

การประเมินระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีโฟโตอีลาสติซิตี สำหรับงานด้านกลศาสตร์ของแข็ง

Evaluation of Finite Element Method and Photoelasticity for Solid Mechanics Application

วิโรจน์ ลิ้มตระการ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต

99 หมู่ 18 แขวงคลองหนึ่ง เขตคลองหลวง ปทุมธานี 12120

โทร 0-25643001 ต่อ 3144 โทรสาร 0-25643001 ต่อ 3049 E-mail: limwiroj@engr.tu.ac.th

Wiroj Limtrakarn

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus

99 Moo 18, Klong Luang, Pathumthani 12120 Thailand

Tel: 0-25643001 Ext. 3144 Fax: 0-25643001 Ext. 3049 E-mail: limwiroj@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีโฟโตอีลาสติซิตีเพื่อหาการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นในปัญหากลศาสตร์ของแข็ง โดยเริ่มจากทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ การหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนการคำนวณ และการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต จากนั้นอธิบายถึงทฤษฎีโฟโตอีลาสติซิตี ต่อมาแสดงผลการประยุกต์กับปัญหา 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการดัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง ผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์ทั้ง 2 เทคนิคแสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน

Abstract

Finite Element Method and photoelasticity technique are presented to predict the stress distribution for solid mechanics problems. The paper first describes 2D solid mechanics theory. Finite element formulation, the computational procedure and its boundary conditions are then represented. Photoelasticity theory and its procedure are described. The validated examples of both techniques are four-point bending problem and chain-gear contact problem. The solutions show the efficiency of finite element method and have a good agreement with the photoelasticity results.

1. บทนำ

ความเสียหายที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานส่วนใหญ่เกิดจากการรับภาระที่มากเกินไปทำให้เกิดความเค้นสูงเกินกว่าที่วัสดุจะทนได้ ดังนั้นงานวิจัยที่สามารถหาความเค้นที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานขณะใช้งานได้แม่นยำจึงมีความสำคัญต่องานด้านการออกแบบผลิตภัณฑ์สมัยใหม่เป็นอย่างยิ่ง งานวิจัยดังกล่าวสามารถทำได้ทั้งในรูปแบบการทดลอง เช่น การวัดด้วยเกจความเครียดและการใช้เทคนิคโฟโตอีลาสติซิตีวัดความเค้น หรือจากการคำนวณด้วยวิธีประมาณ เช่น การคำนวณหาความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นต้น

บทความนี้สนใจหาความเค้นที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานโปร่งใส และได้นำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการทดลองที่ใช้เทคนิคโฟโตอีลาสติซิตีมาประยุกต์ใช้ ทั้งสองวิธีนี้สามารถหาความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดทั้งชิ้นงานได้ เนื้อหาของบทความจะเริ่มต้นจากการอธิบายกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติและระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์ รวมถึงการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้อง จากนั้นกล่าวถึงทฤษฎีโฟโตอีลาสติซิตีซึ่งมีพื้นฐานจากทฤษฎีของแสง ต่อจากนั้นประยุกต์ทั้ง 2 วิธีกับปัญหา 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการดัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง

2. ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ [1]

สมการทดแทนความเป็นจริงของปัญหากลศาสตร์ของแข็งในระบบ 2 มิติ ประกอบด้วย 3 สมการดังนี้

สมการความสมดุลของของแข็งในทิศทาง x และ y

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1n)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1ข)$$

โดย σ_x และ σ_y คือความเค้นในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ส่วน τ_{xy} คือความเค้นเฉือนในระนาบ xy

สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \quad (2)$$

$$\text{โดย } \{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]$$

$$\{\epsilon\}^T = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

สัมประสิทธิ์ในเมทริกซ์ [C] เป็นความสัมพันธ์ของค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นและค่าปัวซอง และขึ้นกับว่าจะพิจารณาปัญหาเป็นความเค้นในระนาบ (plane stress) หรือความเครียดในระนาบ (plane strain)

