

การศึกษาเชิงเปรียบเทียบวิธีกริดหลายระดับสำหรับการจำลองการไหลแบบสองมิติ

Comparative Study of Multigrid Methods for the Simulation of Two-Dimension Flow

ประทีป ทิพย์ประชา*, เอกชัย จันทสาโร

ห้องปฏิบัติการวิจัยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CFD Lab)

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000

โทร (044) 224410-1, โทรสาร (044) 224411, E-Mail: ptnaja@thaimail.com

* สังกัด สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคใต้ สงขลา

อ.เมือง จ.สงขลา 90000 โทร. (074)323504-6, โทรสาร (074)324245

บทคัดย่อ

การวิจัยในครั้งนี้ศึกษาถึงระเบียบวิธีกริดหลายระดับ ที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการ ที่แสดงถึงพฤติกรรมของการไหลของไหล เพื่อจำลองการไหลแบบคงตัว สองมิติ ราบเรียบและไม่อัดตัว (Steady 2D Laminar Incompressible Flow) โดยจะทำการเปรียบเทียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ ที่มีใช้กันอยู่โดยทั่วไป คือ วัฏจักรวี (V-Cycle) วัฏจักรดับเบิลยู (W-Cycle) วัฏจักรเอฟ (F-Cycle) วัฏจักรฟันเลื่อย (Sawtooth-Cycle) และวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ (Full Multigrid) ซึ่งการหาผลเฉลยจะใช้ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (Finite Volume Method) ระบบสมการที่ใช้แก้หาผลเฉลยคือสมการนาเวียร์-สโตกส์แบบคงตัวและไม่อัดตัว 2 มิติ ในระบบพิกัดฉาก โดยใช้ระบบกริดแบบจตุรัส (Collocated Grid System) เทอมการพาซึ่งเป็นเทอมไม่เชิงเส้นใช้วิธีผลต่างต้นกระแส (Upwind Differencing Scheme) ซึ่งจะสามารถกำกับทิศทางของการไหลทำให้การคำนวณมีเสถียรภาพ ส่วนเทอมการแพร่จะใช้วิธีผลต่างกลาง (Central Differencing Scheme) ใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) เพื่อหาค่าความดันของการไหล

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับจะถูกนำไปประยุกต์เข้ากับขั้นตอนวิธี SIMPLE ในขั้นตอนการทำซ้ำภายนอก โดยใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบเก็บค่าประมาณเต็ม (Full Approximation Storage: FAS) ซึ่งประยุกต์เข้ากับวัฏจักรวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ

Abstract

This research is concerned with the computational study of multigrid methods for solving the equations of steady 2D laminar incompressible flow by making a comparison of V-Cycle, W-Cycle, F-Cycle, Saw tooth-Cycle and Full Multigrid. The Navier-Stokes equations for steady 2D laminar incompressible flow are

solved by the finite volume method on a collocated grid system. The nonlinear convective terms are discretized by the upwind differencing scheme and the diffusive terms are approximated by the central differencing scheme. The SIMPLE algorithm is used to obtain the pressure. Multigrid methods are applied in the SIMPLE algorithm with FAS (Full Approximation Storage) for various types of multigrid cycle.

