

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่19
19-21 ตุลาคม 2548 จังหวัดสงขลา

การศึกษาแนวทางใหม่ของวิธีตรงและวิธีอ้อมของปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุดที่ไม่เป็นเชิงเส้น

(A New Approach on Direct/Indirect Nonlinear Optimization Problem)

“Bang-Bang” Control: An Equivalent to the Maximum Energy with Free Final Time Problem

โกวิทย์ กัลยาทอง¹ ทวีวัชร วีระเกล้า²

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ อำเภอองครักษ์ นครนายก 26120

^{2,3}กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกล โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า อำเภอเมือง นครนายก 26000

[^]E-mail: Kallayatong@hotmail.com

Kowit Kallayatong¹ Tawiwat Veeraklaew²

¹Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Srinakharinwirot University, Ongkarak ,Nakhonnayok
26120

[^]E-mail: Kallayatong@hotmail.com

^{2,3}Mechanical Engineering Department, Chulachomklao Royal Military Academy, Muang,Nakhonnayok 26000

[^]Email: tawiwat@siit.tu.ac.th, veeraklaew@yahoo.com

บทคัดย่อ

ปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น(The minimum time problem of linear dynamic optimization) มีวิธีการพิจารณาได้หลายวิธีในการที่ช่วยอำนวยความสะดวกให้การวิเคราะห์หลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรงได้สะดวกขึ้น ซึ่งขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหา ในเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Problem) นั้นด้วย แนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณา ปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดมีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum energy with free final time problem) ในเอกสารฉบับนี้จะได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสอง คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย และปัญหาเวลาที่น้อยที่สุดสำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่การพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการ ดังเช่นลักษณะการเป็นสวิตชิงฟังก์ชันของคำตอบ,สถานะที่เพียงพอ เป็นต้น และในท้ายที่สุด ก็ได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหาวิธีตรง(โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข)และวิธีอ้อม(ใช้หลักการของพอนทียากินและแคลคูลัส ออฟ วาเรียนชัน) เพื่อทำให้เกิดความชัดเจนมากยิ่งขึ้นในการเปรียบเทียบระหว่างปัญหาที่ทำกรวิเคราะห์ทั้งสองปัญหา

Abstract

In this paper, the minimum time problem of nonlinear dynamic optimization has been considered in the different way in order to facilitate a direct numerical scheme. According to the character of the minimum time problem, it seems to be the same meaning as a maximum energy with free final time problem. This paper describes the details on the similarity between these two types of the problems for nonlinear dynamic systems. However, by considering a maximum energy with free final time problem, a number of advantages are discussed such as switching function, transversality condition. Towards the end, the compared results from these two types of problems are revealed for both direct and indirect numerical schemes.

บทนำ

ปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดทางพลศาสตร์ของการเคลื่อนที่(Dynamic Optimization) การที่ใช้เวลาที่น้อยที่สุดเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด ดังเช่น การแข่งขันของนักกรีฑาคนหนึ่งในการแข่งขันวิ่งระยะ 100 เมตร มีความต้องการให้การวิ่งใช้เวลาน้อยที่สุดเพื่อให้ถึงเส้นชัยก่อนคู่แข่งอื่น ในทางกลับกัน นักกรีฑาคนนี้จะต้องใช้

พลังงานของตัวเองให้มากที่สุด เพื่อถึงเส้นชัยก่อนคู่แข่งกัน เช่นกัน หรือการใช้หุ่นยนต์ในกระบวนการผลิตของโรงงานอุตสาหกรรม ซึ่งในระบบอุตสาหกรรมนั้นมิใช่ระบบหุ่นยนต์กันอย่างแพร่หลาย จุดประสงค์ที่ใช้ระบบหุ่นยนต์ก็คือ การทำงานที่ซ้ำๆกันและมีความสามารถในการปรับสภาพการทำงานให้เข้ากับสถานการณ์ต่างๆ ในกระบวนการผลิตในแต่ละขั้นตอนการผลิต หุ่นยนต์แต่ละตัวในระบบการผลิตจะต้องมีการเคลื่อนที่ซ้ำกัน ในหลายๆรอบการทำงาน และถ้าพิจารณา ถึงค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่เช่น มวล, ระยะทาง จะมีผลต่อพลังงานที่ใช้ในแต่ละรอบการทำงาน ถ้านำค่าพลังงานที่ใช้ในแต่ละรอบการทำงานต่อวัน คูณกับพลังงานที่ใช้ในแต่ละรอบการทำงานจะได้ค่าที่สูงมาก ดังนั้นถ้ามีการพิจารณาค่าตัวแปรเหล่านี้ให้มีความเหมาะสมสูงสุด เพื่อใช้พลังงานได้อย่างคุ้มค่ามากที่สุดก็จะสามารถใช้พลังงานได้อย่างคุ้มค่ามากที่สุด ที่ผ่านมามีการนำเสนอหลักการในเรื่อง แนวทางใหม่ของปัญหาความเหมาะสมสูงสุดที่เป็นเชิงเส้นในรูปแบบที่เป็น แบน-แบน คอนโวล ในส่วนที่เป็นความเหมือนกันของหลักการการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย [10] แต่ผู้วิจัยมีความคิดว่าปัญหาทางพลศาสตร์ส่วนใหญ่เป็นแบบไม่เชิงเส้น(Nonlinear) จึงเห็นว่าน่าที่จะนำแนวทางจากหลักการข้างต้นมาเป็นแนวทางในการวิจัยในหัวข้อนี้ต่อไปจากแนวทางที่ได้กล่าวมาแล้วในขั้นต้น ถ้าหากได้มีการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time) แปลงให้อยู่ในรูปหลักการพลังงานสูงสุด (Maximum Energy) ก็จะเป็นการง่ายต่อการที่จะนำเสนอต่อสาธารณชนทั่วไปได้ดีและชัดเจนเป็นรูปธรรมกว่า โดยเฉพาะปัญหาการเคลื่อนที่ ที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Motion) นั้นมีความน่าสนใจและเกี่ยวข้องโดยตรงจึงเลือกนำมาเป็นแนวทางศึกษา เพื่อพิสูจน์ให้เห็นจริงระหว่างหลักการเวลาน้อยที่สุดกับหลักการพลังงานสูงสุดทั้งวิธีโดยตรงและวิธีอ้อม