และสมการสุดท้ายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนที่ดังนี้

$$[\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}] = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3)$$

โดย ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} คือค่าความเครียดในแนวแกน x, y และความเครียดเฉือนในระนาบ xy ส่วน u และ v คือค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

จากนั้นนำระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบบับโนฟ-กาลเลอร์คิน มาประยุกต์ใช้กับสมการที่ (1)-(3) และได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ออกมาในรูปแบบดังนี้

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (4)$$

โดย [K] คือเอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งแกร่ง $\{\delta\}^T = [u \quad v]$ และ {F} คือโวลุ่มเวกเตอร์เนื่องจากแรงกระทำที่ผิว

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีด้วยกัน 3 รูปแบบและแสดงในรูปที่ 1 เงื่อนไขขอบเขตแรกแสดงให้เห็นว่า ตลอดขอบเขต S_1 มีแรงดึง $T_1(t)$ มากระทำดังนี้

$$\sigma_y n_i = T_1(t) \quad (5n)$$

โดย n_i คือเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตที่สองแสดงถึงการกำหนดค่าการเคลื่อนที่ $u_i(x,t)$ ให้มีค่าคงที่ $u_2(t)$ ตลอดขอบเขต S_2 ดังนี้

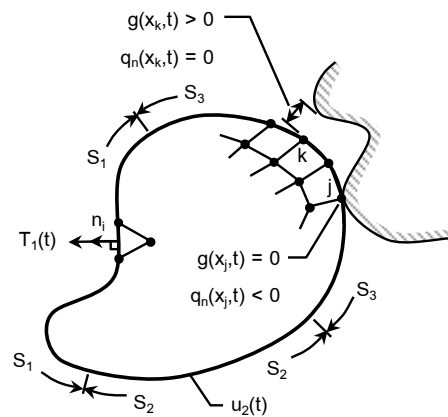
$$u_i(x,t) = u_2(t) \quad (5ข)$$

เงื่อนไขขอบเขตที่สามแสดงถึงเงื่อนไขการสัมผัสกัน หากบริเวณใดในขอบเขต S_3 เกิดการสัมผัสกับวัตถุภายนอกหรือขอบเขตอื่น ก็จะทำให้เกิดความเค้นแบบอัดตัว (compressive stress) บนขอบเขต S_3 และไม่มีช่องว่างระหว่างขอบเขต S_3 กับวัตถุภายนอก ($g(x_i,t) = 0$) ส่วนบริเวณอื่น ๆ ของขอบเขต S_3 ที่ไม่ได้สัมผัสกับวัตถุภายนอกก็จะเกิดช่องว่างขึ้น ($g(x_k,t) > 0$) และจะไม่เกิดความเค้นเนื่องจากการสัมผัสกัน (contact stress) จากรายละเอียดดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$q_n(x,t) = q_c(x,t) n_i \leq 0 \quad (6ก)$$

$$g(x,t) = g(x) - u(x,t) n_i \geq 0 \quad (6ข)$$

โดย $q_c(x,t)$ คือแรงเนื่องจากการสัมผัสกัน $q_n(x,t)$ คือแรงสัมผัสในทิศทางที่ตั้งฉากกับขอบเขต และ $g(x,t)$ คือช่องว่างระหว่างขอบเขต S_3 กับวัตถุภายนอกหรือขอบเขตอื่น



รูปที่ 1 - แสดงลักษณะเงื่อนไขขอบเขต

2.2 ทฤษฎีโฟโตรีลาสติกซิตี [2]

ทฤษฎีโฟโตรีลาสติกซิตีสามารถอธิบายได้ด้วยหลักการหักเหของแสงที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาลักษณะของคลื่นแสง ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยรูปแบบสมการฮาร์โมนิก (Harmonic waveform) ดังนี้

$$E = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\phi - \omega t) \quad (7)$$

