

ผลกระทบของสมบัติเชิงความร้อนที่ขึ้นกับอุณหภูมิต่อการกระจายอุณหภูมิในวัสดุที่นำความร้อน

Effects of Temperature-dependent Thermal Properties on Temperature Distribution in Heat Conduction Media

สมชาติ ฉันทศิริวรรณ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ปทุมธานี 12121

Somchart Chantasiriwan

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus, Pathum Thani 12121

E-mail: somchart@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์การนำความร้อนในวัสดุมักตั้งอยู่บนสมมุติฐานว่าสมบัติเชิงความร้อนของวัสดุมีค่าคงที่ เนื่องจากทำให้การวิเคราะห์ค่อนข้างง่าย แต่วัสดุส่วนมากมีสมบัติเชิงความร้อนที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ดังนั้นการวิเคราะห์จึงควรใช้วิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับปัญหาไม่เชิงเส้น บทความนี้นำเสนอวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับการแก้ปัญหาการนำความร้อนไม่เชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลา โดยพิจารณาวัสดุที่ค่าการนำความร้อนและค่าความจุความร้อนเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นแบ่งช่วงของเวลา ผลการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิในวัสดุสมมุติและทังสเตนแสดงให้เห็นถึงค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ที่ใช้สมมุติฐานว่าสมบัติเชิงความร้อนของวัสดุมีค่าคงที่ โดยความคลาดเคลื่อนไม่มีคุณสมบัติการลู่เข้า

คำหลัก การนำความร้อน, ไม่เชิงเส้น, วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

Abstract

The analysis of heat conduction in a material is sometimes based on the assumption that thermal properties of the material are constant in order to simplify the analysis. However, most materials have temperature-dependent thermal properties. The analysis of heat conduction in such a material should, therefore, use a numerical method suitable for nonlinear problems. This paper presents the finite difference method for solving time-dependent nonlinear heat conduction problems, in which thermal conductivities and heat capacities are piecewise linear functions of temperature. Results of the determination of temperature distributions in a fictitious material and tungsten show errors in an analysis based on constant thermal properties. Furthermore, solutions obtained by such an analysis do not have the conver-

gence property.

Keywords: heat conduction, nonlinear, finite difference method

1. บทนำ

ปรากฏการณ์การนำความร้อนสามารถบรรยายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นซึ่งยากแก่การแก้ ปัญหาจะง่ายขึ้นถ้าใช้การแปลงแบบเคิร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff transformation) [1] แปลงสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้น แต่วิธีนี้จะทำให้ได้สมการเชิงเส้นก็ต่อเมื่อปัญหาการนำความร้อนไม่ขึ้นกับเวลา หรือค่าการกระจายความร้อน (thermal diffusivity) เป็นค่าคงที่ วัสดุส่วนใหญ่มีค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) และความจุความร้อน (heat capacity) ที่ขึ้นกับอุณหภูมิ [2] ซึ่งส่งผลให้ค่าการกระจายความร้อนเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเช่นกัน สมการการนำความร้อนในวัสดุเหล่านี้จึงจะมีลักษณะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่ไม่สามารถแปลงเป็นสมการเชิงเส้นได้โดยใช้การแปลงแบบเคิร์ชฮอฟฟ์ ได้ ถึงแม้ว่า Wrobel และ Brebbia [1] ได้นำเสนอเทคนิคการแปลงสมการดังกล่าวเป็นสมการเชิงเส้นโดยแทนที่เวลาด้วยตัวแปรอิสระใหม่ที่เป็นปริพันธ์ของค่าการกระจายความร้อน แต่เทคนิคนี้ก็ไม่ได้ช่วยให้ปัญหาง่ายขึ้นมากเพราะต้องมีการแปลงตัวแปรอิสระกลับมาเป็นเวลาอยู่ดี ดังนั้นการศึกษาปรากฏการณ์การนำความร้อนจึงมักต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาได้แก่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [4] วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ [5] วิธีไฟไนต์วอลุ่ม [6] และวิธีบารันดะรีเอลิเมนต์ [7] เป็นต้น