1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1.1 ข้อกำหนดของปัญหา (Problem Statement)

ระบบพลศาสตร์การเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้นสามารถอธิบายแสดงโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\dot{x} = f(x, u, t); x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

เมื่อ $x \in R^n, u \in R^m$ เป็นเวกเตอร์สถานะและเวกเตอร์ควบคุม (States and control vectors)ตามลำดับ x_0 คือเวกเตอร์แสดงเงื่อนไขสถานะที่เริ่มต้น t_0 คือ เวลาเริ่มต้น $F(t)$ เป็นสเกลาร์แมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $g(t)$ คือสเกลาร์แมตริกซ์ขนาด $n \times m$ โดยที่ข้อกำหนดของปัญหา (statement of problem) คือการคำนวณหาตัวควบคุมป้อนเข้า(control Input), $u(t)$ และ ตัวแปรสถานะ(state variable), $x(t)$ ดังนั้น ดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุด (Minimum performance index) คือ

$$J = t_f \text{ หรือ } J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (2)$$

โดยที่ t_f คือเวลาสุดท้ายที่น้อยที่สุด และสอดคล้องกับขอบเขตของตัวแปรควบคุม (control variable) คือ

$$U_L \leq u(t) \leq U_U, \quad (3)$$

เมื่อ

$$x(t_f) = x_f \quad (4)$$

สมการ 1-4 เป็นสมการสำหรับการแก้ปัญหาหาค่าเวลาที่น้อยที่สุดโดยตรงของข้อกำหนดของปัญหา (Problem statement) เรียกว่า หลักวิธีโดยตรง(Direct scheme) ค่าตอบที่พอจะยอมรับได้สำหรับตัวแปรแสดงสถานะ (State variable) และตัวควบคุม(Control input) ก็คือการเลือกวิธีการนั้น จำนวนที่แน่นอนของสัมประสิทธิ์ตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า จะนำไปสู่สถานะบังคับทั้งหมด (Constraints stated) ในปัญหาจนได้ผลคำตอบที่เป็นที่น่าพอใจ [1][5] วิธีการโดยตรงจะแปลงปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดไปเป็น ปัญหาเสถียรภาพพารามิเตอร์ ออปติไมเซชัน วิธีการทำก็คือในการทำการแปลงพารามิเตอร์ของปัญหาความเหมาะสมสูงสุดคือ การแก้ปัญหาโดยใช้ประโยชน์ที่หลากหลายจากวิธีของเทคนิคทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น ประกอบไปด้วยวิธี การถ่วงน้ำหนัก (weighted residual methods) [1] และการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้น[5] วิธีการโดยตรงสัมพันธ์กับการเลือกการเดาค่าเริ่มต้นและความเที่ยงตรงของผลเฉลย ข้อดีประการหนึ่งที่สำคัญมากที่สุดของวิธีโดยตรงก็คือ คำตอบหรือผลเฉลยที่ได้นั้นสามารถหามาได้จากการเดาค่าเริ่มต้นที่ไม่ใกล้เคียงหรือห่างไกลกับคำตอบมาๆได้ อย่างไรก็ตาม ข้อดีของวิธีโดยตรงก็คือ ความแม่นยำของผลเฉลยของการประมาณค่าจะไม่ดีเมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีโดยอ้อม ในด้านอื่นๆ วิธีการโดยทางอ้อมจะประกอบด้วย เงื่อนไขที่จำเป็นอันดับหนึ่งในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาความเหมาะสมสูงสุด ทำให้เกิดวิธีการ โดยทั่วๆ ไปจะมีความซับซ้อนมากขึ้น เงื่อนไขที่จำเป็นเกิดจากเทคนิคเช่น หลักการแคลคูลัส ออฟ วาเรียชัน (calculus of variations) หรือ หลักการของพอนทรียาเกิน (Pontryagin's principle) เงื่อนไขที่จำเป็นเหล่านี้อยู่ในทอมสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต ข้อดีของวิธีการโดยอ้อมคือคุณสมบัติบางประการของ ออฟติมอล ทราเจ็คทอรี(Optimal trajectory) ที่มีความชัดเจน อย่างไรก็ตามข้อเสียคือการทำให้เกิดของ แอดดิชันนอล วาเรียเบิล (additional variables) เช่น ลากรานจ์ มัลติไพเออร์ ในเอกสารงานวิจัยนี้หลักการของพอนทรียาเกิน(Pontryagin's principle) เป็นทฤษฎีที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายที่ใช้สำหรับวิธีการโดยอ้อมที่นำมาพิจารณาต่อไป

