

เครื่องวัดพิกัด 3 มิติ แบบข้อต่อ 6 แกน

A Six-Axis Articulate Machine For Three Dimension Coordinate Measuring

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ, กิตติศักดิ์ บุญยังคุณ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กทม.. 10330
โทร 0-22186390 โทรสาร 0-22521513 E-mail: Viboon.S@eng.chula.ac.th

Viboon Sangveraphunsiri, Kittisak Boonyangkoon
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University
Phaya Thai Road. Pathumwan, Bangkok 10330. Thailand
Tel: 0-22186390 Ext. 8303 Fax: 0-22521513 E-mail: Viboon.S@eng.chula.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการออกแบบเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ แบบข้อต่อ 6 แกน การศึกษาจะรวมถึงการออกแบบกลไกและ จลนศาสตร์ของแขนกล รวมทั้งเทคนิคในการสอบเทียบ เครื่องวัดพิกัด นี้ได้พัฒนาเพื่อใช้สำหรับงานทางด้านวิศวกรรมย้อนกลับ (Reverse Engineering) โดยมีเป้าหมายให้มีค่าความถูกต้องดีกว่า 100 ไมโครเมตรโดยประมาณ ภายในขอบเขตการทำงาน 500x500x300 ลูกบาศก์มิลลิเมตร ออฟติคอลโรตารีเอนโค้ดเดอร์ (Optical Rotary Encoder) ความละเอียดสูงจะติดตั้งที่แต่ละข้อต่อของแขนกล เพื่อใช้ในการวัดค่าตำแหน่งมุมของข้อต่อทั้งหมด ด้วยการรู้ค่าตำแหน่งมุม ความ ยาวหัววัด และโครงสร้างของสมการแบบเอกพันธ์ที่ใช้ในการหาค่า ตำแหน่งพิกัด ค่าพารามิเตอร์ที่ยังไม่รู้ค่า ของโครงสร้างแขนกล สามารถหาได้ด้วยวิธีเบย์วีรีเชิงเลขโดยใช้การถดถอยแบบไม่เป็นเชิง เส้น (Nonlinear Regression) ค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณได้จะนำมาใช้ในการ สร้างสมการแบบเอกพันธ์ของแขนกล ที่ใช้ในการวัดพิกัด ข้อมูล ตำแหน่งพิกัดที่วัดได้สามารถเชื่อมโยงเข้ากับโปรแกรมแคดที่ใช้ โดยทั่วไปในภาคอุตสาหกรรม (ตัวอย่างเช่น CATIA) ได้ โดยการ จัดเรียงข้อมูลที่วัดได้ไว้ในรูปแบบกลาง แบบ CGO_ASCII

ความถูกต้องของเครื่อง ทดสอบด้วยการวัดระยะห่างระหว่างทรง กลมสอบเทียบ 2 ตำแหน่ง โดยใช้จุดศูนย์กลางของทรงกลมในการ อ้างอิง ข้อมูลจำนวน 300 จุดจะใช้ในขั้นตอนการสอบเทียบและสำหรับ 50 จุดที่เหลือจะใช้ในการหาค่าความถูกต้อง ผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่า ค่าความถูกต้อง 100 ไมโครเมตร สามารถทำได้

Abstract

The design of a six-axis articulate machine for three-dimension coordinate measuring is studied in this research. The

study includes mechanism design, kinematics design, and calibration technique. The coordinate measuring machine is developed for the reverse engineering application. The target accuracy is approximately better than 100 micrometers for 500x500x300 cubic-millimeter workspace. The very high resolution optical rotary encoder installed at each arm joint is used for measuring the joint angles. By knowing the joint angles, probe length, and the structure of the homogeneous transformation, the unknown parameters of the arm configuration can be solved numerically by using nonlinear regression. The unknown parameters are for obtaining the homogeneous transformation of the arm using in the measurement. The measured coordinate data can be interfaced with commercial CAD packages (such as CATIA) by using a neutral file format, CGO_ASCII format.