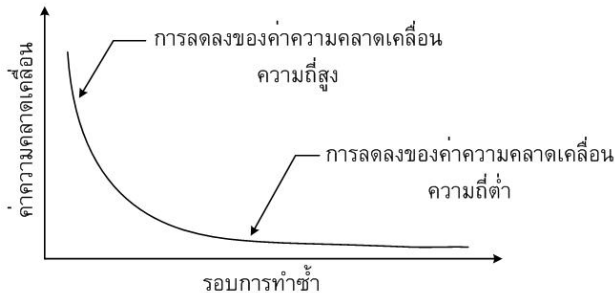
1. บทนำ

ปัจจุบันการวิเคราะห์ผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง เนื่องจากสามารถวิเคราะห์ผลเฉลยได้อย่างรวดเร็ว แต่การที่จะให้ได้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำนั้นขึ้นอยู่กับหลายองค์ประกอบ เช่นวิธีการประมาณค่า จำนวนกริดที่ใช้ เป็นต้น โดยทั่วไปแล้ววิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าอันดับความถูกต้องสูง มักจะมีข้อจำกัดบางประการที่ทำให้เกิดความยุ่งยากอาจทำให้ขาดความมีเสถียรภาพไป และหากใช้จำนวนกริดมาก ๆ ก็จะได้ค่าความถูกต้องสูง แต่จะทำให้การคำนวณช้า และยังมียังองค์ประกอบอื่น ๆ ที่จะส่งผลต่อการหาค่าผลเฉลย การหาผลเฉลยได้รวดเร็วขึ้นจะขึ้นอยู่กับวิธีการที่ใช้ในการทำซ้ำเพื่อหาค่าผลเฉลย เช่น Jacobi, Gauss-Siedel, SOR เป็นต้น ซึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ดีจะต้องมีศักยภาพในด้านความถูกต้องแม่นยำและความรวดเร็วควบคู่กันไป ดังนั้นการคำนวณเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำบนกริดชุดเดียวนั้น หากต้องการค่าความถูกต้องสูง ๆ ก็จะต้องใช้จำนวนกริดที่มากขึ้น ซึ่งจะทำให้การคำนวณช้าลง ซึ่งถือเป็นข้อด้อยของวิธีนี้ ดังนั้นแนวทางที่จะทำให้การคำนวณรวดเร็วขึ้นคือใช้เทคนิควิธีกริดหลายระดับ (Multigrid Method) เข้ามาแก้ปัญหาหนึ่งซึ่งจะทำให้ลดเวลาในการคำนวณลงได้อย่างมากและยังคงค่าความถูกต้องอยู่เหมือนเดิม

วิธีกริดหลายระดับ จึงถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อช่วยในการคำนวณซึ่งจะได้ความรวดเร็วและความแม่นยำสูงเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปในขณะนี้ แต่วิธีกริดหลายระดับนี้ยังมีรูปแบบที่หลากหลายอยู่มาก ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่จะหารูปแบบไหนจะเหมาะกับการแก้ปัญหาค่าความคลาดเคลื่อนสองมิติ ราบเรียบและไม่อัดตัว ซึ่งจะเสนอถึงวิธีการของระเบียบวิธีกริดแบบต่าง ๆ เพื่อเปรียบเทียบให้เห็นว่ารูปแบบไหนจะเหมาะกับการไหลแบบนี้ที่สุด

2. หลักการของเทคนิควิธีกริดหลายระดับ

โดยทั่วไปการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยจะใช้วิธีการทำซ้ำ (Relaxation Method) ซึ่งการทำซ้ำบนกริดขนาดต่าง ๆ จะทำให้ได้ผลเฉลยด้วยความเร็วต่างกัน เนื่องจากขนาดของกริดจะเป็นตัวที่จะกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ค่าความถี่แตกต่างกัน คือกริดละเอียดจะสามารถกำจัดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่สูงได้ดี ส่วนกริดหยาบจะสามารถกำจัดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำได้ดี หากเราใช้กริดเพียงชุดเดียวในการคำนวณจะทำให้ลักษณะของการลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนจะเป็นดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การลดลงของค่าความคลาดเคลื่อน

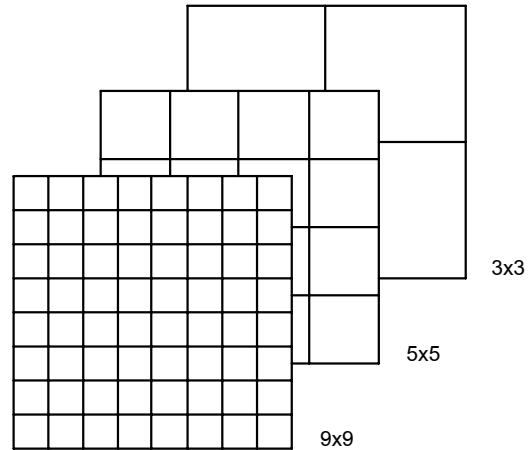
จากรูปที่ 1 แสดงให้เห็นว่าช่วงแรกของการทำซ้ำจะมีค่าความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็ว แต่เมื่อรอบการทำซ้ำมากขึ้นการลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลงช้ามาก ซึ่งจะส่งผลให้การคำนวณช้าตามไปด้วย เหตุนี้เองจึงต้องหาวิธีที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็วเหมือนช่วงแรก เนื่องจากกริดละเอียดจะสามารถกำจัดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่สูงได้ดี และกริดหยาบจะสามารถกำจัดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำได้ดี ดังนั้นหากเปลี่ยนขนาดของกริดให้หยาบขึ้นในช่วงที่ค่าความคลาดเคลื่อนเริ่มลดลงช้า ก็จะสามารถทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงได้จนถึงระดับความพอใจได้อย่างรวดเร็ว จึงเป็นที่มาของวิธีกริดหลายระดับ