2.2 หลักการของพอนทรียาเกิน (Pontryagin's Principle)

ใช้ทฤษฎีของพอนทรียาเกิน (Pontryagin's theory) ([2], [3]) สมการที่1-4 สมการสถานะที่จำเป็นคือสมการที่ 1 สิ่งที่เราทราบเช่นสมการสถานะ (state equations)

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T, \quad (5)$$

$$H_{t_f} = 0, \quad (6)$$

และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t). \quad (7)$$

เมื่อ H (Hamiltonian) กำหนดให้เป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = 1 + \lambda(t)^T f(x, u, t) \quad (8)$$

$\lambda(t) \in R^n$ คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) สภาวะที่จำเป็นเหล่านี้คือการหาได้จากสภาวะที่จำเป็นสำหรับวิธีโดยอ้อมสมการที่ 7 เป็นที่รู้จักกันดีในเรื่องของสภาวะการันตีที่เหมาะสม ซึ่งปัญหาของโครงสร้างที่เป็นแบบสวิตช์ (switching structure) สามารถที่จะหาค่าได้

2.3 รายละเอียดของรายงานวิจัย (Paper overview)

ตอนที่ 3 : พิจารณาเกี่ยวกับเรื่องแนวทางใหม่บนหลักการพลังงานสูงสุดกับการไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (A New Approach on Maximum Energy with Free Final Time)

ตอนที่ 4 : ตัวอย่างการแก้ปัญหาการใช้พลังงานมากที่สุดโดยวิธีตรง (Direct method) และนำมาวิจารณ์

ตอนที่ 5 : ตัวอย่างการแก้ปัญหาการใช้พลังงานมากที่สุดโดยวิธีอ้อมที่เงื่อนไขจำเป็น (Indirect method) และนำมาวิจารณ์ผล

ตอนที่ 6 : สรุปผลถึงข้อดีข้อด้อยและสิ่งที่ต้องทำต่อไป

3. แนวทางใหม่บนหลักการพลังงานสูงสุดกับการไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย A New Approach on Maximum Energy with Free Final Time)

ตามสมการที่ 1-4 ปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดสามารถพิจารณาในแนวทางที่ต่างไปจากเดิมดังเช่น การพิจารณาเป็นการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย ตัวอย่างเช่นนักวิ่งระยะ 100 เมตรจะพยายามที่จะวิ่งให้ถึงเส้นชัยในเวลาทีน้อยที่สุด ในทางกลับกันนักวิ่งคนนี้จะมีการใช้พลังงานที่มากที่สุดเพื่อวัตถุประสงค์เดียวกันคือให้ถึงเส้นชัย ในที่นี้การใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายจะถูกนำมาพิจารณาอีกครั้ง ประเภทของปัญหาระบบพลศาสตร์เชิงเส้นส่วนใหญ่สามารถอธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังนี้

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (9)$$

เมื่อ $x \in R^n$, $u \in R^m$ คือ เวกเตอร์สถานะและเวกเตอร์ควบคุม (the state vectors and control vectors), x_0 คือเวกเตอร์สถานะที่สภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น (initial state condition vector), t_0 คือเวลาเริ่มต้น (initial time), $F(t)$ คือ $(n \times n)$ แมตริกซ์ และ $g(t)$ คือ $(n \times m)$, แมตริกซ์ ข้อกำหนดของปัญหา (Problem Statement) คือการหาค่า $u(t)$ คือตัวควบคุมป้อนเข้า (control input) และ $x(t)$ คือตัวแปรสถานะ (state variable) ดังนั้น ตัวชี้สมรรถนะต่ำสุด (minimize the performance index) คือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} - \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right) dt; \quad (10)$$