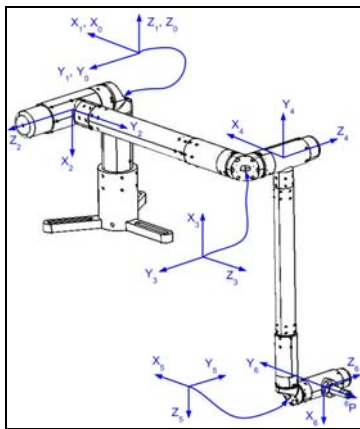
The accuracy of the machine is tested by measuring the distance of the two calibrating sphere locations, using the center point of the sphere as the reference point. The 300 points are used in the calibration procedure, and the other 50 points for evaluating the accuracy. The result shown that accuracy of 100 micrometer promising.

1. บทนำ

อุตสาหกรรมการผลิตชิ้นส่วนที่มีการนำระบบคอมพิวเตอร์เข้าไป ช่วยในการออกแบบและผลิตนั้นยังมีความต้องการอุปกรณ์ที่ช่วยในการ นำข้อมูลพิกัดจากชิ้นงานจริงที่มีรูปร่างสลับซับซ้อนเข้าสู่คอมพิวเตอร์ เพื่อนำไปสร้างแบบสามมิติอย่างละเอียดในคอมพิวเตอร์ โดยใช้วิธีการ ที่เรียกว่าวิศวกรรมย้อนกลับหรือ Reverse Engineering ซึ่งนับว่ามี บทบาทสำคัญมากกับอุตสาหกรรมการผลิตชิ้นส่วนที่ต้องการความ ละเอียดสูง ดังนั้นอุปกรณ์วัดพิกัดสามมิติจึงเป็นอุปกรณ์ที่ได้รับความ สนใจมาโดยตลอด อุปกรณ์วัดพิกัดสามมิตินี้มิให้เลือกมากมายใน ท้องตลาด แต่มีวัตถุประสงค์ในการใช้งานแตกต่างกัน รวมถึงราคาของ

อุปกรณ์ก็แตกต่างกันด้วย ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเน้นที่จะพัฒนาเครื่องมือวัดพิกัดที่สามารถวัดผิวที่มีความสลับซับซ้อน โดยเฉพาะในกรณีที่พื้นผิวมีการบดบังกันหรือ under cut โดยกลไกที่พัฒนาขึ้นเป็นอุปกรณ์วัดพิกัดนี้จึงมีลักษณะคล้ายแขนกลอุตสาหกรรมคือเป็นแขนเชื่อมต่อกับข้อต่อแบบหมุน โดยมีข้อต่อทั้งหมด 6 ข้อต่อ เพื่อให้สามารถวัดได้ทั้งตำแหน่ง (Position) และการเรียงตัว (Orientation) ทัวไปแล้วความละเอียดการวัดที่ใช้ในงานวิศวกรรมย้อนกลับนี้ส่วนมากจะอยู่ระหว่าง 50 – 150 ไมครอน (เป็นการวัดโดยรวม ความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจรู้หรือ sensor ของตัวเครื่องสามารถวัดละเอียดได้มากกว่านี้มาก) ซึ่งแตกต่างกับงานควบคุมคุณภาพซึ่งมีความต้องการความละเอียดต่ำกว่า 50 ไมครอนของการวัดโดยรวม ในงานวิศวกรรมย้อนกลับนั้น เมื่อได้ข้อมูลของค่าพิกัดมาแล้ว ข้อมูลดังกล่าวจะถูกส่งเข้าสู่โปรแกรม CAD ที่มีความสามารถในการสร้างพื้นผิวที่มีความสลับซับซ้อนได้ แต่อย่างไรขั้นตอนในการทำงานแบบวิศวกรรมย้อนกลับนี้ จะเริ่มต้นจากนำข้อมูลพิกัดสามมิติที่วัดได้ดังกล่าวนี้ ผ่านขบวนการกรองสัญญาณหรือ Filter เพื่อทำให้ได้ค่าพิกัดของเส้นโพรไฟล์ (profile) มีความเป็นระเบียบมากขึ้น จากนั้นจึงนำมาสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมหรือที่เรียกว่า Triangular Mesh และนำไปสร้างพื้นผิวที่มีความสลับซับซ้อนต่อไป ในงานวิจัยนี้จะกล่าวเฉพาะอุปกรณ์วัดที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้กับงานวิศวกรรมย้อนกลับนี้เป็นหลัก และจะเรียกอุปกรณ์ที่พัฒนาขึ้นนี้ว่า ซียู-ซีเอ็มเอ็ม (CU-CMM) ในบทความนี้จะกล่าวถึงเทคนิคการสอบเทียบแบบหนึ่งที่ใช้สำหรับกลไก 6 แกนชนิดนี้ ซึ่งเป็นวิธีการที่สะดวกและเหมาะสมสำหรับเครื่องวัดพิกัดที่พัฒนาขึ้น

