้องกำหนดตัวแปรสถานะเพื่อให้สอดคล้องกับ จุดประสงค์ในการออกแบบ คือ

$$x_1(t) = x_s(t) - x_u(t), \quad x_2(t) = x_u(t) - x_r(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_s(t), \quad x_4(t) = \dot{x}_u(t)$$

โดย $x_1(t)$ คือ suspension deflection $x_2(t)$ คือ tire deflection $x_3(t)$ คือ sprung mass speed และ $x_4(t)$ คือ unsprung mass speed นอกจากนี้กำหนด ตัวแปรสถานะของระบบรองรับเป็นดังนี้ $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{pmatrix}'$

และ $w(t) = \dot{x}_r(t)$ ซึ่งแทนสัญญาณรบกวนอันเนื่องมาจากความไม่ราบเรียบของพื้นถนน ดังนั้น เราจะได้สมการปริภูมิสถานะของระบบรองรับดังนี้

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}_u u(t) + \tilde{F}_w w(t) \quad (11)$$

โดย

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

สำหรับการออกแบบตัวควบคุมระบบรองรับแบบแอคทีฟนั้น มีสิ่งที่เป็นสมรรถนะที่สำคัญอยู่หลายประเภท แต่สมรรถนะของความนุ่มนวลที่มีต่อผู้โดยสารก็เป็นสิ่งสำคัญหนึ่งที่ควรพิจารณาอย่างยิ่ง ซึ่งในที่นี้หมายถึงผลของสัญญาณรบกวน เนื่องจากพื้นถนนที่มีต่อตัวรถที่มีผู้โดยสารอยู่ ดังนั้นเราจำเป็นต้องพยายามลดผลจากสัญญาณรบกวนไปยังความเร่งที่มีผลต่อตัวรถ ($\ddot{x}_s(t)$) ให้น้อยที่สุด ซึ่งก็คือการหาตัวควบคุมที่สามารถให้สมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ มีค่าน้อยที่สุด และพยายามปรับปรุงผลตอบสนองในโดเมนเวลาให้มีความรวดเร็วขึ้นด้วยพร้อมกันและจะได้ สัญญาณที่ต้องการควบคุม $z(t)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} z(t) &= \ddot{x}_s(t) \\ &= C_1 x(t) + D_{12} u(t) \\ &= -\frac{k_s}{m_s} x_1(t) - \frac{c_s}{m_s} x_3(t) + \frac{c_s}{m_s} x_4(t) + \frac{1}{m_s} u(t) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \end{pmatrix} x(t) + \frac{1}{m_s} u(t) \end{aligned}$$

นอกจากนี้ สัญญาณที่ทำการวัดได้ประกอบด้วย suspension deflection และ sprung mass velocity ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} y(t) &= C_2 x(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

4 การออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_\infty$ ที่คงทนด้วยเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณวงกลม

บทตั้งที่ 1 กำหนดให้มีค่าคงที่บวก $\gamma > 0$ และบริเวณวงกลมที่เสถียรภาพ $D(\alpha, r)$ ดัชนีสมรรถนะทั้งสองที่ต้องการจะสอดคล้องได้ ถ้ามีเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) $Q > 0$ และ $A_\alpha = A + \alpha I$ ที่ทำให้

$$\begin{pmatrix} -r^2 Q & * & * & * \\ A_\alpha & -Q^{-1} & * & * \\ \sqrt{\alpha} C_1 & 0 & -I & * \\ \sqrt{\alpha} F_w' Q & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (12)$$

พิสูจน์: ตามเอกสารอ้างอิง [4] $\square$

บทตั้งที่ 2 กำหนดให้เมทริกซ์ G, H และ E มีขนาดที่เหมาะสมและ $G = G'$ ซึ่งเมื่อ

$$G + H\tilde{\Delta}E + E'\tilde{\Delta}'H' < 0$$

เป็นไปตามเมทริกซ์ที่มีความไม่แน่นอน $\tilde{\Delta}$ ในสมการที่ (4) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\Delta' \Delta < I$ ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่สเกลาร์ $\epsilon > 0$ ที่ทำให้

$$G + \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}E' & \epsilon H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -L \\ -L' & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}E \\ \epsilon H' \end{pmatrix} < 0.$$

พิสูจน์: ตามเอกสารอ้างอิง [5]