t_f นั้นคือเวลาสุดท้ายที่ทำให้เกิดค่าที่น้อยที่สุดที่ทำให้เกิดตัวแปรควบคุมที่เกี่ยวข้อง (Control variable)

$$U_L \leq u(t) \leq U_U, \quad (11)$$

เมื่อ

$$x(t_f) = x_f. \quad (12)$$

ในความต้องการที่ทำให้เกิดความมั่นใจที่มากขึ้นเกี่ยวกับความเหมือนกันหรือเป็นสิ่งที่เดียวกันระหว่างค่าเวลาที่น้อยที่สุดและพลังงานมากที่สุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย ทฤษฎีอย่างง่ายต้องเป็นทฤษฎีที่พิสูจน์ได้ทั้งวิธีโดยตรงและวิธีโดยอ้อม

3.1 วิธีโดยตรง (Direct Approaches)

ดังเช่นสถานะในตอนต้นที่ 1 วิธีตรงไม่มีการพิสูจน์ปัญหาของงานวิจัยนี้

3.2 วิธีอ้อม (Indirect Approaches)

โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีของพอนทรียาจิน (Pontryagin's theory) ([2], [3]) ในสมการที่ (9-12) จากสภาวะที่จำเป็นคือสมการที่ (9), คือ สมการสถานะ (state equations)

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T, \quad (13)$$

$$H_{t_f} = 0, \quad (14)$$

และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t). \quad (15)$$

เมื่อแฮมิลตันนิเียน, H (Hamiltonian) กำหนดเป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = - \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right) + \lambda(t)^T f(x, u, t). \quad (16)$$

ในทางปฏิบัติ สมการ (5) และ (13) เป็นเหมือนกันซึ่งอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันแฮมิลตันนิเียนของปัญหา 2 ปัญหา กับการเกี่ยวข้องกันกับ x ทำให้ได้ผลออกมาเหมือนกันในภายหลัง ส่วนที่คงอยู่ของสภาวะที่จำเป็น (Necessary conditions) ที่ซึ่งก็คือสมการที่ 6, 7 และสมการที่ 14, 15 ที่มีความหมายเหมือนกันกันโดยการพิสูจน์มาแล้วในตอนต้นที่ 2, 3 และ 5

4.ปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Direct Approaches on Maximum Energy with Free Final time Problems)

จะประกอบไปด้วยปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังเช่นที่จะนำเสนอ ปัญหาแบบพลศาสตร์ของแขนกลเดี่ยว(The one-armed manipulator) อย่างง่าย, ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem) และ ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชั้นต่อโยง (The planar two-link manipulator Problem) ซึ่งที่จะใช้เป็นตัวอย่างในงานวิจัยนี้

4.1 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (The one-armed manipulator with coulomb friction problem)

พิจารณาระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว มีก้อนมวล m ความยาวของแขนกล l ดังรูปที่ 1. กำหนดให้ u เป็นส่วนที่เป็นส่วนป้อนเข้า (Actuator input) ที่ฐานและมีตัวป้องกันความผิดพลาด ส่วนของแรงคู่ควบในแนวรัศมี R_x อยู่ด้วยกัน ต่อจากนั้นเราจะสมมติให้ค่ากระแสต้านแรงเสียดทานเป็น C_f และมีขนาดเป็น $C_f = \mu\epsilon|R_x|$ เมื่อ R_x คือ ส่วนประกอบของแรงปฏิกิริยา ในแนวรัศมีที่จุดรองรับ O , μ คือ สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างปลอกและแกนคูลมุน C คือรัศมีของคูลมุน ระบบมี 1 องศาอิสระ และ มีสมการการเคลื่อนที่ที่เป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta}_1 + \mu\epsilon m \frac{L}{2} \dot{\theta}_1^2 \\ + \left(mg \frac{L}{2} \sin(\theta_1) + \mu\epsilon mg \cos(\theta_1) \right) \\ = M^a \end{aligned} \quad (17)$$

เมื่อ L คือความยาวของชั้นต่อโยง, m คือมวลของชั้นต่อโยงกับจุดศูนย์กลางมวลที่เป็นระยะทาง $\frac{L}{2}$ จากฐานของลูกตุ้ม, g คือ ค่าคงที่ความโน้มถ่วงของโลก และ M^a คือตัวขับเคลื่อน ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุมระบบจากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นบน θ_1 และ $\dot{\theta}_1$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสต่ำสุด (Minimum a cost) คือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (M^a)^2 dt \quad (18)$$