วิธีกริดหลายระดับเป็นวิธีการหาผลเฉลยแบบทำซ้ำ ซึ่งต้องใช้กริดในการคำนวณหลายชุด หรือหลายระดับ ตั้งแต่กริดละเอียดที่สุดไปจนถึงกริดหยาบที่สุด ซึ่งขนาดของกริดแต่ละระดับจะมีความสัมพันธ์กันเป็น 1:2 นั่นคือกริดหยาบจะมีขนาดเป็นสองเท่าของกริดละเอียดที่อยู่ติดกัน ดังแสดงในรูปที่ 2

เนื่องจากวิธีกริดหลายระดับมีขั้นตอนที่สำคัญคือ การแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยโดยการทำซ้ำ ซึ่งในวิธีกริดหลายระดับนี้เรียกว่า

Relaxation การส่งถ่ายผลเฉลยไปมาระหว่างกริดหยาบและกริดละเอียด ดังนี้คือ

- การส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดไปกริดหยาบ เรียกระบวนการนี้ว่า Restriction : I_k^{k+1}
- การส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปกริดละเอียด เรียกระบวนการนี้ว่า Prolongation : I_{k+1}^k



รูปที่ 2 แสดงกริดหลายระดับ

วิธีกริดหลายระดับที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหามีอยู่ 2 วิธีคือ วิธีกริดหลายระดับแบบแก้ไข หรือเรียกสั้น ๆ ว่าวิธีกริดแก้ไข (Correction Scheme) และวิธีกริดหลายระดับแบบเก็บค่าประมาณเต็ม หรือเรียกย่อว่าวิธี FAS (Full Approximate Storage) ซึ่งวิธีกริดแก้ไขจะใช้ได้ดีกับปัญหาเชิงเส้น และวิธี FAS จะเหมาะกับปัญหาไม่เชิงเส้นอย่างสมการนาเวียร์-สโตก ซึ่งจะใช้ในงานวิจัยนี้

2.1 วิธีกริดแก้ไข (Correction Scheme)

สมการเชิงอนุพันธ์เมื่อกระจายให้อยู่ในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$L_k \phi_k = f_k \quad (2.1)$$

เมื่อตัวห้อย k แสดงถึงระดับกริด พจน์ ϕ_k แทนผลเฉลยแม่นตรงบนกริดระดับ k L_k เป็นตัวดำเนินการผลต่าง (difference operation) เนื่องจากการคำนวณเป็นการทำซ้ำ ดังนั้นผลที่ได้จึงเป็นค่าโดยประมาณ ซึ่งผลที่ได้จึงไม่เป็นผลแม่นตรง ทำให้สมการมีเหลือเศษตกค้างแทนด้วย r_k ตามสมการนี้

$$L_k \phi_k - f_k = r_k \quad (2.2)$$

ดังนั้นหากจะทำให้ค่าที่ได้จากการประมาณค่าถูกต้อง ก็จะต้องเอาค่าแก้ไขมาปรับแก้ให้ได้ค่าที่ถูกต้อง ดังนี้

$$\phi_k = \bar{\phi}_k + v_k \quad (2.3)$$

เมื่อ $\bar{\phi}_k$ แทนผลเฉลยที่ได้จากการประมาณค่า v_k เป็นค่าแก้ไขที่จะทำให้ค่าที่ได้นั้นถูกต้อง เมื่อนำตัวดำเนินการผลต่างมาประยุกต์เข้าไปก็จะได้ว่า

$$L_k v_k = L_k (\phi_k - \bar{\phi}_k) \quad (2.4)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.1) และ (2.2) จะส่งผลให้สมการ (2.5) กลายเป็นสมการเศษตกค้างดังนี้

$$L_k v_k = r_k \quad (2.5)$$

ดังนั้นเมื่อเราแก้สมการเศษตกค้างก็จะได้ค่าแก้ไขเพื่อนำไปรวมกับค่าที่ได้จากการประมาณก็จะได้ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งขั้นตอนที่จะทำการคำนวณเป็นดังนี้

