

การใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ร่วมกับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ย่อยบนคาร์ทีเซียนกริด

Using Combined Boundary Element Method and Finite Difference Method to Solve Partial Differential Equations on Cartesian Grids

สมชาติ ฉันทศิริวรรณ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต

อ. คลองหลวง จ. ปทุมธานี 12121

โทร 0-25643001 โทรสาร 0-25643010 E-mail: somchart@engr.tu.ac.th

Somchart Chantasiriwan

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus

Khlong Luang, Pathum Thani 12121

Tel: 0-25643001 Fax: 0-25643010 E-mail: somchart@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

ปัญหาที่บรรยายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและเงื่อนไขขอบเขต มักไม่มีวิธีผลเฉลยแน่นอน การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขอาจใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ข้อเสียเปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ ขั้นตอนเตรียมข้อมูลเพื่อป้อนสู่โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งต้องมีการสร้างเมชภายในโดเมนของปัญหา โปรแกรมสร้างเมชสำหรับโดเมนสองมิติอาจหาได้ง่าย แต่โปรแกรมสร้างเมชสำหรับโดเมนสามมิติมีความซับซ้อนสูง จึงมักเป็นโปรแกรมที่ต้องซื้อหาในราคาแพง อย่างไรก็ตามมีวิธีเชิงตัวเลขหลายวิธีที่สามารถแก้ปัญหาได้โดยไม่ใช้เมชหรือใช้เมชที่สร้างได้ง่าย ๆ อย่างคาร์ทีเซียนกริด หนึ่งในวิธีนั้นคือวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ วิธีนี้แก้สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์อย่างมีประสิทธิภาพ แต่การพัฒนาวิธีนี้ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมาทำให้วิธีนี้สามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อย่างมีประสิทธิภาพเช่นกัน บทความนี้นำเสนอการใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ร่วมกับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เพื่อสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยทั่วไป โดยต้องการเพียงข้อมูลบนขอบเขตของปัญหาและคาร์ทีเซียนกริด การใช้วิธีนี้แก้ปัญหาตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าวิธีดังกล่าวให้ผลเฉลยที่น่าพอใจ

Abstract

Problems described by partial differential equations and boundary conditions do not usually have exact solutions. The finite element method may be used to obtain numerical solutions. A disadvantage of the finite element is the preprocessing step, which requires domain mesh generation. Mesh generation pro-

grams for two-dimensional domains may be easy to find, but programs for three-dimensional domains are much more complicated, and, as a result, are expensive. However, there exist other numerical methods that do not require mesh generation or require simple mesh like Cartesian grid. One of such methods is the boundary element method. This method can solve homogeneous differential equations efficiently. Recent developments enable this method to solve inhomogeneous differential equations efficiently as well. This article presents a method that combines the boundary element method with the finite difference method to solve general partial differential equations using only boundary data and Cartesian grid. This method is shown to be able to solve a sample problem satisfactorily.

1. บทนำ

ในการแก้ปัญหาที่บรรยายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย วิธีที่นิยมใช้คือวิธีเชิงตัวเลข ในบรรดาวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยม วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) เป็นวิธีโดดเด่นเหนือวิธีเชิงตัวเลขอื่นเนื่องจากความสามารถของวิธีนี้ในการแก้ปัญหาหลากหลายปัญหาและปัญหาที่มีโดเมน (domain) ซับซ้อน อย่างไรก็ตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีข้อเสียเปรียบตรงที่มันต้องการการสร้างเมช (mesh) ภายในโดเมน ซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้ขั้นตอนเตรียมข้อมูล (preprocessing) เพื่อป้อนสู่โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ยุ่งยากและใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของปัญหาสามมิติที่มีโดเมนซับซ้อน

วิธีเชิงตัวเลขอีกวิธีหนึ่งที่กำลังเป็นที่ยอมรับ ในความสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเอกพันธ์ (homogeneous) คือ วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ (boundary element method) ข้อได้เปรียบของวิธีนี้เกี่ยวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ วิธีนี้ต้องการเมชที่มีน้อยกว่าเมชสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หนึ่งมิติ กล่าวคือวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ต้องการเพียงเมชขอบเขต (boundary mesh) ในขณะที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต้องการเมชโดเมน (domain mesh) อย่างไรก็ตามวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ประสบปัญหาเช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์ (inhomogeneous) เพราะต้องการเมชโดเมนเช่นกัน