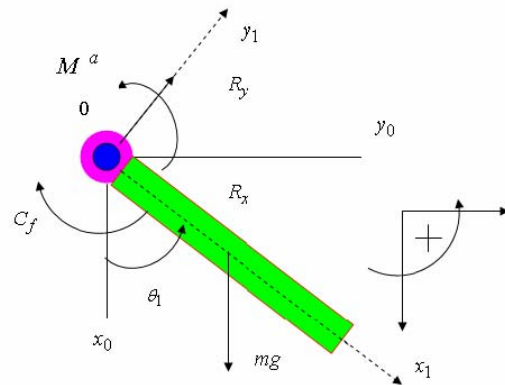
วิธีการเคลื่อนที่ที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-50 \leq M^a \leq 50$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็นระบบ MKS คือ $L = 1.0, m = 1.0, g = 9.8, \mu = 0.3$, และ $\epsilon = 0.01$ ระบบที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองสามารถนำมาเขียนในรูปแบบปริภูมิสถานะ คือ

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 = -\mu\epsilon \frac{3}{2L} \dot{\theta}_1^2 \\ - \left(mg \frac{3}{2L} \sin \theta_1 + \mu\epsilon \frac{3}{L^2} g \cos(\theta_1) \right) + M^a \end{aligned} \quad (20)$$

แทนค่าพารามิเตอร์ $L = 1.0, m = 1.0, g = 9.8, \mu = 0.3$, และ $\epsilon = 0.01$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 = -(0.0045) \dot{\theta}_1^2 \\ - ((14.7) \sin \theta_1 + (0.088) \cos(\theta_1)) \\ + M^a \end{aligned} \quad (21)$$



รูปที่ 1 หุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว(One armed manipulator)

4.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem)

พิจารณาระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ส่วนที่เป็นส่วนป้อนเข้า (Input) ระบบมี 1 องศาอิสระ และ มีสมการการเคลื่อนที่คือ

$$\begin{aligned} u_1 = m_1 g c_1 \cos(\theta_1) + m_2 g c_2 \cos(\theta_1) \\ + (c_1^2 m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2 c_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 c_2 \dot{c}_2 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (22)$$

$$u_2 = -m_2 g \sin(\theta_1) - m_2 \ddot{c}_2 + m_2 c_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (23)$$

เมื่อ $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ คือ ตัวป้อนเข้า (Actuator input) ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับตัวแปร $\theta_1(t)$ และ $c_2(t)$ ตามลำดับ สมการที่ 17 สามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสถานะ (state-space) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{-m_1 g c_1 \cos(\theta_1) - m_2 g c_2 \cos(\theta_1) - 2m_2 c_2 \dot{c}_2 \theta_2 + u_1}{c_1^2 m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2 c_2^2} \end{aligned} \quad (24)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \dot{c}_2 &= c_3 \\ \dot{c}_3 &= -g \sin(\theta_1) + c_2 \theta_2^2 - \frac{u_2}{m_2} \end{aligned} \quad (25)$$

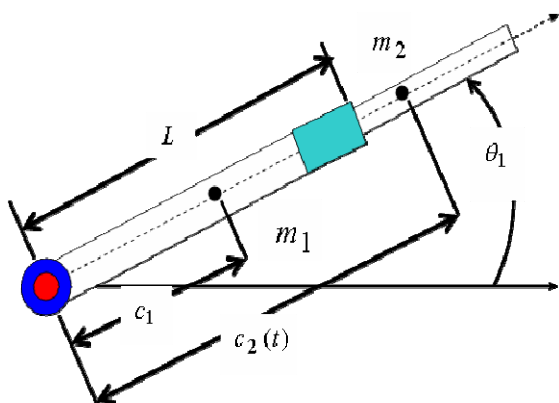
ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุมระบบจากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นของ θ_1 , $\dot{\theta}_1$, c_2 และ $\dot{c}_2$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสต่ำสุด(Minimum a cost) คือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt \quad (26)$$

วิธีการเคลื่อนที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-50 \leq u_1 \leq 50$ และ $-50 \leq u_2 \leq 50$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็นระบบ MKS.ดังนี้

$L = 1.0, m_1, m_2 = 1.0, c_1 = 3, g = 9.8, I_{g1} = I_{g2} = 1.0$,
เงื่อนไขขอบเขต ทั้ง 2 จุดกำหนดโดย

$$\theta_1(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0, c_2(0) = 0, \dot{c}_2(0) = 0, \quad (27)$$



รูปที่ 2 หุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์(Polar manipulator)

ค่าพารามิเตอร์

$$L = 1.0, m_1, m_2 = 1.0, c_1 = 3,$$

$$g = 9.8, I_{g1} = I_{g2} = 1.0,$$

ลงในสมการที่ 17.และสมการ 18 จะได้ว่า

$$(29.4) \cos(\theta_1) + (9.8)c_2 \cos(\theta_1) + (90.2 + c_2^2)\ddot{\theta}_1 + 2c_2\dot{c}_2\dot{\theta}_1 = u_1, \quad (28)$$

$$-9.8 \sin(\theta_1) - \ddot{c}_2 + c_2\dot{\theta}_1^2 = u_2, \quad (29)$$

$$(m_2l_{c2}^2 + m_2l_{c2}l_1 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + m_2l_{c2}^2\ddot{q}_2 + m_2l_{c2}l_1 \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2) = u_2 \quad (30)$$