ถึงแม้จะมีวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาการนำความร้อนไม่เชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลาหลายวิธี แต่การจำลองปัญหาการนำความร้อนด้วยสมการเชิงเส้นโดยใช้สมบัติเชิงความร้อนเฉลี่ยยังคงเป็นที่นิยมอยู่ เพราะทำให้ปัญหาง่ายขึ้นมาก บทความนี้จะเปรียบเทียบผลเฉลยของปัญหาเชิงเส้นลักษณะนี้กับผลเฉลยของปัญหาไม่เชิงเส้นที่ใช้สมบัติเชิง

ความร้อนที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ ซึ่งจะหาหาค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้จากปัญหาเชิงเส้น

2. สมการการนำความร้อน

สมการการนำความร้อนที่ขึ้นกับเวลาคือ

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \nabla T) + s(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in \Omega) \quad (1)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}) \quad (\vec{r} \in \Omega) \quad (2)$$

$$T(\vec{r}, t) = T_b(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in \Gamma_1) \quad (3)$$

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial n} = q_b(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in \Gamma_2) \quad (4)$$

ในที่นี้ค่าความจุความร้อน c และค่าการนำความร้อน k เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ ในขณะที่ความหนาแน่น ρ มีค่าคงที่ แต่ถ้าความหนาแน่นเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิก็นำมาทำให้วิธีแก้ปัญหานี้เปลี่ยนไป

ถ้าสมบัติเชิงความร้อนในสมการ (1) และ (4) ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ สมการ (1) – (4) สามารถแก้ได้โดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ทันที แต่ถ้าสมบัติเชิงความร้อนในสมการ (1) และ (4) ขึ้นกับอุณหภูมิ สมการ (1) – (4) ควรได้รับการแปลงแบบเคอร์ชอฟ อุณหภูมิในสมการ (1) สามารถแปลงตัวแปรใหม่ u โดยใช้การแปลงแบบเคอร์ชอฟดังนี้

$$u(\vec{r}, t) = \int_{T_r}^T k(T) dT \quad (5)$$

(T_r เป็นค่าอุณหภูมิอ้างอิง) ซึ่งทำให้สมการ (1) – (4) กลายเป็น

$$\gamma(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + s(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in \Omega) \quad (6)$$

$$u(\vec{r}, 0) = u_0(\vec{r}) \quad (\vec{r} \in \Omega) \quad (7)$$

$$u(\vec{r}, t) = u_b(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in \Gamma_1) \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q_b(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in \Gamma_2) \quad (9)$$

ตัวแปร $\gamma = \rho c/k$ คือส่วนกลับของค่าการกระจายความร้อน α .

3. การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์เป็นระบบสมการพีชคณิต

ในกรณีที่สมบัติเชิงความร้อนในสมการ (1) และ (4) ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ สมการ (1) – (4) เป็นสมการเชิงเส้นที่สามารถแปลงเป็นระบบสมการพีชคณิตตามวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ซึ่งมีรายละเอียดในตำราทั่วไป [8] จึงจะไม่กล่าวถึงในที่นี้ แต่ในกรณีที่สมบัติเชิงความร้อนในสมการ (1) และ (4) ขึ้นกับอุณหภูมิ การแปลงสมการ (1) – (4) เป็นระบบสมการพีชคณิตจะง่ายขึ้นถ้า $k(T)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นช่วง (piece-wise linear function) ดังต่อไปนี้

$$k(T) = k_{i-1} + \left(\frac{k_i - k_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \right) (T - T_{i-1}) \quad (T_{i-1} \leq T < T_i) \quad (10)$$

กำหนดให้ $T_r = 100$ K หลังจากแทนค่า $k(T)$ จากสมการ (10) ลงในสมการ (5) จะพบว่า

$$u(T) = u_{i-1} + k_{i-1} (T - T_{i-1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{k_i - k_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \right) (T - T_{i-1})^2 \quad (T_{i-1} \leq T < T_i) \quad (11)$$