นิยามที่ 1 ระบบที่มีความไม่แน่นอนและไม่รวม ผลของสัญญาณเข้าควบคุมในสมการที่ (1) จะสอดคล้องกับดัชนีสมรรถนะข้างต้นถ้ามีเมทริกซ์บวกแน่นอน $Q > 0$ ที่ทำให้

$$\begin{pmatrix} -r^2Q & \star & \star & \star \\ \tilde{A} + \alpha I & -Q^{-1} & \star & \star \\ \sqrt{\alpha}\tilde{C}_1 & 0 & -I & \star \\ \sqrt{\alpha}\tilde{F}^{\prime\prime}Q & 0 & 0 & -\gamma^2I \end{pmatrix} < 0. \quad (13)$$

ถ้าความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในสมการที่ (4) สอดคล้องตามนิยามที่ 1 จะได้เงื่อนไขดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 1 พิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีผลของความไม่แน่นอน รวมทั้งกำหนดให้ปริมาตรโพลในวงกลมที่ต้องการ $\mathcal{D}(\alpha, r)$ และเงื่อนไขบังคับของดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ โดย $\gamma > 0$ ระบบในสมการที่ (1) สอดคล้องกับดัชนีสมรรถนะทั้งสองถ้ามีค่าคงที่บวกสเกลาร์ $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ เมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร (symmetrical positive definite matrix) $Q_1 > 0, Q_2 > 0, K$ และ $G = Q_2 L$ ที่ทำให้ $\mathcal{M} < 0$ ในสมการที่ (14)

พิสูจน์: กำหนดให้ $Q = \text{diag}\{Q_1 \ Q_2\}$ และแทน Q ในสมการที่ (13) จะได้

$$\begin{pmatrix} -r^2 Q_1 & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -r^2 Q_2 & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{A}_{11} + \alpha I & \mathcal{A}_{12} & -Q_1^{-1} & \star & \star & \star \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} + \alpha I & 0 & -Q_2^{-1} & \star & \star \\ \sqrt{\alpha} \mathcal{C}_{11} & \sqrt{\alpha} \mathcal{C}_{12} & 0 & 0 & -I & \star \\ \sqrt{\alpha} \mathcal{B}'_{11} Q_1 & \sqrt{\alpha} \mathcal{B}'_{11} Q_2 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (15)$$

จากนั้นทำการคูณในสมการที่ (15) ทั้งด้านหน้าและหลังด้วย เมทริกซ์ Θ และ Θ' ตามลำดับซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} \Theta \cdot (15) \cdot \Theta' &= \mathcal{F} + \mathcal{H}_1 \tilde{\Delta} \mathcal{E}_1 + (\mathcal{H}_1 \tilde{\Delta} \mathcal{E}_1)' \\ &\quad + \mathcal{H}_2 \tilde{\Delta} \mathcal{E}_2 + (\mathcal{H}_2 \tilde{\Delta} \mathcal{E}_2)' < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

โดย

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -r^2 Q_1 & \star & \star & \star & \star & \star \\ (A - B_u K)_\alpha & -Q_1^{-1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & (B_u K)' & -r^2 Q_2 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & Q_2(A - LC_2)_\alpha - Q_2 & \star & \star & \star \\ \sqrt{\alpha}(C_1 - D_{12}K) & 0 & \sqrt{\alpha}D_{12}K & 0 & -I & \star \\ \sqrt{\alpha}F_y' Q_1 & 0 & \sqrt{\alpha}F_y' Q_2 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & H'_1 & 0 & H'_1 Q_2 & H'_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} E - E_u K & 0 & E_u K & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}'_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}H'_1Q_1 & 0 & \sqrt{\alpha}H'_1Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_w \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

และ $(A - B_u K)_\alpha = A - B_u K + \alpha I$, $(A - LC_2)_\alpha = A - LC_2 + \alpha I$.
จากบทตั้งที่ 2 สมการที่ (16) สอดคล้องกับความไม่แน่นอนในสมการ
ที่ (5) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ และค่าคงที่สเกลาร์
 $\epsilon > 0$ ที่ทำให้

$$(16) \Leftrightarrow \mathcal{F} - \mathcal{K}' \mathcal{L}^{-1} \mathcal{K} < 0 \quad (17)$$