4.3 ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชั้นต่อโยง (The planar two-link manipulator Problem)

จากรูป พิจารณาแขนกล 2 มิติที่เรียกว่า หุ่นยนต์ 2 ชั้นต่อโยงแบบหมุน(Two link revolute robot) ในการนี้จะทำการพิจารณาว่า แขนกลไม่มีโมเมนต์ความเฉื่อย ระบบมี 2 องศาอิสระและมีการเคลื่อนที่คือ

$$(m_2l_{c2}^2 + m_2l_{c2}l_1 \cos(q_2))\ddot{q}_2 + (m_2l_1^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + 2m_2l_{c2}l_1 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + m_2gl_1 \cos(q_1) + m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2) - 2m_2l_{c2}l_1 \sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - m_2l_{c2}l_1 \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + m_1gl_1 \cos(q_1) = u_1, \quad (31)$$

สมการที่ 19 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปริภูมิสเทท และกำหนดแอดติชันนอล วาริเอเบิล 2 ตัวแปร คือ

$$\dot{q}_1 = q_3 \quad (32)$$

$$\dot{q}_2 = q_4 \quad (33)$$

ให้วัตถุประสงค์ของปัญหาการควบคุมความเหมาะสมสูงสุดกำหนดบังคับ ระบบจากเซตของเงื่อนไขเริ่มต้น บน $q_1, \dot{q}_1, q_2$ และ $\dot{q}_2$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสต่ำสุด

$$(\text{Minimum}) J = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt \quad (34)$$

วิธีการเคลื่อนที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-100 \leq u_1 \leq 100$ และ $-100 \leq u_2 \leq 100$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็น ระบบ MKS.

$$m_1 = 1.3, m_2 = 1.6, l_1 = 1, l_2 = 1.0, l_{c1} = 1.0, l_{c2} = 1.0,$$

$$g = 9.8,$$

แทนค่าพารามิเตอร์ในสมการการเคลื่อนที่(สมการที่ 27และ28)

$$(1.6 + 1.6 \cos q_2)\ddot{q}_2 + (4.5 + 3.2 \cos q_2)\ddot{q}_1 + 15.68 \cos q_1 + 15.68 \cos(q_1 + q_2) - 3.2 \sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - 1.6 \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 12.74 \cos(q_1) = u_1, \quad (35)$$

$$(1.6 + 1.6 \cos q_2)\ddot{q}_1 + 1.6\ddot{q}_2 + 1.6 \sin q_2)\dot{q}_1^2 + 15.68 \cos(q_1 + q_2) = u_2 \quad (36)$$

เงื่อนไขขอบเขต ทั้ง 2 จุดกำหนดโดย

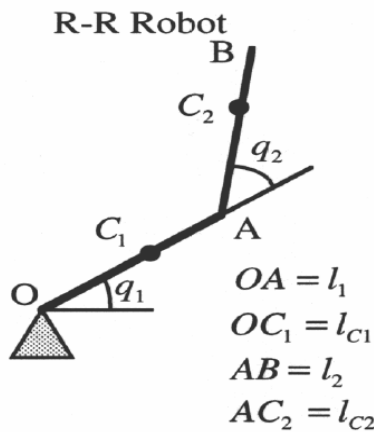
$$q_1(0) = \frac{\pi}{6}, \dot{q}_1 = 0 \quad (37)$$

$$q_2(0) = \frac{\pi}{7}, \dot{q}_2(0) = 0 \quad (38)$$

$$q_1(10) = \frac{\pi}{5}, \dot{q}_1(1) = 0, \quad (39)$$

$$q_2(1) = \frac{\pi}{6} \quad (40)$$

$$\dot{q}_2(1) = 0 \quad (41)$$



รูปที่ 3 แสดง แขนกล 2 ชั้นต่อโยง (The planar two – link manipulator)

5. แนวทางโดยอ้อมของปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Indirect Approaches on Maximum Energy with Free Final time Problems)

ในตอนนี้ คือการนำตัวอย่างในตอนที่ 3 มาพิจารณาใหม่โดยวิธีอ้อม การเปรียบเทียบระหว่างปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและการใช้เวลาที่น้อยที่สุด ดังนี้.