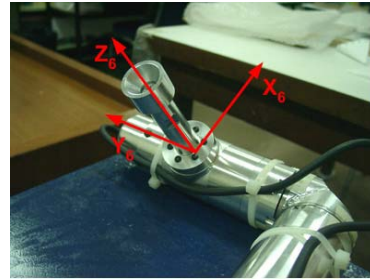
2. การออกแบบและจำลองศาสตร์ของระบบ



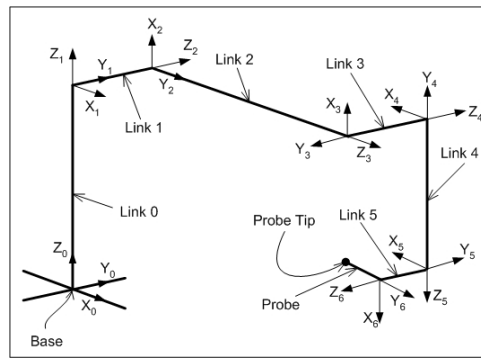
รูปที่ 1 รูปแสดงซียู-ซีเอ็มเอ็ม

รูปที่ 1 แสดงลักษณะโครงสร้างทั่วไปของแขนกลซียู-ซีเอ็มเอ็ม ซึ่งเป็นกลไกแขนแบบข้อต่อหมุนทั้งหมด 6 ข้อต่อ การหาจำลองศาสตร์ของแขนกลซียู-ซีเอ็มเอ็มนั้นสามารถทำได้โดยวิธีการของดีนาวิต-ฮาร์เทนเบอร์ก (Denavit-Hartenberg) ซึ่งเป็นวิธีการเดียวกับที่ใช้ในการหาแบบจำลองศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมที่มีกลไกแบบเปิด (Open Kinematic) เนื่องจากแขนกลซียู-ซีเอ็มเอ็มจะวัดตำแหน่งของปลายหัววัดโดยใช้หลักการทางจลนศาสตร์ ดังนั้นตำแหน่งของปลายหัววัด (Probe Tip) ที่ต้องการจะวัด สามารถคำนวณได้จากข้อมูลการวัดตำแหน่งมุมของข้อต่อทั้ง 6 ของซียู-ซีเอ็มเอ็มแทน ทำให้ค่าความ

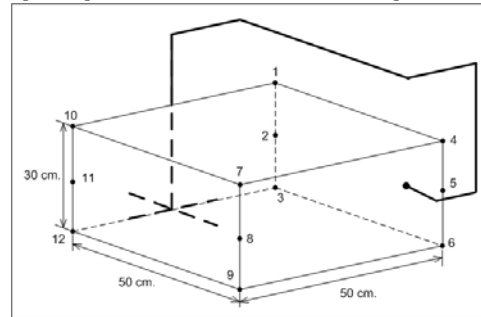
ละเอียด (resolution) ในการวัดตำแหน่งของซียู-ซีเอ็มเอ็ม หรือเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ แบบข้อต่อ 6 แกนนี้ขึ้นอยู่กับค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจรู้ที่ใช้ในการวัดตำแหน่งมุมของแต่ละข้อต่อ และค่าพารามิเตอร์ที่บอกขนาดของแขนกลไก