โดย

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \begin{pmatrix} \epsilon_1^{-1}(E - E_u K) & \epsilon_1^{-1} E_u K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 H_1' & 0 & \epsilon_1 H_1' Q_2 & \epsilon_1 H_1' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2^{-1} E_w \\ \sqrt{\alpha} \epsilon_2 H_1' Q_1 & 0 & \sqrt{\alpha} \epsilon_2 H_1' Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} -I & L & 0 & 0 \\ L' & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & L \\ 0 & 0 & L' & -I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

จากนั้น สามารถพิสูจน์ว่าสมการเมทริกซ์ในสมการที่ (17) สมมูลกับ
ในสมการที่ (14) โดยใช้ส่วนเติมเต็มของ Schur $\square$

การคำนวณหาโครงสร้างของตัวสังเกตสถานะ

เมื่อพิจารณาสมการที่ (14) เราพบว่า มีตัวแปรที่ใช้ในการหาโครงสร้างของตัวควบคุม (K, L) คือ Q_1, Q_2, ϵ_1 , และ ϵ_2 นอกจากนี้ การคำนวณค่าของ (K, L) เป็นปัญหาการหาที่เหมาะสมที่สุดที่ไม่เป็นเชิงคอนเวกซ์ ที่อยู่ในรูปของ BMI เนื่องจากมีผลคูณของ K กับ Q_1 และ Q_2 กับ L ทำให้ไม่สามารถหา Q_1, Q_2, K , และ L ได้พร้อมกัน ดังนั้นขั้นตอนการคำนวณหา (K, L) มีขั้นตอนดังนี้

1. เพื่อแก้ปัญหาจาก BMI ไปเป็น LMI เราใช้การแปลงสมภาค (congruence transformation) โดยการคูณทั้งด้านหน้าและหลังด้วยเมทริกซ์ Ω และ Ω' ตามลำดับ นอกจากนี้กำหนดให้ $P_1 = Q_1^{-1}$ และ $Y = KP_1$ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\mathcal{N} = \Omega \cdot (14) \cdot \Omega' < 0 \quad (18)$$

โดย

[illegible]

$$\mathcal{M} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -r^2 Q_1 & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ (A - B_u K)_\alpha & -Q_1^{-1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & (B_u K)' & -r^2 Q_2 & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & Q_2(A - LC_2)_\alpha & -Q_2 & \star & \star & \star & \star \\ \sqrt{\alpha}(C_1 - D_{12}K) & 0 & \sqrt{\alpha}D_{12}K & 0 & -I & \star & \star & \star \\ \sqrt{\alpha}F'_w Q_1 & 0 & \sqrt{\alpha}F'_w Q_2 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \star & \star \\ \hline \epsilon_1^{-1}(E - E_u K) & 0 & \epsilon_1^{-1}E_u K & 0 & 0 & 0 & -I & \star \\ 0 & \epsilon_1 H'_1 & 0 & \epsilon_1 H'_1 Q_2 & \epsilon_1 H'_2 & 0 & L' & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2^{-1}E_w & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha}\epsilon_2 H'_1 Q_1 & 0 & \sqrt{\alpha}\epsilon_2 H'_1 Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & L' \end{array} \right) < 0. \quad (14)$$

เมื่อได้ผลเฉลยของ P_1 และ Y ก็สามารถนำมาหา K ได้ตามลำดับ

- นำค่า $P_1 = Q_1^{-1}$ และ K แทนในสมการที่ (14) พร้อมทั้งเปลี่ยนตัวแปรใหม่คือ $G = Q_2 L$ หลังจากนั้นเมื่อได้ค่าของ Q_2 และ G ก็นำมาหา L ได้ตามต้องการ

5 ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

ในการออกแบบตัวควบคุม เราจำเป็นต้องทราบของค่าพารามิเตอร์ และขอบเขตของความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้น ซึ่งแสดงได้ดังในตารางที่ 1