การแปลงจาก u เป็น T สามารถกระทำได้โดยใช้สูตร

$$T(u) = T_{i-1} + \left(\frac{T_i - T_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} \right) \left[-k_{i-1} + \sqrt{k_{i-1}^2 + 2 \left(\frac{k_i - k_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \right) (u - u_{i-1})^2} \right] \quad (u_{i-1} \leq u < u_i) \quad (12)$$

ขั้นตอนต่อมาเป็นการแปลงสมการ (1) – (4) เป็นระบบสมการพีชคณิต

$$\gamma^* \left(\frac{u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}}{\Delta t} \right) = \theta \nabla^2 u_i^{(n)} + (1 - \theta) \nabla^2 u_i^{(n-1)} + s(\vec{r}_i, (n-1 + \theta) \Delta t) \quad (13)$$

$$u_i^{(0)} = u_0(\vec{r}_i) \quad (14)$$

$$u_i^{(n)} = u_b(\vec{r}_i, n \Delta t) \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial n} = q_b(\vec{r}_i, n \Delta t) \quad (16)$$

โดยที่

$$\gamma^* = \gamma (\theta u_i^{(n)} + (1 - \theta) u_i^{(n-1)}) \quad (17)$$

พารามิเตอร์ผ่อนคลาย (relaxation parameter) θ ในสมการ (13) และ (17) จะต้องมีความมากกว่า 0 ในที่นี้กำหนดให้ $\theta = 0.5$ เพราะให้ผลเฉลยที่ดีที่สุด สำหรับการแปลงพจน์ที่มีตัวดำเนินการ ∇^2 ในสมการ (13) และอนุพันธ์ย่อยในสมการ (16) ใช้สูตรตามวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ [8]

การแก้ระบบสมการพีชคณิต (13) – (17) จะใช้วิธีคำนวณซ้ำ โดยการคำนวณก่อนหน้าจะทำให้ทราบ $u_i^{(n-1)}$ การคำนวณหา $u_i^{(n)}$ เริ่มต้นจากสมมติให้ $u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)}$ ภายในโดเมน Ω เพื่อคำนวณค่า γ^* จากสมการ (17) จากนั้นจึงแก้สมการ (13) – (16) เพื่อหาค่าใหม่ของ $u_i^{(n)}$ ถ้าค่าใหม่และค่าเดิมของ $u_i^{(n)}$ ยังคงแตกต่างกันมากอยู่ ก็ จะทำการคำนวณซ้ำโดยให้ $u_i^{(n)}$ เท่ากับค่าใหม่ที่ได้ใน การคำนวณซ้ำ จะกระทำจนกระทั่งค่าผลต่างเฉลี่ยของผลต่างของ $u_i^{(n)}$ ที่ได้จากการวนการคำนวณติดกันสองครั้งมีค่าน้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อน ยินยอม (tolerance) δ

$$\left[\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \left(1 - \frac{(u_i^{(n)})_{\text{new}}}{(u_i^{(n)})_{\text{old}}} \right)^2 \right]^{1/2} < \delta \quad (18)$$

โดยที่ N_i เป็นจำนวนบัพภายในโดเมน ในที่นี้กำหนดให้ $\delta = 1.0 \times 10^{-6}$

4. ปัญหาตัวอย่าง

โดเมนของปัญหาตัวอย่างเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 12×12 cm มีบัพจำนวน N บัพกระจายอย่างสม่ำเสมอในโดเมนและบนขอบเขตซึ่งทำให้จำนวนบัพภายในโดเมนเท่ากับ $(\sqrt{N} - 2)^2$ จำนวนบัพบนขอบเขตเท่ากับ $4(\sqrt{N} - 1)$ และระยะห่าง (Δ) ระหว่างบัพสองบัพที่อยู่ติดกันเท่ากับ $12/(\sqrt{N} - 1)$ cm ขอบเขตด้านบน ด้านขวา และด้านล่างของสี่เหลี่ยมเป็นขอบเขตประเภทที่หนึ่ง (Γ_1) ส่วนขอบเขตด้านขวาของสี่เหลี่ยมเป็นขอบเขตประเภทที่สอง (Γ_2) กำหนดให้ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาตัวอย่างคือ

$$T_{\text{exact}}(x, y, t) = [104.43 + 4.43 \cos(0.01t)] e^{10(x+y)} \quad (19)$$