โดย λ คือแอมพลิจูดของคลื่น ϕ คือมุมเฟสของคลื่น E ส่วน ω คือความถี่เชิงมุม และ t คือเวลา

เมื่อคลื่นแสงเคลื่อนที่ผ่านแผ่นคลื่น (wave plate) ซึ่งทำหน้าที่กรองคลื่นแสงทั่ว ๆ ไปที่มีทิศทางไม่แน่นอนให้ผ่านออกจากแผ่นคลื่นอย่างมีระเบียบ มีรูปแบบและทิศทางที่ชัดเจน สำหรับแผ่นคลื่นที่ใช้ทดลองมีคุณสมบัติหักเหแตกต่างกัน 2 แนวแกน (birefringent) จะทำให้เกิดการหน่วงช้า (retardation) เป็นผลให้คลื่นแสงที่ผ่านไปทั้ง 2 แนวแกนที่ตั้งฉากกันเกิดการเลื่อนมุมเฟสแบบเชิงเส้นสัมพันธ์ δ ดังนี้

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = h(n_2 - n_1) \quad (8)$$

โดย δ_1 และ δ_2 คือมุมเฟสของคลื่นแสงที่ผ่านแกน 1 และ 2 ตามลำดับ n_1 และ n_2 คือดัชนีหักเหเมื่อคลื่นแสงผ่านแกน 1 และ 2 ตามลำดับ ส่วน h คือความหนาของแผ่นคลื่น

และมีการเลื่อนมุมเฟสแบบเชิงมุมสัมพันธ์ Δ ดังนี้

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_2 - n_1) \quad (9)$$

ถ้าแผ่นคลื่นถูกออกแบบให้ $\Delta = \frac{\pi}{2}$ จะเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า แผ่น

คลื่นหนึ่งในสี่ส่วน (quarter-wave plate) ซึ่งเป็นแบบที่ใช้ แต่ถ้า $\Delta = \pi$ และ 2π จะเรียกว่า แผ่นคลื่นแบบครึ่งและเต็มคลื่น (half- and full-wave plates) ตามลำดับ

เมื่อวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นเกิดความเค้นขึ้นจะมีผลทำให้ค่าดัชนีการหักเหที่แต่เดิมมีค่าคงที่และเท่ากันตลอดทั้งชิ้นงาน เปลี่ยนแปลงค่าไปตามขนาดของความเค้นที่เกิดขึ้นตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$n_2 - n_1 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (10)$$

สมการที่ 10 ถูกเรียกว่า กฎของความเค้นและแสง (stress-optic law) โดย c คือสัมประสิทธิ์ความเค้นและแสงแบบสัมพันธ์ (relative stress-optic coefficient) ส่วน σ_1 และ σ_2 คือความเค้นหลักที่เกิดขึ้นเมื่อแทนสมการ (10) ลงใน (9) จะได้ว่า

$$\Delta = \frac{2\pi h c}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (11)$$

หรือเขียนใหม่ในรูปแบบดังนี้

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h} \quad (12)$$

โดย

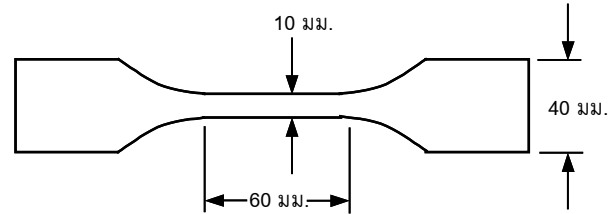
$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} \quad \text{และ} \quad f_\sigma = \frac{\lambda}{c}$$

ค่า N คือจำนวนรอบของการหน่วงช้าและนับด้วยอันดับของแถบแสง (fringe order) ส่วน f_σ คือค่าคงที่เห็นแถบแสงของวัสดุ (material fringe value)

การหมุนแผ่นคลื่นได้อย่างเหมาะสมจะทำให้การมองเห็นแถบแสงมีความชัดเจนมาก และเรียกรูปแบบของแถบแสงแสดงความแตกต่างของความเค้นหลักนี้ว่า แถบไอโซโครมาติก (isochromatic fringe pattern)