1. ทำการหาค่าโดยประมาณที่กิริดละเอียดด้วยการทำซ้ำตามสมการ (1) จำนวนรอบเป็นไปตามเงื่อนไขที่ต้องการ
2. คำนวณหาเศษตกค้างตามสมการ (2.2) แล้วส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้ไปยังกิริดหยาบ
3. แก้สมการหาเศษตกค้างด้วยสมการ (2.5) เพื่อหาค่าแก้ไขบนกิริดหยาบ
4. ส่งถ่ายผลเฉลยกลับไปยังกิริดละเอียดเพื่อนำไปแก้ค่าที่ได้จากการประมาณให้เป็นค่าแม่นยำตรง ตามสมการ (2.3)

ซึ่งจำนวนกิริดที่จะใช้ก็แล้วแต่เงื่อนไขที่ต้องการว่าจะใช้กิริดกี่ระดับ โดยกิริดหยาบจะทำการหาค่าแก้ไขให้กับกิริดละเอียด ดังนั้นวิธีนี้จึงเรียกว่าวิธีกิริดแก้ไขนั่นเอง

2.2 วิธี FAS (Full Approximate Storage)

จากวิธีกิริดแก้ไขดังที่กล่าวมาแล้วนั้นจะทำการแก้สมการเพื่อหาค่าแก้ไข โดยจะเก็บค่าตัวแปร v_k เพียงอย่างเดียวซึ่งจะเหมาะสมกับการเชิงเส้นเท่านั้น เนื่องจากวิธีนี้เหมาะกับสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นการเก็บค่าตัวแปรจะต้องนำค่า $\bar{\phi}_k$ มาทำการคำนวณในรอบการทำซ้ำที่กิริดหยาบด้วย เนื่องจากตัวดำเนินการ L_k เป็นแบบไม่เชิงเส้นซึ่งรูปแบบจะเปลี่ยนไปในรอบการทำซ้ำ ดังนั้นตัวแปรบนกิริดหยาบจะมีความสัมพันธ์กับตัวแปรบนกิริดละเอียดดังนี้

$$\bar{\phi}_{k-1} = I_k^{k-1} \bar{\phi}_k + v_{k-1} \quad (2.6)$$

จากสมการ (2.6) ผลเฉลยที่ได้จากกิริดละเอียดจะถูกส่งไปยังบนกิริดหยาบ ซึ่งเป็นผลเฉลยโดยประมาณเท่านั้น และเนื่องจากตัวดำเนินการผลต่างเป็นแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นการคำนวณหาผลเฉลยจึงต้องมี

ความต่อเนื่องและสอดคล้องกัน ดังนั้นสมการบนกิริดหยาบจึงมีรูปแบบดังนี้

$$L_{k-1} \bar{\phi}_{k-1} - L_{k-1} I_k^{k-1} \bar{\phi}_k = I_k^{k-1} r_k \quad (2.7)$$

or

$$L_{k-1} \bar{\phi}_{k-1} = f_{k-1} \quad (2.8)$$

เมื่อ $r_k = f_k - L_k \bar{\phi}_k$ และ $f_{k-1} = L_{k-1} I_k^{k-1} \bar{\phi}_k + I_k^{k-1} r_k$ สำหรับการส่งถ่ายค่าผลเฉลยจากกิริดหยาบ เพื่อนำไปแก้ไขค่าผลเฉลยบนกิริดละเอียดนั้น ต้องส่งถ่ายค่าที่ได้จาก $\bar{\phi}_{k-1} - I_k^{k-1} \bar{\phi}_k$ กลับไปรูปแบบของการแก้ไขค่าผลเฉลยจึงเป็นแบบนี้

$$\bar{\phi}_k^{new} = \bar{\phi}_k^{old} + I_{k-1} \left(\bar{\phi}_{k-1}^{new} - I_k^{k-1} \bar{\phi}_{k-1}^{old} \right) \quad (2.9)$$