ขั้นตอนการเตรียมข้อมูลจะง่ายขึ้นมาก ถ้าเมชโดเมนเป็นคาร์ทีเซียนกริด (Cartesian grid) เท่าที่ผ่านมา ได้มีการใช้คาร์ทีเซียนกริดในการสร้างโดเมนสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1] แต่ต้องที่ใช้พิกัดแบบขอบเขต (boundary-fitted coordinates) ซึ่งมีขั้นตอนที่ยาก นอกจากนี้ ได้มีผู้เสนอให้ใช้คาร์ทีเซียนกริดกับวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) [2] โดยไม่ต้องอาศัยพิกัดแบบขอบเขต แต่ก็ยังต้องมีขั้นตอนพิเศษสำหรับจัดการกับขอบเขตอยู่ดี ซึ่งการสร้างเมชโดเมนเป็นคาร์ทีเซียนกริดจะเป็นกระบวนการที่ง่ายและสามารถทำให้เป็นอัตโนมัติ ถ้าโดเมนนั้นมีรูปทรงที่ง่ายเช่น สี่เหลี่ยมสำหรับโดเมนสองมิติ และลูกบาศก์สำหรับโดเมนสามมิติ เป็นต้น เมื่อไม่นานมานี้ Jung และ Steinbach [3] เสนอให้ใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ร่วมกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์ โดยปริพันธ์โดเมนที่เกิดจากวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์จะแปลงเป็นปริพันธ์ขอบเขตจากการประมาณค่าพจน์ที่ไม่เป็นเอกพันธ์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

บทความนี้นำเสนออีกวิธีหนึ่งของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์โดยใช้คาร์ทีเซียนกริด แนวความคิดของวิธีนี้คล้ายกับวิธีที่ Li et al. [4] นำเสนอ กล่าวคือผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นโดยทั่วไปสามารถแบ่งเป็น ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ และผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์จะใช้หาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ ในขณะที่วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จะใช้หาผลเฉลยไม่เอกพันธ์ เนื้อหาต่อไปนี้จะบทความจะกล่าวถึงขั้นตอนการแยกปัญหาที่ต้องการแก้เป็น ปัญหาของสมการเอกพันธ์ และปัญหาของสมการไม่เอกพันธ์ หลังจากนั้นจะเป็นรายละเอียดของการใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ร่วมกับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เพื่อแก้ปัญหา วิธีที่นำเสนอนี้จะใช้แก้ปัญหาตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีนี้

2. การแยกปัญหา

มีหลายปัญหาที่พบเห็นในวิศวกรรมศาสตร์ที่บรรยายด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์ และเงื่อนไขขอบเขตไม่เอกพันธ์ ตัวอย่างเช่น

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = s(x,y,z) \quad (1)$$

$$T(x,y,z) = f(x,y,z) \quad \text{สำหรับ } (x,y,z) \text{ บน } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$q(x,y,z) = g(x,y,z) \quad \text{สำหรับ } (x,y,z) \text{ บน } \Gamma_2 \quad (3)$$

โดย n เป็นพิกัดตั้งฉากกับขอบเขต และ โดย $q = \partial T / \partial n$ ผลเฉลยของปัญหานี้อาจแสดงเป็นผลรวมของสองผลเฉลย

$$T = T_h + T_p \quad (4)$$

โดย T_p เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์ และ T_h เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเอกพันธ์

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} = s(x,y,z) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