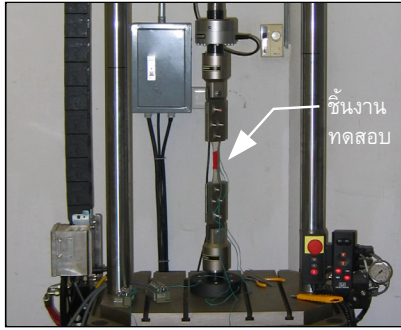
3. การเตรียมตัวอย่างและการทดสอบหาคุณสมบัติวัสดุ

ชิ้นงานโปร่งใสที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ทำมาจากวัสดุอีพอกซีเรซิน โดยในปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด จะใช้ชิ้นงานรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สั่งซื้อจากต่างประเทศและมีคุณสมบัติทางกลและทางแสงครบถ้วน ส่วนปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟืองนั้น ชิ้นงานมีความซับซ้อน จึงได้ทำการหล่อชิ้นงานขึ้นมา โดยใช้เรซินเบอร์ 5320 ซึ่งหาได้ง่ายในประเทศและราคาถูก จากนั้นทำการทดลองหาคุณสมบัติทางกล โดยเริ่มต้นจากการหล่อชิ้นงานทดสอบเป็นรูปทรงกระดูกสุนัข ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงขนาดของชิ้นงานทดสอบในรูปทรงกระดูกสุนัข

เมื่อนำชิ้นงานทดสอบไปเข้าเครื่องทดสอบด้วยแรงดึง INSTRON 8872 ดังแสดงในรูปที่ 3 ผลที่ได้คือคุณสมบัติทางกลต่าง ๆ ดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ 950 MPa อัตราส่วนของบัวร์ชงเท่ากับ 0.38 และความเค้นที่จุดคลากเท่ากับ 60 MPa ส่วนคุณสมบัติทางแสงได้จากการหล่อชิ้นงานรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดเดียวกับปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และทำการทดลองเช่นเดียวกับปัญหาดังกล่าว จากนั้นนำค่าผลที่ได้มาคำนวณ ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ความเค้นและแสงแบบสัมพันธ์เท่ากับ $3.66E-11 \text{ m}^2/\text{N}$



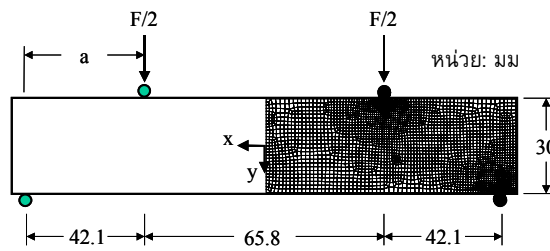
รูปที่ 3 แสดงการทดสอบแรงดึงด้วยเครื่อง INSTRON

4. การประยุกต์กับปัญหา

ปัญหาที่นำมาศึกษาผลที่ได้จากการประยุกต์เทคนิคโฟโตอีลาสติคซิติและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มี 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง

4.1 ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด

ลักษณะของปัญหาประกอบด้วยแผ่นเรียบโปร่งสี่เหลี่ยมที่ทำมาจากอีพอกซีเรซินจากต่างประเทศ ขนาดชิ้นงานเท่ากับ 160 x 30 มม. วางอยู่บนฐานวงกลมที่ตำแหน่งปลายทั้งสองข้าง และมีแรงกดลงแนวตั้ง 2 ตำแหน่ง ดังแสดงในรูปที่ 4



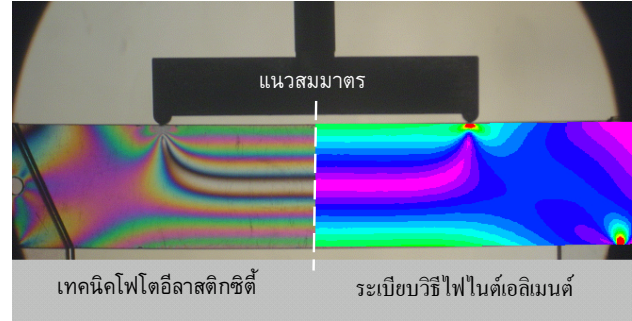
รูปที่ 4 แสดงลักษณะปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด

ภายใต้แรงกดด้านบนทั้งสองข้าง ทำให้เกิดพฤติกรรมการตัดเกิดขึ้นเป็นหลัก ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นสามารถหาได้จากสมการ [3]

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (13)$$

โดย $M = \frac{Fa}{2}$, $I = \frac{h(30)^3}{12}$ และ h คือความหนาแผ่นเรียบ

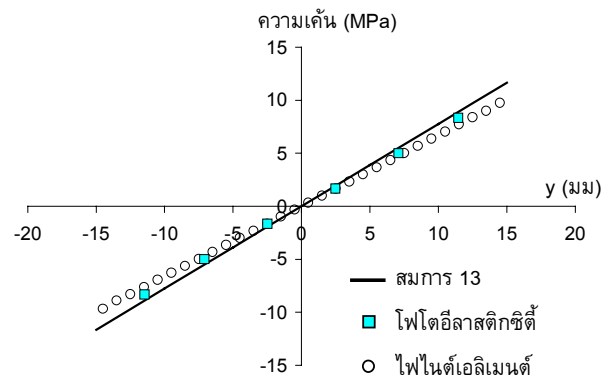
ลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตร ทำให้สามารถวิเคราะห์เพียงครึ่งหนึ่งได้ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมีจำนวน 3,071 จุดต่อและ 2,921 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4 จากนั้นทำการหาลักษณะการกระจายความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้แรง F ขนาด 250 N และเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทดลองด้วยเทคนิคโฟโตอีลาสติคซิติ



รูปที่ 5 การเปรียบเทียบผลการกระจายความเค้นจากเทคนิคโฟโตอีลาสติคซิติและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

รูปที่ 5 แสดงการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นจากการประยุกต์เทคนิคโฟโตอีลาสติคซิติในรูปด้านซ้าย ส่วนรูปด้านขวาแสดงผลการกระจายความเค้นที่ได้จากการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากรูปจะเห็นว่าเมื่อแผ่นเรียบได้รับแรงกดจะเกิดการโก่งตัวลง ทำให้บริเวณขอบด้านล่างเกิดความเค้นดึง และบริเวณขอบด้านบนจะเกิดความเค้นอัดตัว การเปลี่ยนแปลงของความเค้นตลอดแนวสมมาตรจากขอบบนไปขอบล่างจะเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้น ความเค้นจะมีค่าสูงและเปลี่ยนแปลงค่อนข้างมากในบริเวณที่แนวแรงกดสัมผัสกับแผ่นเรียบ

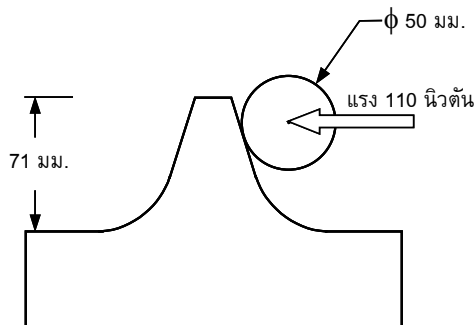
จากนั้นนำค่าความเค้นตลอดแนวสมมาตรตรงกลางแผ่นมาพล็อตเปรียบเทียบผลของทั้งสองวิธีกับสมการ (13) ดังแสดงในรูปที่ 6 พบว่าผลที่ได้จากทั้งสองวิธีมีความถูกต้องและสอดคล้องกัน



รูปที่ 6 การเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ได้กับระยะ y ในแนวสมมาตรตรงกลางแผ่น