ผลเฉลยแม่นยำตรงนี้ใช้สร้างเงื่อนไขเริ่มต้น $T_0(x, y)$ และเงื่อนไขขอบเขต

$T_b(x,y,t)$ และ $q_b(x,y,t)$ ส่วนฟังก์ชันแหล่งกำเนิดคำนวณจาก

$$s(x, y, t) = \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} - k(T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{dk}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (20)$$

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จะใช้หาผลเฉลยในกรณีที่สมบัติเชิงความร้อนไม่ขึ้นกับอุณหภูมิและขึ้นกับอุณหภูมิ โดยค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างผลเฉลยที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นยำคือ

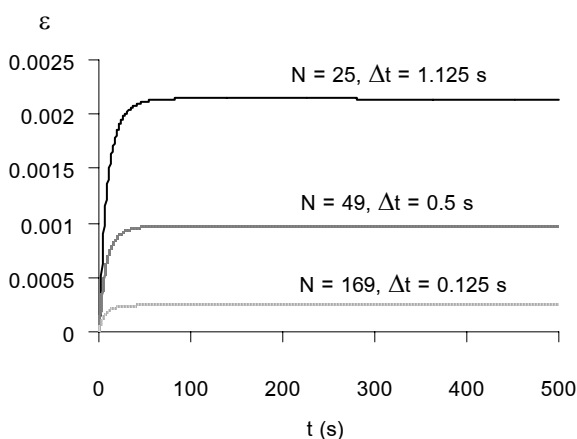
$$\varepsilon = \left[\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \left(1 - \frac{T_i^{(n)}}{(T_i^{(n)})_{\text{exact}}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (21)$$

5. การทดสอบคุณสมบัติการลู่เข้า

เพื่อทดสอบคุณสมบัติการลู่เข้า (convergence) ของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในการแก้ปัญหานำความร้อนเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น กำหนดให้วัสดุสมมุติ 1 มีสมบัติเชิงความร้อนคงที่คือ $\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$, $k = 150 \text{ W/m-K}$ และ $c = 300 \text{ J/kg-K}$ และวัสดุสมมุติ 2 มีสมบัติเชิงความร้อนตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1 สมบัติเชิงความร้อนของวัสดุสมมุติ 2

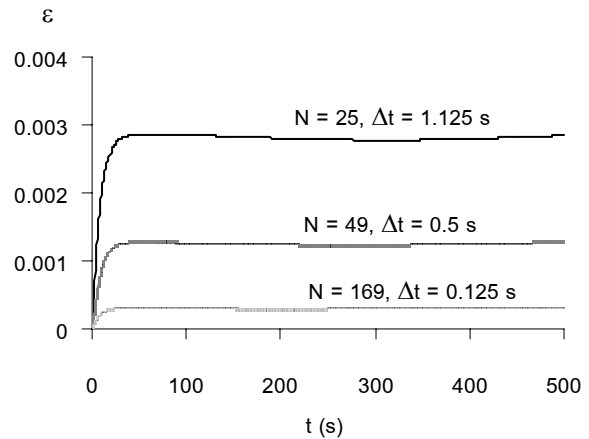
$T \text{ (K)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$k \text{ (W/m-K)}$	$c \text{ (J/kg-K)}$
100	5000	200	200
200	5000	190	220
400	5000	170	260
600	5000	150	300
800	5000	130	340
1000	5000	110	380
1200	5000	90	420



รูปที่ 1 ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างเวลา 0 ถึง 500 s ของผลเฉลยของปัญหานำความร้อนเชิงเส้นในวัสดุสมมุติ 1 ในกรณีที่จำนวนบัพและขั้นเวลามีค่าต่าง ๆ กัน