จากวิธีการทั้งสองวิธีที่กล่าวมานี้ จะเห็นว่ารูปแบบจะเหมือนกัน จะต่างกันตรงการส่งถ่ายผลเฉลยและการเก็บค่าตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณเท่านั้นเอง ซึ่งวิธี FAS นั้นสมการจะมีความยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้นกว่าวิธีกิริดแก้ไขเพื่อให้สอดคล้องกับสมการที่ไม่เชิงเส้นนั่นเอง

3. วงจรของกิริดหลายระดับ

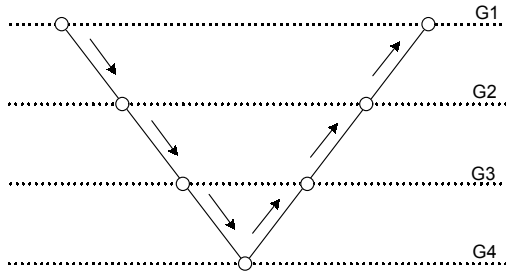
การแก้สมการหาผลเฉลยในวิธีกิริดหลายระดับนั้น จะมีกระบวนการต่าง ๆ ในแต่ละระดับกิริด ตั้งแต่กิริดละเอียดที่สุดไปสู่งกิริดหยาบที่สุด แล้วกลับมาสู่กิริดละเอียดที่สุดอีกครั้งนั้นเราจะเรียกว่า วงจรของกิริดหลายระดับ ซึ่งในแต่ละวัฏจักรนั้นจะมีลำดับขั้นดังนี้

1. Relaxation เพื่อหาผลเฉลยบนกิริดละเอียด
2. ส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้จากกิริดละเอียดไปยังบนกิริดหยาบ
3. Relaxation เพื่อหาผลเฉลยบนกิริดหยาบ
4. ส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้จากกิริดหยาบกลับไปยังกิริดละเอียด
5. ทำการปรับแก้ค่าให้ถูกต้องบนกิริดละเอียด

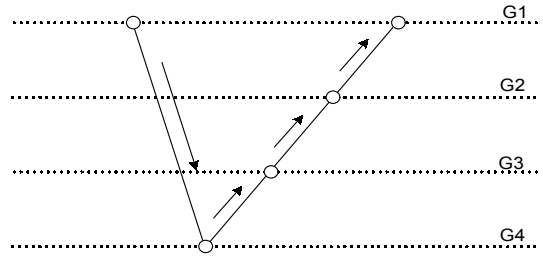
ซึ่งกระบวนการที่จะกระทำนั้นก็แล้วแต่ว่าจะส่งถ่ายผลเฉลยกันแบบไหน ซึ่งขั้นตอนการส่งถ่ายนี้เองที่ทำให้เกิดวัฏจักรต่าง ๆ ของวิธีกิริดหลายระดับ

3.1 วงจรกิริด (V-Cycle)

เริ่มจาก Relaxation ในกิริดละเอียดที่สุด (G1) จำนวน n รอบ เพื่อหาผลเฉลย จากนั้นทำการ Restriction ไปสู่งกิริดหยาบที่อยู่ติดกันแล้วทำการ Relaxation ผลเฉลยอีก n รอบ จึงทำการการ Restriction ไปสู่งกิริดหยาบที่อยู่ติดกันอีก ทำเช่นนี้ไปจนถึงกิริดหยาบที่สุด (G4) จากนั้นจึงทำการส่งถ่ายผลเฉลยกลับโดยการ Prolongation มาสู่งกิริดละเอียดที่อยู่ติดกันแล้ว Relaxation เพื่อหาผลเฉลยอีก n รอบ ไปจนถึงกิริดละเอียดที่สุด เป็นการจบหนึ่งรอบวัฏจักร ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3 แล้วจึงทำซ้ำในวัฏจักรต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบ



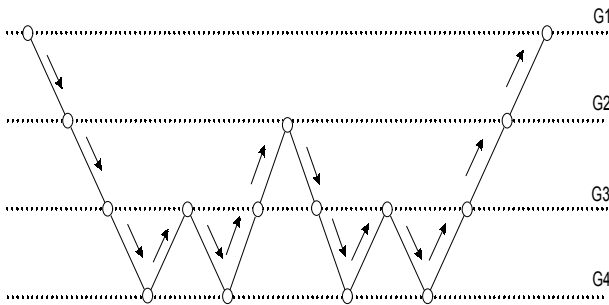
รูปที่ 3 วัฏจักรวี



รูปที่ 6 วัฏจักรฟันเลื่อย

3.2 วัฏจักรดับเบิลยู (W-Cycle)

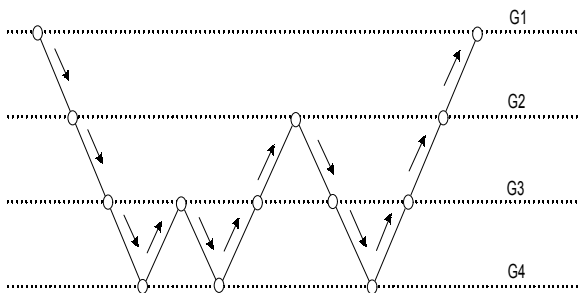
เป็นวัฏจักรที่คล้ายกับวัฏจักรวี แต่จะแตกต่างกันตรงที่วัฏจักรดับเบิลยูมีการส่งถ่ายผลเฉลยกลับไปมาระหว่าง Restriction และ Prolongation ซึ่งจะมีรูปแบบเป็นตัว W ดังเช่นที่แสดงไว้ในรูปที่ 4



รูปที่ 4 วัฏจักรดับเบิลยู

3.3 วัฏจักรเอฟ (F-Cycle)

เป็นวัฏจักรที่เริ่มต้นจากกริดละเอียดคล้ายวัฏจักรวี แล้วส่งถ่ายผลเฉลยลงไปเรื่อย ๆ จนถึงกริดหยาบที่สุดแล้วค่อย ๆ กลับขึ้นมาทีละชั้น คือครั้งแรกขึ้นมาสี่ชั้น แล้วกลับลงไปทีกริดหยาบที่สุดอีก จากนั้นจะขึ้นไปสองชั้นแล้วกลับลงไปจนถึงกริดหยาบที่สุด จึงกลับขึ้นไปสามชั้น แล้วกลับลงมาจนถึงกริดหยาบที่สุดอีก จนกว่าจะครบทุกชั้นไปจนถึงกริดละเอียดที่สุดจึงถือว่าครบรอบวัฏจักร ดังรูปที่ 5



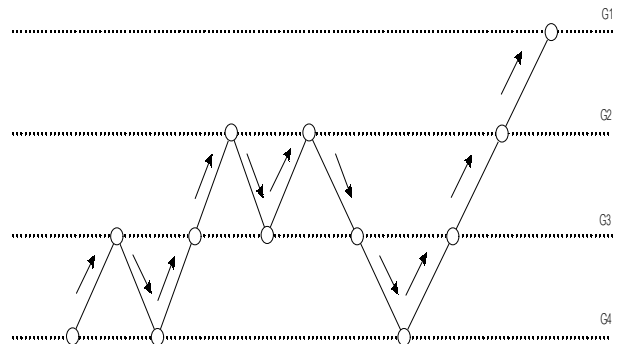
รูปที่ 5 วัฏจักรเอฟ

3.4 วัฏจักรฟันเลื่อย (Sawtooth-Cycle)

เป็นวัฏจักรที่เริ่มต้นจากกริดละเอียดคล้ายวัฏจักรวี แล้วส่งถ่ายผลเฉลยลงไปทีกริดหยาบที่สุดแล้วค่อยขยับขึ้นไปทีละชั้นจนถึงกริดละเอียดที่สุด เป็นอันครบรอบวัฏจักร ดังรูปที่ 6