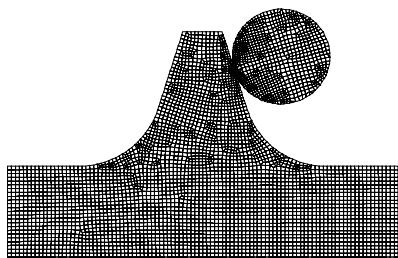
4.2 ปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง

ลักษณะของปัญหาหากพิจารณาโซ่และเฟืองทั้งหมด จะมีความซับซ้อนและใช้เวลาค่อนข้างมาก ในงานวิจัยนี้สนใจผลการสัมผัสกันของโซ่และเฟืองเท่านั้น จึงได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยพิจารณาเพียง 1 ส่วนย่อย ที่ประกอบด้วยฟันเฟือง 1 ฟัน และข้อโซ่ 1 ข้อ จากผลการทดลองด้วยวิธีโฟโตอีลาสติคซิติ หากต้องการให้เห็นการกระจายความเค้นได้ดี ควรที่จะให้ข้อโซ่มีขนาดใหญ่ขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7

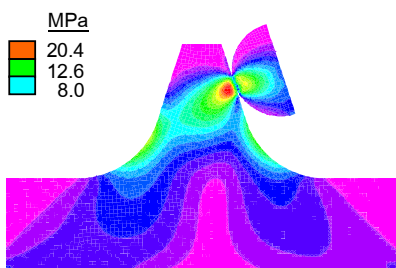


รูปที่ 7 แสดงลักษณะปัญหาการสัมผัสกันของโช้และเฟือง

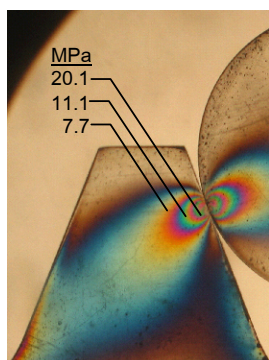
จากนั้นทำการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีจุดต่อ 4,817 จุดและ 4,615 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 8 ส่วนผลการกระจายความเค้นแสดงในรูปที่ 9 และในรูปที่ 10 แสดงการกระจายความเค้นที่ได้จากการทดลองด้วยวิธีโฟโตอีลาสติกซิติ



รูปที่ 8 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหา



รูปที่ 9 ผลการกระจายความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 10 ผลการกระจายความเค้นด้วยวิธีโฟโตอีลาสติกซิติ

จากการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่คำนวณได้จากทั้งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีโฟโตอีลาสติกซิติ พบว่ามีค่าสอดคล้องกัน และมีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 1.5 %

5. สรุป

บทความนี้ได้กล่าวถึงการประเมินระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และเทคนิคโฟโตอีลาสติกซิติสำหรับงานด้านกลศาสตร์ของแข็ง เริ่มจากการกล่าวถึงกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ รวมทั้งการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้อง และทฤษฎีโฟโตอีลาสติกซิติ จากนั้นได้ทำการประยุกต์กับปัญหา 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโช้และเฟือง ผลการเปรียบเทียบความเค้นที่เกิดขึ้นของทั้ง 2 วิธี พบว่ามีความถูกต้องและใกล้เคียงกัน ผลที่ได้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ต่อในงานวิจัยระดับสูง เช่น การศึกษาการเกิดจากการเสียดสีระหว่างโช้และเฟือง เป็นต้น หรือในงานการออกแบบและแก้ปัญหาทางวิศวกรรม หรือในด้านอื่น ๆ เพื่อช่วยให้สามารถเห็นการกระจายความเค้นและเข้าใจพฤติกรรมที่เกิดขึ้นบนผลิตภัณฑ์ขณะใช้งานได้เป็นอย่างดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] ปราโมทย์ เตชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
- [2] Dally, J. W. and Riley, W. F., Experimental stress analysis, Third edition, Singapore, McGraw-Hill, 1991.
- [3] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., Theory of elasticity, Third edition, Singapore, McGraw-Hill, 1970.