ตารางที่ 1: ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ของระบบรองรับแบบแยกทีฟ

m_s	k_s	c_s	m_u	k_t
260-380 kg	18kN/m	1kN.s/m	40 kg	200 kN/m

ระบบรองรับแบบแยกทีฟที่พิจารณามีค่าของพารามิเตอร์ที่ใช้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -56.25 & 0 & -3.125 & 3.125 \\ 450 & -5000 & 25 & -25 \end{pmatrix}, F_w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0031 \\ -0.025 \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0031 \\ 0 \end{pmatrix}, H_2 = 0.0031,$$

$$E_u = \begin{pmatrix} 18000 & 0 & 1000 & -1000 \end{pmatrix}, L = -0.1875,$$

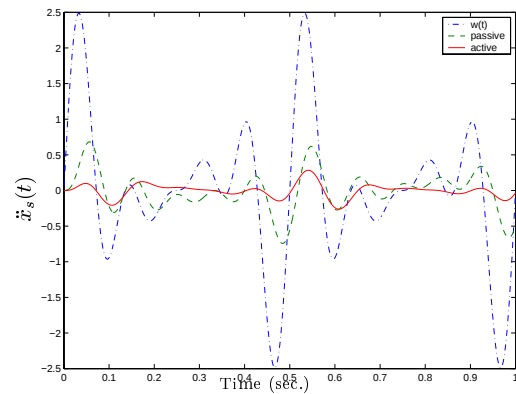
$$E_w = 0.$$

สำหรับการทดสอบระบบรองรับแบบแยกทีฟนี้ เราเลือกใช้สัญญาณรบกวนอันเนื่องมาจากสภาพพื้นถนนที่มีช่วงความถี่อยู่ระหว่าง 4 Hz ถึง 20 Hz เพราะช่วงความถี่นี้เป็นช่วงที่มนุษย์มีความไวต่อการ

เปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น โดยสัญญาณรบกวนมีความสัมพันธ์ดังนี้

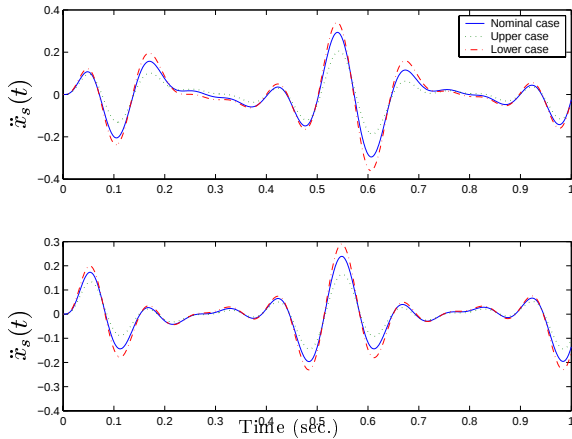
$$w(t) = 0.6 \sin(8\pi t) + 0.75 \sin(12\pi t) + 0.9 \sin(16\pi t) + 0.5 \sin(20\pi t)$$

หลังจากทำการออกแบบดังขั้นตอนข้างต้น เราได้ตรวจสอบผลการออกแบบโดยการเปรียบเทียบกับสัญญาณรบกวน และสัญญาณออกควบคุมที่ไม่มีการควบคุมใด ๆ (passive systems) ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3: ผลตอบสนองเชิงเวลาของสัญญาณรบกวน ($w(t)$) สัญญาณออกควบคุมที่ไม่มีการควบคุม ($\dot{x}_s(t)$)(passive) และสัญญาณออกควบคุมจากการออกแบบ ($\dot{x}_s(t)$)(active)

นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาผลของความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นของพารามิเตอร์ (m_s) ซึ่งมีความเบี่ยงเบนไปจากกรณีค่าปกติ (nominal case) โดยมีการณค่าบน (upper case) อยู่ที่ $m_s = 380$ kg ขณะเดียวกันที่ กรณีค่าล่าง (lower case) อยู่ที่ $m_s = 260$ kg ซึ่งพบว่ามีความเบี่ยงเบนไปเพียงเล็กน้อย และเราสามารถปรับปรุงผลตอบสนองเชิงเวลาจากการกำหนดโพลในสองบริเวณคือ $\mathcal{D}(75, 70)$ และ $\mathcal{D}(105, 100)$ โดยผลตอบสนองเชิงเวลามีขนาดน้อยลงและรวดเร็วขึ้นเมื่อบริเวณอยู่ห่างจากแกนจินตภาพมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 4 และรูปที่ 5 แสดงการกระจายของตำแหน่งโพลของบริเวณวงกลม $\mathcal{D}(75, 70)$