5.1 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (The one-armed manipulator with coulomb friction problem)

เงื่อนไขจำเป็นจากวิธีการแบบเก่า(Necessary Conditions from Classical Method)ปัญหาจากตอนที่ 3.1นำมาพิจารณาอีกครั้งกับการแก้ปัญหาโดยวิธีอ้อม ใช้แฮมมิลตันเนียนกำหนดในสมการที่ 8 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} H &= 1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_2) \\ &= 1 + \lambda_1(\theta_2) + \\ &\lambda_2(-0.0045\dot{\theta}_1^2 - (14.7 \sin \theta_1 + 0.88 \cos \theta_1) + u) \end{aligned} \quad (42)$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับปัญหานี้คือ

$$\dot{\lambda}_1 = (14.7 \cos \theta_1 - 0.88 \sin \theta_1) \lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (43)$$

$$[1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\dot{\theta}_2]_{t=t_f} = 0$$

และ ค่าแฮมมิลตันเนียนต่ำสุด(minimize the Hamiltonian)เกี่ยวข้องกับ $\dot{\theta}_2$ จะได้ว่า

$$u(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_2 < 0, \\ -50, & \lambda_2 > 0. \end{cases} \quad (44)$$

เมื่อ λ_2 เรียกว่า สวิตซ์ฟังก์ชัน(Switch function)สมการ $[1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\dot{\theta}_2]_{t=t_f} = 0$ มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ทรานเวอร์สาลิตี คอนดิชัน (Transversality condition)เงื่อนไขที่จำเป็นของการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงเวลาสุดท้าย(Necessary Conditions from a Maximum Energy with Free Final Time)ใช้สูตรสมการแฮมมิลตันเนียนกำหนดในสมการที่ 16 เราจะได้ว่า

$$H = -u_1^2 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_2). \quad (45)$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นของปัญหานี้คือ

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -0.0045\dot{\theta}_1^2 \\ &- (14.7 \sin \theta_1 + 0.088 \cos \theta_1) + u, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\dot{\lambda}_1 = (14.7 \cos \theta_1 + 0.088 \sin \theta_1) \lambda_2 \quad (47)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (48)$$

$$[-u^2 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2u]_{t=t_f} = 0 \quad (49)$$

และ ค่าแฮมมิลตันเนียนต่ำสุด(minimize the Hamiltonian)เกี่ยวข้องกับ u จะได้ว่า

$$u(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_1 < 0, \\ -50, & \lambda_2 > 0. \end{cases} \quad (50)$$

5.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem)

ก็เหมือนกับระบบแขนกลที่พิจารณาแล้วในตอนที่ 3.2 ปัญหานี้ จะมีการนำมาพิจารณาอีกในหลักการแบบโดยอ้อมเงื่อนไขจำเป็นจากวิธีแบบเดิม (Necessary Conditions from Classical Method)ปัญหา

จากตอนที่ 3.1 คือการนำมาพิจารณาอีกครั้งกับเทคนิควิธีทางโดยอ้อม ใช้หลักการแฮมมิลตันเนี่ยนกำหนดในสมการที่ 8 เราจะได้ว่า

$$H = 1 + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(\dot{c}_3) + \lambda_4(\dot{\theta}_2) \quad (51)$$

$$H = 1 + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(-9.8 \sin \theta_1 + c_2 \theta_2^2 - u_2) + \lambda_4\left(\frac{-29.4 \cos \theta_1 - 9.8c_2 \cos \theta_1 + 2c_2c_3\theta_2 + u_1}{(11+c_2^2)}\right) \quad (52)$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่จำเป็นของปัญหานี้ คือสมการที่ 20 และ

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_3(9.8 \cos \theta_1) - \lambda_4\left(\frac{29.4 \sin \theta_1 + 9.8c_2 \sin \theta_1}{(11+c_2^2)}\right) \quad (53)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 - 2c_2\lambda_3 - \lambda_4\left(\frac{2c_2c_3}{(11+c_2^2)}\right) \quad (54)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 - \lambda_4\left(\frac{2c_2\theta_2}{(11+c_2^2)}\right) \quad (55)$$

เมื่อ

$$[H]_{t=t_f} = 0 \quad (56)$$

และแฮมมิลตันเนี่ยนค่าน้อยที่สุดที่เกี่ยวข้องกับ u_1 , เราจะได้ว่า

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_{1,2} < 0, \\ -50, & \lambda_{3,4} > 0. \end{cases} \quad (57)$$

ปริมาณ λ_3 เพื่อเป็นเหตุผลที่ชัดเจน เรียกว่า สวิตซ์ ฟังก์ชัน (Switching function) สมการ $[1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_1)]_{t=t_f} = 0$ ยังมีชื่อเรียกว่าเงื่อนไขทรานเวอร์ซาลิตีหรือทรานเวอร์ซาลิตี คอนดิชัน (Transversality condition) ได้อีกด้วยเงื่อนไขที่จำเป็นจากการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Necessary Conditions from a Maximum Energy with Free Final Time) ใช้สมการแฮมมิลตันเนี่ยนกำหนดลงในสมการที่ 16 เราจะได้ว่า

$$H = 1 + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(-9.8 \sin \theta_1 + c_2 \theta_2^2 - u_2) + \lambda_4\left(\frac{-29.4 \cos \theta_1 - 9.8c_2 \cos \theta_1 + 2c_2c_3\theta_2 + u_1}{(11+c_2^2)}\right) \quad (58)$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับปัญหานี้ก็คือ