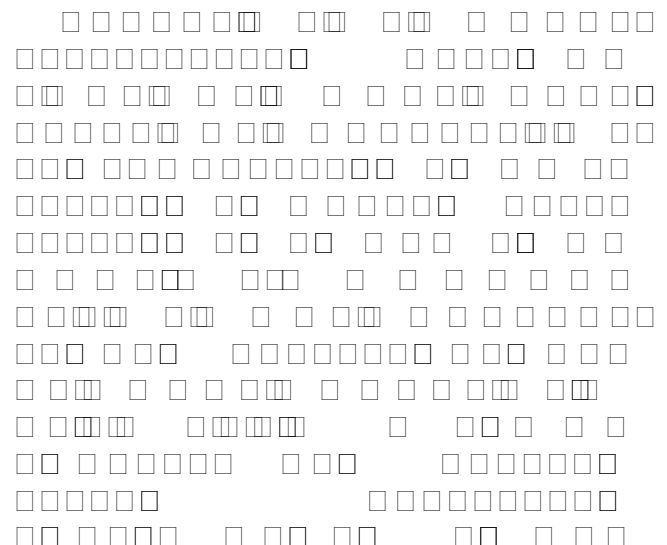
3.5 กริดหลายระดับเต็มรูปแบบ (Full Multigrid)

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ มีขั้นตอนที่แตกต่างจากระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่ใช้วัฏจักรแบบต่าง ๆ ที่ผ่านมา กล่าวคือ การดำเนินการในการส่งถ่ายผลเฉลยจะไม่สามารถชี้ชัดลงไปได้ว่า จะดำเนินการ Restriction หรือ Prolongation ซึ่งจะมีการปรับเปลี่ยนไปมาตลอดโดยไม่มีรูปแบบที่ตายตัว จึงอาจเรียกได้ว่าเป็นวัฏจักรปรับตัว (Adaptive Cycle) โดยจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขในการส่งถ่ายผลเฉลยที่กำหนดไว้ ดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 กริดหลายระดับเต็มรูปแบบ

4. เทคนิคที่ใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการการไหล



$$\begin{aligned} u'_P &= \frac{p'_w - p'_e}{a^u_P} \cdot \left(\frac{\Delta V}{\delta x} \right) \\ v'_P &= \frac{p'_s - p'_n}{a^v_P} \cdot \left(\frac{\Delta V}{\delta y} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

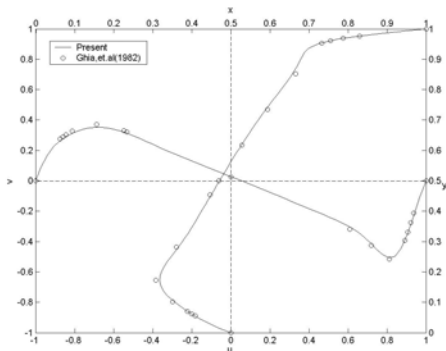
แล้วนำสมการ (4.9) แทนลงในสมการ (4.7) และ (4.8) ก็จะสามารถสร้างสมการแก้ไขค่าความดันมาได้นี้

$$a_p^p p_p' - \sum a_{nb}^p p_{nb}' = S_p \quad (4.10)$$

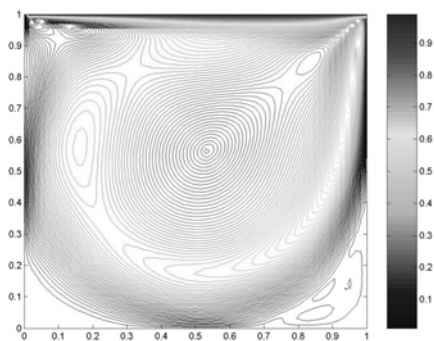
ซึ่งสมการ (4.10) นี้จะแก้หาค่าความดันแก้ไข เพื่อไปปรับค่าความดันให้กับสมการโมเมนตัมในการหาค่าตัวแปรความเร็วอีกครั้งหนึ่ง

5. ผลการคำนวณ

จากการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาเพื่อคำนวณหาผลเฉลย โดยใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ ขนาดของกริดเท่ากับ 512x512 CV ที่เลขเรย์โนลด์ 1000 ผลการคำนวณที่ได้เขียนเป็นกราฟเปรียบเทียบกับผลของ Ghia et al. (1982) ได้ดังรูปที่ 9 และรูปที่ 10 เป็นผลที่ได้จากการคำนวณซึ่งแสดงในรูปเส้น Contour ของความเร็ว