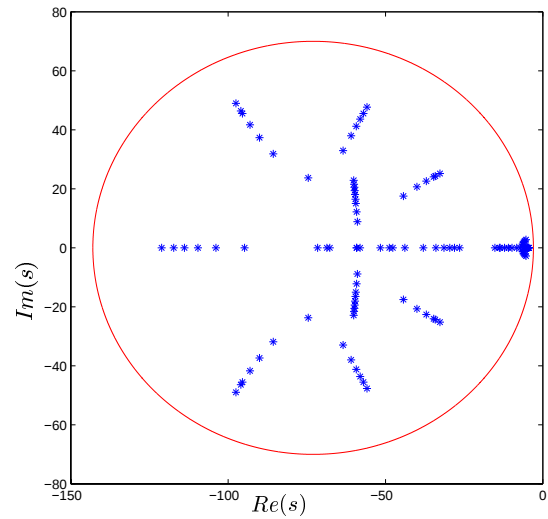
รูปที่ 4: ผลตอบสนองเชิงเวลาของสัญญาณควบคุม ($\ddot{x}_s(t)$) ตามเงื่อนไขบังคับตำแหน่งโพลในบริเวณวงกลมที่กำหนด (รูปบน) $D(75, 70)$ และ (รูปล่าง) $D(105, 100)$

6 สรุป

บทความนี้นำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุม H_∞ ที่ประกอบด้วยเงื่อนไขบังคับโพลในบริเวณวงกลมสำหรับ ระบบรองรับแบบแอคทีฟ โดยอาศัยโครงสร้างตัวสังเกตสถานะ การออกแบบจำเป็นต้องเปลี่ยนเงื่อนไขของสมรรถนะ H_∞ และเงื่อนไข การวางตำแหน่งโพลวงรอบปิดเมื่อมีความไม่แน่นอนไปสู่สมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (BMI) และใช้เทคนิคของ LMI ในการคำนวณหาตัวควบคุม นอกจากนี้เราสามารถปรับปรุงผลตอบสนองเชิงเวลาได้ตามต้องการ ตามแต่บริเวณโพลที่กำหนด และสามารถใส่เงื่อนไขบังคับโพลในบริเวณนี้ในการจำกัดสัญญาณเข้าควบคุมเพื่อไม่ให้เกิดภาวะอิ่มตัวขึ้นในระบบที่พิจารณา

เอกสารอ้างอิง

- [1] J. H. Li and T. H. Li, "Optimal output feedback stabilization of active suspension control using acceleration measurement" *Proc. of the 1995 IEEE IECON*, vol. 2, pp. 1106-1111, 1995.
- [2] J. E. Camino, D. E. Zampieri, and P. L. D. Peres "Design of a vehicular suspension controller by static output feedback" *Proc. of the 1999 American Control Conference*, San Diego, pp. 3168-3172, 1999.
- [3] A. S. Cherry, and R. P. Jones, "Fuzzy logic control for an automotive suspension systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 142-160, 1995.
- [4] A. Kanchanaharuthai and P. Ngamsom, "Robust H_∞ load-frequency control for interconnected power systems with $\mathcal{D}$ -stability constraints via LMI approach," *Proceed-*



รูปที่ 5: ตำแหน่งของการกระจายของโพลระบบวงรอบปิดบริเวณ $D(75, 70)$ ที่ได้รับผลของความไม่แน่นอน

ings of the 2005 American Control Conference, Portland, Oregon, July, pp. 4387-4392, 2005.

- [5] L. Xie, "Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty" *Int. J. Control*, vol. 63, pp. 741-750, 1996.

List of Symbols

- $\mathbb{R}$: The set of real numbers.
- $\mathbb{R}^m$: The set of real m -vector.
- $\mathbb{R}^{m \times n}$: The vector space of $m \times n$ real matrices.
- X' : The transpose of a matrix $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- I_m : The identity matrix of size m of the identity of linear operator. We omit the subscript when m can be determined from context.
- X^{-1} : The inverse of X or the inverse of linear operator X , i.e., $XX^{-1} = I$.
- $X > 0$: The symmetric X is positive definite, i.e., $X = X^T$ and $z^T X z > 0$ for all $z \in \mathbb{R}^n$.
- $\in$: belongs to
- $\star$: The symbol $\star$ is used for terms that are induced by symmetry whenever symmetric block matrices or long matrix expressions are encountered, i.e., $\begin{pmatrix} A & \star \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B' \\ B & C \end{pmatrix}$.
- $\square$: The square block $\square$ signals an end to theorem statements and proofs.