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_3(9.8 \cos \theta_1) - \lambda_4\left(\frac{29.4 \sin \theta_1 + 9.8c_2 \sin \theta_1}{(11+c_2^2)}\right) \quad (59)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 - 2c_2\lambda_3 - \lambda_4\left(\frac{2c_2c_3}{(11+c_2^2)}\right) \quad (60)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_4\left(\frac{4c_2c_3}{(11+c_2^2)^2}\right) \quad (61)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 - \lambda_4\left(\frac{2c_2\theta_2}{(11+c_2^2)}\right) \quad (62)$$

$$[H]_{t=t_f} = 0 \quad (63)$$

และค่าแฮมมิลตันที่น้อยที่สุดที่เกี่ยวข้องกับ $u_{1,2}$

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_{1,2} < 0 \\ -50, & \lambda_{3,4} > 0 \end{cases} \quad (64)$$

ปริมาณ λ_3 เพื่อเป็นเหตุผลที่ชัดเจน เรียกว่า สวิตซ์ ฟังก์ชัน (Switching function) สมการ $[1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_1)]_{t=t_f} = 0$ ยังมีชื่อเรียกว่าเงื่อนไขทรานเวอร์ซาลิตีหรือทรานเวอร์ซาลิตี คอนดิชัน (Transversality condition) ได้อีกด้วย

5.3 ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชั้นต่อโยง (The planar two-link manipulator Problem)

ก็เหมือนกับระบบแขนที่พิจารณาแล้วในตอน 3.2 ปัญหานี้จะมีการนำมาพิจารณาอีกในหลักการแบบโดยอ้อมเงื่อนไขจำเป็นจากวิธีแบบเดิม (Necessary Conditions from Classical Method) ปัญหาจากตอนที่ 3.1 คือการนำมาพิจารณาอีกครั้งกับเทคนิควิธีทางโดยอ้อม ใช้หลักการแฮมมิลตันเนี่ยนกำหนดในสมการที่ 8 เราจะได้ว่า

$$H = 1 + \lambda_1(q_3) + \lambda_2(q_4) + \lambda_3(\dot{q}_3) + \lambda_4(\dot{q}_4) \quad (65)$$

แทนค่า $\dot{q}_3, \dot{q}_4$ ลงในสมการ 65

$$H = 1 + \lambda_1(q_3) + \lambda_2(q_4) + \frac{\lambda_3}{(4.5 + 3.2 \cos q_2)} \begin{pmatrix} -1.6(1 + \cos q_2) - 28.42 \cos q_1 \\ -15.68 \cos(q_1 + q_2) \\ + 3.2q_3q_4 \sin q_2 + 1.6q_4^2 \sin q_2 \\ + 1.6q_4^2 \sin q_2 + u_1 \end{pmatrix} + \lambda_4((-1 + \cos q_2)\dot{q}_3 - q_3^2 \sin q_2 - 9.8 \cos(q_1 + q_2) + u_1/1.6) \quad (66)$$

และแฮมมิลตันเนี่ยนค่าน้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ u_1 , กำหนดเป็น

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 100, & \lambda_{1,2} < 0 \\ -100, & \lambda_{3,4} > 0 \end{cases} \quad (67)$$

6. สรุปผล

ความเหมือนกันระหว่างปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดและปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย เปรียบเทียบระหว่างการแบ่งย่อยทั้งหลักวิธีโดยตรงและวิธีอ้อม จะเห็นได้ว่าวิธีโดยตรง การเปรียบเทียบทำได้โดยการพิจารณาผลลัพธ์สุดท้ายสุด ทั้งสองตัวอย่างคือการเลือกเป็นปัญหาหลักของงานวิจัยนี้และแสดงผลจากการพิจารณาการใช้พลังงานสูงสุด โดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายสุดมีความแน่นอนมากกว่าโดยเฉพาะผลเฉลยป้อนเข้า (Input solutions) ต่อมาเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับปัญหาทั้งสองที่ซึ่งได้มาจากเทคนิควิธีโดยตรง แสดงปัญหาทั้งสองมีเงื่อนไขที่จำเป็นที่เหมือนกัน

เอกสารอ้างอิง(References)

- [1] Agrawal, S.K., Veeraklaew, T., Fabien, B.C., 1998, "Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations," Optimal Control Applications and Methods, Vol. 19, pp.393-410.
- [2] Bryson Jr., A.E., and Ho, Y.C., 1975, Applied Optimal Control, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- [3] Kirk, D.E., 1970, Optimal Control Theory: An Introduction, Prentice Hall Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Spong, M.W., Vidyasagar M., 1986, Robot Dynamics and Control, John Wiley and Sons.
- [5] Veeraklaew, T., 2001, "Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-Order Dynamic Systems," Ph.D. Dissertation, University of Delaware, Newark, Delaware.