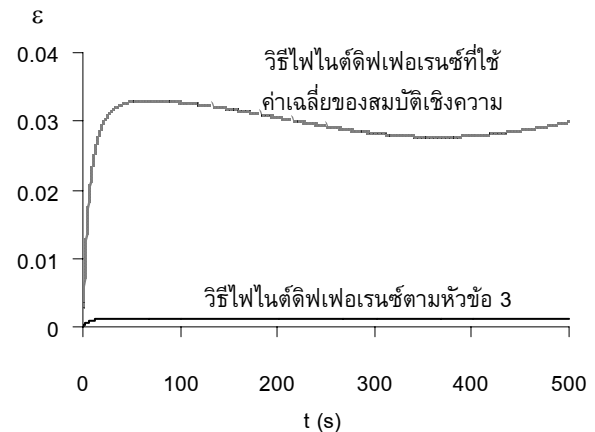
รูปที่ 1 แสดงผลการคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของปัญหานำความร้อนเชิงเส้นในวัสดุสมมุติ 1 โดยเปรียบเทียบสามกรณีที่จำนวนบัพและขั้นเวลา (Δt) ต่างกันแต่มีค่า $\Delta t/\Delta^2$ เท่ากันคือ 1250 จะเห็นว่าผลเฉลยของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์มีคุณสมบัติการลู่เข้าอย่างชัดเจน

รูปที่ 2 แสดงให้เห็นว่าผลเฉลยของปัญหานำความร้อนไม่เชิงเส้นในวัสดุสมมุติ 2 มีคุณสมบัติการลู่เข้าเช่นเดียวกัน



รูปที่ 2 ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างเวลา 0 ถึง 500 s ของผลเฉลยของปัญหานำความร้อนไม่เชิงเส้นในวัสดุสมมุติ 2 ในกรณีที่จำนวนบัพและขั้นเวลามีค่าต่าง ๆ กัน

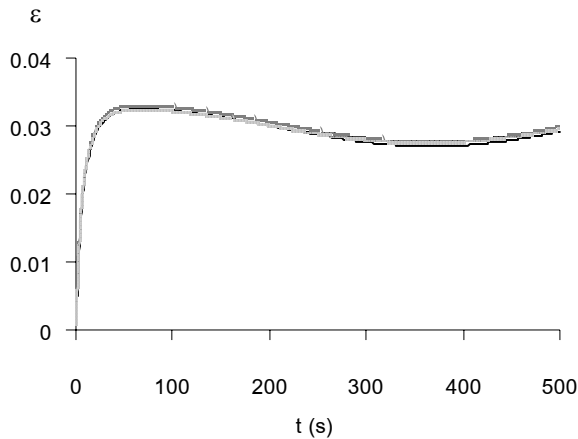
6. ผลการคำนวณ



รูปที่ 3 ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างเวลา 0 ถึง 500 s ของผลเฉลยของปัญหานำความร้อนไม่เชิงเส้นในวัสดุสมมุติ 2 โดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ที่ใช้ค่าเฉลี่ยของสมบัติเชิงความร้อนและวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ตามหัวข้อ 3

ปัญหานำความร้อนในชีวิตจริงเป็นปัญหาไม่เชิงเส้นซึ่งสมบัติเชิงความร้อนที่ขึ้นกับอุณหภูมิ แต่วิธีแก้ปัญหานี้ตามหัวข้อ 3 ก่อนข้าง ขั้บซ้อน อีกทั้งยังต้องทราบค่าสมบัติเชิงความร้อนที่อุณหภูมิต่าง ๆ จึงจะใช้วิธีนี้ได้ ดังนั้นการแก้ปัญหานี้บางครั้งจึงอาจสมมุติว่าสมบัติเชิงความร้อนมีค่าคงที่โดยใช้ค่าเฉลี่ยในการคำนวณ ผลที่ตามมาจากการคำนวณเช่นนี้คือทำให้ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้สูงกว่าค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยตามวิธีในหัวข้อ 3 มาก ดังจะเห็นได้จากรูปที่

3 ซึ่งเปรียบเทียบผลเฉลยของปัญหาตัวอย่างสำหรับวัสดุสมมุติ 2 โดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ทั้งสองวิธี สิ่งที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งก็คือ ผลเฉลยที่ได้จากการใช้ค่าเฉลี่ยของสมบัติเชิงความร้อนไม่มีคุณสมบัติการลู่เข้า กล่าวคือ เมื่อคำนวณค่าคลาดเคลื่อนโดยเพิ่มจำนวนบัพและลดขั้นตอนเวลาก็ไม่พบว่าค่าคลาดเคลื่อนลดลงมากนัก ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4