รูปที่ 9 เปรียบเทียบผลของการคำนวณกับผลของ Ghia et al. (1982) ที่เลขเรย์โนลด์ 1000



รูปที่ 10 เส้น Contour ของความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 1000

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการคำนวณหาผลเฉลยที่เลขเรย์โนลด์ 1000 ได้ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ โดยใช้ค่า Under-relaxation Factor ของความเร็วและความดันเท่ากับ 0.6 และ 0.2 ตามลำดับ ส่วนจำนวนรอบที่ใช้ในการทำซ้ำภายในของขั้นตอนวิธี SIMPLE มี 3 รอบ ใน Momentum Equation และมี 10 รอบ ใน Pressure

Correction Equation ซึ่งค่าทั้งสองนี้ได้ประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ เหมือนกันทุกแบบเพื่อที่จะสามารถทำการเปรียบเทียบกันได้นั่นเอง ซึ่งผลการคำนวณที่ได้เป็นการแสดงให้เห็นถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณเป็นวินาทีกับค่า norm (L_2 norm) ของ Residual บนกริดละเอียดที่สุด ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มี CPU AMD XP 2400, RAM 512 MB ดังแสดงในตารางที่ 5.1 ซึ่งหากใช้คอมพิวเตอร์นี้คำนวณผลโดยใช้กริดระดับเดียวแล้วจะใช้เวลาเท่ากับ 88719 sec หรือประมาณ 1 วัน จึงจะได้คำตอบ

6. สรุปผล

จากผลการคำนวณของโปรแกรมคอมพิวเตอร์พบว่า ระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่ประยุกต์ใช้นั้น Full Multigrid จะเป็นวิธีการที่สามารถคำนวณหาผลเฉลยได้รวดเร็วที่สุดในบรรดาวิธีการต่าง ๆ ที่ประยุกต์ใช้ และเร็วกว่าประมาณ 830 เท่า ของการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียว ซึ่งจำนวนของระดับกริดที่จะใช้ก็มีผลต่อความเร็วของการคำนวณเช่นกัน จะเห็นว่าในแต่ละวิธีการนั้นจำนวนระดับที่เหมาะสมนั้นจะไม่เท่ากัน แต่โดยรวมแล้วจะอยู่ระหว่าง 6-8 ระดับนั้นจะเหมาะสมที่สุดที่จะสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้กับทุกชนิดของวิธีกริดหลายระดับ

ตารางที่ 5.1 แสดงผลการคำนวณเปรียบเทียบเวลาที่ใช้เป็นวินาที (SG/MG) สำหรับจำนวนระดับกริด (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3) และค่า SG/MG (482, 751, 828, 58, 833)

จำนวนระดับกริด	เวลาที่ใช้เป็นวินาที							**
	9	8	7	6	5	4	3	
V-Cycle	184	192	223	299	610	1,534	5,265	482
W-Cycle	148	143	118	118	619	979	4,992	751
F-Cycle	146	148	141	107	226	609	2,219	828
Sawtooth	*	*	1,529	2,125	2,274	6,385	20,420	58
FMG	109	106	125	109	111	144	349	833

* ผลการคำนวณไม่ลู่เข้าหาคำตอบ

**SG/MG = เวลาที่ใช้โดย SG/เวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้โดย MG

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] บุญลือ สวัสดิ์มงคล. (2544). การพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลแบบสองมิติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- [2] สอด สลักษณ์. (2544). การประยุกต์ใช้วิธีกริดหลายระดับกับปัญหาการไหลแบบ 2 มิติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- [3] สอด สลักษณ์. (2543). การวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยวิธีไฟไนต์โวลุ่ม. รายงานการศึกษาค้นคว้า ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2543.
- [4] Brandt, A. (1977). Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. Mathematics of Computation. vol. 138: 333-390.

- [5] Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T. (1982). High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Computational Physics* 48, 387-411.
- [6] Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill.
- [7] Thompson, M. C. and Ferziger, J. H. (1988). An Adaptive Multigrid Technique for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*.
- [8] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Longman Group.
- [9] Wesseling P. (1995). Introduction to Multigrid Methods. *ICASE* 1995; No. 95-11.