โดเมน Ω' สำหรับปัญหาของ T_p มีขนาดใหญ่กว่าและครอบคลุมโดเมนจริง Ω และ Ω' ควรมีรูปทรงที่เหมาะสมแก่การสร้างคาร์ทีเซียนกริด เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสำหรับปัญหาสองมิติ หรือรูปลูกบาศก์สำหรับปัญหาสามมิติ เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของ T_p อาจกำหนด ให้เป็นเงื่อนไขเอกพันธ์ ดังนี้

$$T_p(x,y,z) = 0 \quad \text{สำหรับ } (x,y,z) \text{ บน } \Gamma' \quad (7)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการหาผลเฉลย โดยผลเฉลยที่ได้จะใช้สร้างเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาของ T_h ดังนี้

$$T_h(x,y,z) = f(x,y,z) - T_p(x,y,z) \quad \text{สำหรับ } (x,y,z) \text{ บน } \Gamma_1 \quad (8)$$

$$q_h(x,y,z) = g(x,y,z) - q_p(x,y,z) \quad \text{สำหรับ } (x,y,z) \text{ บน } \Gamma_2 \quad (9)$$

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จะใช้หาผลเฉลยของปัญหาของ T_p ตามสมการ (5) และ (7) และวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์จะใช้หาผลเฉลยของปัญหาของ T_h ตามสมการ (6), (8) และ (9)

3. การหาผลเฉลย

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แปลงสมการ (5) เป็นสมการพีชคณิตดังนี้

$$\frac{1}{\Delta^2} (6T_{Pi} - T_{P,N} - T_{P,E} - T_{P,S} - T_{P,W} - T_{P,T} - T_{P,B}) = s_i \quad (10)$$

โดยตัวห้อย N, E, S, W, T และ B หมายถึงตำแหน่งของบัพ (node) ในคาร์ทีเซียนกริดที่อยู่ถัดจากบัพ i ไปด้านหน้า, ด้านขวา, ด้านหลัง, ด้านซ้าย, ด้านบน และด้านล่างตามลำดับ และ Δ คือระยะห่างระหว่างบัพสองบัพที่ใกล้กันมากที่สุด สมการ (10) แทน N_i สมการสำหรับ N_i บัพภายใน Ω' ส่วนสมการสำหรับ N_b บัพบน Γ' คือ $T_{Pi} = 0$ ดังนั้นระบบสมการพีชคณิตที่ได้จึงมี N_i ตัวแปร และผลเฉลย T_{Pi} สำหรับ N_i บัพภายใน Ω' จึงสามารถหาได้โดยง่าย

วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์แปลงสมการ (6) เป็นสมการพีชคณิตดังนี้ [5]

$$A\bar{T}_h - B\bar{q}_h = 0 \quad (11)$$

โดย **A** และ **B** เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับลักษณะของขอบเขต และพิกัดของบัพบนขอบเขต ส่วน $\vec{T}_h$ และ $\vec{q}_h$ เป็นเวกเตอร์ของ อุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนที่บัพขอบเขต ระบบสมการ (8), (9) และ (11) หาผลเฉลยได้เป็น q_h บน Γ_1 และ T_h บน Γ_2 ซึ่งในสมการ (8) และ (9) จะต้องมีการคำนวณค่า T_p และ q_p ที่พิกัด (x,y,z) ซึ่งอาจจะไม่ใช่พิกัดของบัพในคาร์ทีเซียนกริด ค่าเหล่านี้อาจได้มาจากการประมาณค่าในช่วง (interpolation) โดยใช้ T_{pi} ที่ได้จากการแก้สมการ (5) และ (7) สมการสำหรับการประมาณค่าในช่วงคือ

$$T_p(x,y,z) = \sum_{j=1}^{10} a_j \phi_j \quad (12)$$

โดย $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = z$, $\phi_5 = x^2$, $\phi_6 = xy$, $\phi_7 = xz$, $\phi_8 = y^2$, $\phi_9 = yz$ และ $\phi_{10} = z^2$ สมมติว่า $T_{p1}, T_{p2}, \dots, T_{p10}$ เป็นค่า T_{pi} ที่พิกัด (x_i, y_i, z_i) ของ 10 บัพในคาร์ทีเซียนกริดที่อยู่ใกล้เคียงกับพิกัดที่ซึ่ง จะต้องมีการหาค่า T_p หรือ q_p ตามสมการ (8) หรือ (9) เมื่อใช้สมการ (12) โดยให้ $T_p(x,y,z) = T_p(x_i, y_i, z_i) = T_{pi}$ จะได้สมการเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} T_{p1} \\ T_{p2} \\ \vdots \\ T_{p10} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{10} \end{pmatrix} \quad (13)$$