รูปที่ 4 ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างเวลา 0 ถึง 500 s ของผลเฉลยของปัญหาการนำความร้อนไม่เชิงเส้นในวัสดุสมมุติ 2 โดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และใช้ค่าเฉลี่ยของสมบัติเชิงความร้อน ($k = 150 \text{ W/m-K}$ และ $c = 300 \text{ J/kg-K}$) ค่าอธิบายเส้นข้อมูลสำหรับกรณีที่มีจำนวนบัพและขั้นตอนเวลามีค่าต่าง ๆ กันเหมือนกับในรูปที่ 1 และ 2

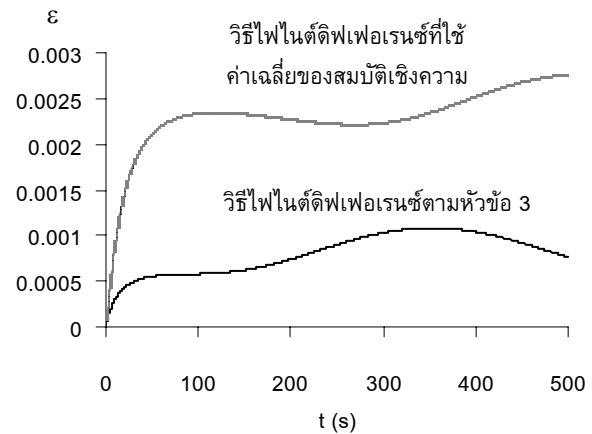
ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้จากปัญหาเชิงเส้นจะขึ้นอยู่กับสมบัติเชิงความร้อนของวัสดุ ค่าคลาดเคลื่อนจะน้อยในกรณีที่สมบัติเชิงความร้อนของวัสดุเปลี่ยนแปลงค่อนข้างน้อยตามอุณหภูมิ แต่ค่าคลาดเคลื่อนจะมากในกรณีที่สมบัติเชิงความร้อนของวัสดุเปลี่ยนแปลงอย่างมากตามอุณหภูมิ ตารางที่ 2 และ 3 แสดงสมบัติเชิงความร้อนของแทนทาลัมและยูเรเนียม [2] จะเห็นได้ว่า สมบัติเชิงความร้อนของ Ta เปลี่ยนแปลงค่อนข้างน้อยตามอุณหภูมิ แต่สมบัติเชิงความร้อนของ U เปลี่ยนแปลงอย่างมากตามอุณหภูมิ ถ้าการคำนวณการกระจายอุณหภูมิในโดเมนสี่เหลี่ยมได้มาจากการแก้ปัญหาเชิงเส้นโดยใช้ค่าเฉลี่ย $k = 58.6 \text{ W/m-K}$ และ $c = 146 \text{ J/kg-K}$ สำหรับ Ta และค่าเฉลี่ย $k = 34.0 \text{ W/m-K}$ และ $c = 146 \text{ J/kg-K}$ สำหรับ U จะพบว่าค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยมีลักษณะตามรูปที่ 5 และ 6

ตารางที่ 2 สมบัติเชิงความร้อนของแทนทาลัม (Ta)

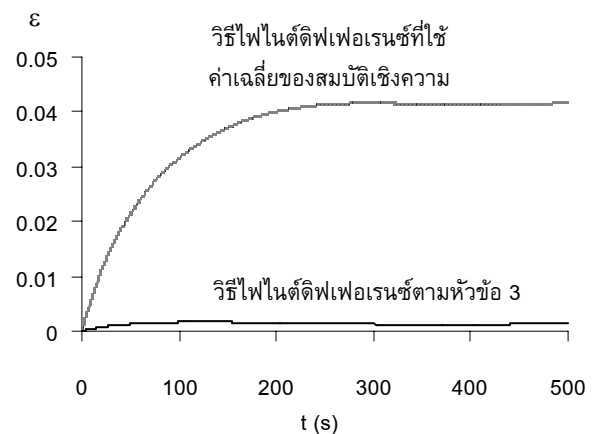
$T \text{ (K)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$k \text{ (W/m-K)}$	$c \text{ (J/kg-K)}$
100	16600	59.2	110
200	16600	57.5	133
400	16600	57.8	144
600	16600	58.6	146
800	16600	59.4	149
1000	16600	60.2	152
1200	16600	61.0	155