โดยที่

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 & y_1^2 & y_1 z_1 & z_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & x_2 z_2 & y_2^2 & y_2 z_2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} & y_{10} & z_{10} & x_{10}^2 & x_{10} y_{10} & x_{10} z_{10} & y_{10}^2 & y_{10} z_{10} & z_{10}^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ถ้าบัพทั้ง 10 บัพได้รับการคัดเลือกอย่างเหมาะสม เมทริกซ์ Φ จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular) สมการ (13) จะกลายเป็น

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{10} \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} T_{p1} \\ T_{p2} \\ \vdots \\ T_{p10} \end{pmatrix} \quad (15)$$

หรือ

$$a_j = \sum_{i=1}^{10} b_{ji} T_{pi} \quad (16)$$

แทนค่า a_j จากสมการ (16) ลงในสมการ (13)

$$T_p(x,y,z) = \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^{10} \phi_j b_{ji} \right) T_{pi} \quad (17)$$

ซึ่งเป็นสมการที่ใช้ประมาณค่า $T_p(x,y,z)$ จาก $T_{p1}, T_{p2}, \dots, T_{p10}$ ที่มีพิกัดใกล้กับพิกัด (x,y,z)

4. ปัญหาตัวอย่าง

โดเมนของปัญหาตัวอย่างเป็นทรงกลมขนาดรัศมี 0.5 กำหนดให้จุดกำเนิด (origin) ของแกน x-y-z อยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม สมการของปัญหาตัวอย่างคือ สมการ (1) โดย

$$s(x,y,z) = 3\exp(x+y+z) \quad (18)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$T(x,y,z) = \exp(x+y+z) \quad \text{สำหรับ } z \geq 0 \quad (19)$$

$$q(x,y,z) = 2(x+y+z)3\exp(x+y+z) \quad \text{สำหรับ } z < 0 \quad (20)$$

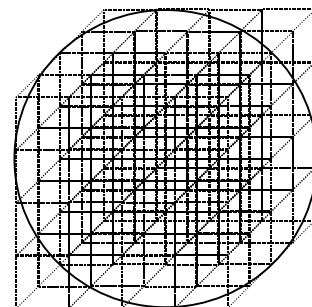
วิธีคำนวณตัวเลขเอนิเมนต์ร่วมกับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จะใช้แก้ปัญหาตัวอย่างนี้ ผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) ที่ได้จะเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution)

$$T_{\text{exact}}(x,y,z) = \exp(x+y+z) \quad (21)$$

โดยการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนที่ N_c บัพภายในโดเมนดังนี้

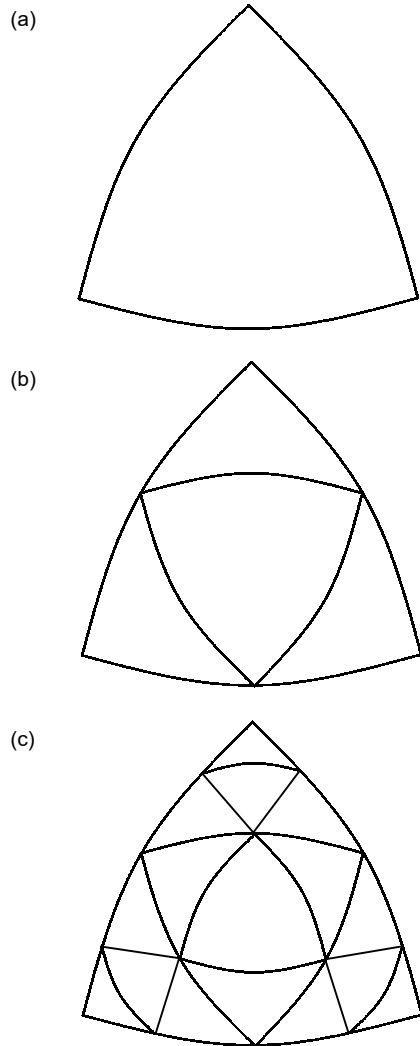
$$\varepsilon = \left[\frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \left(1 - \frac{T(x_i, y_i, z_i)}{T_{\text{exact}}(x_i, y_i, z_i)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (22)$$

5. ผลเฉลยเชิงตัวเลข



รูปที่ 1 โดเมน Ω ของปัญหาตัวอย่างในคาร์ทีเซียนกริด

รูปที่ 1 แสดงคาร์ทีเซียนกริดของโดเมนลูกบาศก์ Ω' ขนาด $1 \times 1 \times 1$ ครอบคลุมโดเมนของปัญหาตัวอย่าง Ω ซึ่งเป็นทรงกลมขนาดรัศมี 0.5 อย่างไรก็ตาม รูปที่ 1 แสดงคาร์ทีเซียนกริดขนาด $0.25 \times 0.25 \times 0.25$ แต่คาร์ทีเซียนกริดที่ใช้ในการคำนวณมีขนาด $0.1 \times 0.1 \times 0.1$



รูปที่ 2 ชั้นประกอบบนหนึ่งในแปดของขอบเขตของ Ω
(a) 1 ชั้นประกอบ (b) 4 ชั้นประกอบ (c) 16 ชั้นประกอบ

รูปที่ 2 แสดงหนึ่งในแปดของผิวของทรงกลมโดยมีจำนวนชั้นประกอบขอบเขต (boundary element) ต่างกัน ชั้นประกอบที่ใช้ในวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาที่คือ ชั้นประกอบสามเหลี่ยม 6 บัพ (6-node triangular element) ดังนั้นจำนวนชั้นประกอบขอบเขตและบัพขอบเขตทั้งหมดจึงเท่ากับ 8 ชั้นประกอบและ 18 บัพในกรณีของรูป 2(a) เท่ากับ 32 ชั้นประกอบและ 66 บัพในกรณีของรูป 2(b) และเท่ากับ 128 ชั้นประกอบและ 258 บัพในกรณีของรูป 2(c)

ตารางที่ 1 แสดงค่าคลาดเคลื่อน ϵ ตามสมการ (22) ของผลเฉลยในกรณีที่มีชั้นประกอบและบัพขอบเขตมีจำนวนต่าง ๆ กัน 3 กรณี ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ร่วมกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำเสนอในบทความนี้จึงมีความแม่นยำในระดับที่น่าพอใจ

นอกจากนี้การที่ค่าคลาดเคลื่อนน้อยซึ่งลงเมื่อจำนวนชั้นประกอบและจำนวนบัพมากขึ้นแสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีคุณสมบัติลู่เข้า (convergence)

ตารางที่ 1 ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเชิงตัวเลข

จำนวนชั้นประกอบ ขอบเขต	จำนวนบัพขอบเขต	ϵ
8	18	5.585×10^{-2}
32	66	4.898×10^{-3}
128	258	3.045×10^{-3}

6. สรุป

บทความนี้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตไม่เอกพันธ์ โดยข้อมูลที่ต้องการในขั้นตอนการเตรียมข้อมูลเป็นเพียงข้อมูลขอบเขต ส่วนคาร์ทีเซียนกริดสามารถสร้างขึ้นโดยง่ายหรือโดยอัตโนมัติ วิธีนี้แก้ปัญหาเป็น ปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตเอกพันธ์ และปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเอกพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตไม่เอกพันธ์ จากนั้นใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แก้ปัญหาแรก วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์แก้ปัญหาหลัง การทดสอบวิธีนี้ในการแก้ปัญหาตัวอย่างสามมิติแสดงให้เห็นประสิทธิภาพของวิธีนี้

7. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] R. Lohner, Applied CFD Techniques, Wiley, Chichester, 2001.
- [2] H. Johansen and P. Collela, "A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson's Equation on Irregular Domains," Journal of Computational Physics, 1998, Vol. 147, pp. 60-85.
- [3] M. Jung and O. Steinbach, "A Finite Element-Boundary Element Algorithm for Inhomogeneous Boundary Value Problems," Computing, 2002, Vol. 68, pp. 1-17.
- [4] J. Li, Y. C. Hon, and C. S. Chen, "Numerical Comparisons of Two Meshless Methods Using Radial Basis Functions," Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, Vol. 26, pp. 205-225.
- [5] สมชาติ ฉันทศิริวรรณ, วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์เบื้องต้น, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546