ตารางที่ 3 สมบัติเชิงความร้อนของยูเรเนียม (U)

$T \text{ (K)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$k \text{ (W/m-K)}$	$c \text{ (J/kg-K)}$
100	19070	21.7	94
200	19070	25.1	108
400	19070	29.6	125
600	19070	34.0	146
800	19070	38.8	176
1000	19070	43.9	180
1200	19070	49.0	161



รูปที่ 5 ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างเวลา 0 ถึง 500 s ของผลเฉลยของปัญหาการนำความร้อนไม่เชิงเส้นใน Ta โดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และใช้ค่าเฉลี่ยของสมบัติเชิงความร้อน ($k = 58.6 \text{ W/m-K}$ และ $c = 146 \text{ J/kg-K}$)



รูปที่ 6 ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างเวลา 0 ถึง 500 s ของผลเฉลยของปัญหาการนำความร้อนไม่เชิงเส้นใน U โดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และใช้ค่าเฉลี่ยของสมบัติเชิงความร้อน ($k = 34.0 \text{ W/m-K}$ และ $c = 146 \text{ J/kg-K}$)

7. สรุป

บทความนี้นำเสนอวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับแก้ปัญหาการนำความร้อนที่ขึ้นกับเวลาโดยวัสดุมีสมบัติเชิงความร้อนที่ขึ้นกับ

อุณหภูมิ วิธีดังกล่าวอาศัยการแปลงอุณหภูมิเป็นตัวแปรใหม่ด้วยการแปลงแบบเคอร์ชอฟ และการประมาณฟังก์ชันค่าการนำความร้อนและฟังก์ชันความจุความร้อนเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นช่วง ซึ่งทำให้กระบวนการหาผลเฉลยง่ายขึ้น วิธีดังกล่าวมีคุณสมบัติการลู่เข้า นอกจากนั้นบทความนี้ยังได้แสดงให้เห็นว่าการแก้ปัญหาการนำความร้อนไม่เชิงเส้นโดยสมมุติว่าสมบัติเชิงความร้อนของวัสดุมีค่าคงที่จะให้ผลเฉลยที่มีค่าคลาดเคลื่อนสูงกว่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีที่นำเสนอในบทความนี้มาก ทั้งนี้ค่าคลาดเคลื่อนจะขึ้นกับชนิดของวัสดุ และค่าคลาดเคลื่อนจะไม่ลดลงมากแม้ว่าจะเพิ่มจำนวนบัพและลดขั้นตอนเวลาของการคำนวณก็ตาม อย่างไรก็ตามผู้วิเคราะห์ปัญหาอาจยอมรับค่าคลาดเคลื่อนนี้ได้ถ้าเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนเพียงไม่กี่เปอร์เซ็นต์ไม่ได้เลวร้ายมากนักเมื่อเทียบกับความสะดวกที่ได้รับจากการใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับปัญหาเชิงเส้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford, U.K., 1959.
- [2] F. P. Incropera and D. P. DeWitt, Introduction to Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [3] L. C. Wrobel and C. A. Brebbia, "The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Nonlinear Diffusion Problems," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 65, 1987, pp. 147-164.
- [4] J. Kujawski, "Analysis of the Collocation Time Finite Element Method for the Non-linear Heat Transfer Equation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, pp. 103-107.
- [5] T. J. R. Hughes, "Unconditionally Stable Algorithms for Non-linear Heat Conduction," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 10, 1977, pp. 135-139.
- [6] S. V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York, 1980.
- [7] T. Goto and M. Suzuki, "A Boundary Integral Equation Method for Nonlinear Heat Conduction Problem with Temperature-dependent Material Properties," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 39, 1996, pp. 823-830.
- [8] M. N. Ozisik, Heat Conduction, Wiley-Interscience, New York, 1993.