รูปที่ 2 รูปแสดงหัววัดและแกนหมุน (Z-Axis) ของข้อต่อสุดท้ายเมื่อกำหนดแบบตามแบบแขนกลอุตสาหกรรมทั่วไป



รูปที่ 3 รูปแสดงโครงสร้างโดยประมาณของซียู-ซีเอ็มเอ็ม



รูปที่ 4 รูปแสดงขอบเขตการทำงานโดยประมาณของซียู-ซีเอ็มเอ็ม

ความยาวของแขนกลซียู-ซีเอ็มเอ็มโดยประมาณดังในรูปที่ 3 คือ Link 0 จะมีความยาว 300 มิลลิเมตร Link 1, Link 3, Link 5 และ Probe ยาว 100 มิลลิเมตร ส่วน Link 2 และ Link 4 มีความยาว 600 มิลลิเมตร และเนื่องจากขอบเขตการทำงานของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่ต้องการคือ 50x50x30 เซนติเมตร ดังนั้นในการคำนวณหาความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจรู้ที่ต้องใช้จะคำนวณโดยพิจารณาภายในขอบเขตการทำงานนี้เป็นหลัก ในรูปที่ 4 จะแสดงขอบเขตการทำงานของซียู-ซีเอ็มเอ็มตามที่ได้ระบุไว้ ลักษณะโครงสร้างของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่ใช้ควรที่จะมีความคล่องตัวในการที่จะเข้าถึงชิ้นงานได้จากหลายทิศทาง อีกทั้งถ้าหากข้อต่อสุดท้ายของซียู-ซีเอ็มเอ็มมีลักษณะเช่นเดียวกันกับแขนกลอุตสาหกรรมแบบแกนหมุนทั่วไป แกนหมุนของข้อต่อสุดท้ายนี้ก็จะ

ซ้อนทับกับแกนของหัววัด ทำให้แกนที่หมุนนี้ไม่มีประโยชน์กับการวัด (เพราะจะเป็นแกนที่ทำให้หัววัดหมุนรอบตัวเอง) ดังในรูปที่ 2 ด้วยเหตุผลดังกล่าวงานวิจัยนี้จึงออกแบบซียู-ซีเอ็มเอ็มให้ยังคงเป็นแกนกลที่มี 6 ข้อต่อแต่ละขั้วข้อต่อที่ 6 มาอยู่ในตำแหน่งที่ติดกับข้อต่อที่ 3 ทำให้แกนกลซียู-ซีเอ็มเอ็มมีลักษณะเป็นข้อต่อ 2 ข้อต่อที่ติดกันทั้งหมด 3 คู่ ดังในรูปที่ 3 ข้อต่อที่ย้ายมาติดกับข้อต่อที่ 3 นี้จะทำให้ซียู-ซีเอ็มเอ็มสามารถเข้าถึงชิ้นงานจากทางด้านข้างได้โดยสะดวกกว่าการตั้งแกนแบบแกนกลแบบแกนหมุนทั่วไปมาก ดังแสดงในรูปที่ 4

เนื่องจากซียู-ซีเอ็มเอ็มเป็นแกนกลแบบข้อต่ออนุกรม ดังนั้นค่าความละเอียดของตำแหน่งพิกัดของจุดปลายของหัววัดจึงแตกต่างกันไปตามตำแหน่ง (configuration) ของแกนกล ซึ่งจากการพิจารณาจะพบว่ายิ่งตำแหน่งปลายหัววัดห่างออกไปจากฐานของแกนกลมากเท่าไร ค่าความละเอียดดังกล่าวก็จะยิ่งลดลง ดังนั้นในการคำนวณหาค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้นั้น จะคำนวณจากตำแหน่งที่บริเวณสุดขอบเขตของการวัดได้แสดงเป็นตำแหน่งตัวเลขเอาไว้ในรูปที่ 4

ในการคำนวณหาความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้นั้น จะเริ่มจากการหาตำแหน่งของหัววัดภายในขอบเขตการทำงานที่กำหนดไว้ทั้ง 12 จุด ว่าตำแหน่งใดที่มีค่าความละเอียดของจุดปลายแกนกลมากที่สุดก่อน จากนั้นจึงทำการคำนวณหาความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้จากตำแหน่งแกนกลตำแหน่งนั้น โดยอาศัยการคำนวณแบบทดลองสุ่ม (trial and error) โดยสมมุติค่าความละเอียดของมุมในแต่ละข้อต่อขึ้นมาหนึ่งชุดแล้วจึงคำนวณหาระยะของจุดปลายของแกนกลที่ขยับไปจากตำแหน่งเดิม เมื่อข้อต่อแต่ละข้อต่อขยับไปเท่ากับ ค่าความละเอียดของมุมในแต่ละข้อต่อที่ได้สมมุติขึ้น แล้วจึงตรวจสอบผลที่ได้ว่าได้ตามที่ต้องการแล้วหรือยัง หากยังไม่ได้ก็ให้ทำการคำนวณโดยการสมมุติค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้ขึ้นมาใหม่ โดยค่าความละเอียดของจุดปลายแกนที่ต้องการคือ 30 ไมโครเมตร (ไม่ใช่ 100 ไมโครเมตร เนื่องจากต้องเผื่อค่าความผิดพลาดจากสาเหตุอื่น ๆ อีก) ทั้งนี้ในการสมมุติค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้นั้นจะอาศัยข้อมูลค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่มีขายในท้องตลาดเป็นแนวทาง

จากการคำนวณจะพบว่าค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้ในแต่ละข้อต่อนั้นเป็นดังนี้

ข้อต่อที่	ค่าความละเอียดของอุปกรณ์ตรวจวัด (องศา)
1	0.00024
2	0.00024
3	0.00036
4	0.00036
5	0.0072
6	0.0072

เนื่องจากอุปกรณ์ตรวจวัดที่ต้องใช้ในการวัดตำแหน่งมุมของข้อต่อทั้ง 6 จะต้องมีความละเอียดที่ค่อนข้างสูงเช่นสำหรับข้อต่อที่หนึ่ง และสองจะต้องมีความละเอียดในการวัดตำแหน่งมุมถึง 0.00024 องศา อีกทั้งจะต้องมีขนาดที่ไม่ใหญ่จนเกินไป และราคาไม่สูงนัก อุปกรณ์

ตรวจวัดตำแหน่งมุมที่มีความเหมาะสมสำหรับงานวิจัยนี้ก็คือ อุปกรณ์ตรวจวัดตำแหน่งมุมแบบออปติคัลเอนโค้ดเดอร์ (optical encoder) ชนิดอินครีเมนทัล (incremental)

เอนโค้ดเดอร์ที่มีความละเอียดสูงก็จะมีขนาดใหญ่และราคาสูงตามไปด้วย และถ้าหากต้องการเอนโค้ดเดอร์ที่มีค่าความละเอียดสูงแต่มีขนาดเล็ก ราคา ก็จะยิ่งสูงขึ้นไปกว่าเดิมหลายเท่า ทางเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหาเรื่องนี้ก็คือการใช้ชุดเฟืองทดเพื่อช่วยทดรอบการหมุนให้สูงขึ้น (back drive) ทำให้สามารถวัดตำแหน่งมุมได้ละเอียดขึ้น แต่ปัญหาสำคัญของการใช้ชุดเฟืองทดก็คือ ในชุดเฟืองทดทั่วไปจะมีค่าแบกแลช (backlash) อันเกิดจากช่องว่างภายในระหว่างฟันเฟืองที่ขบกันทำให้ตำแหน่งมุมที่วัดมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ดังนั้นการจะใช้ชุดเฟืองทดช่วยจึงจำเป็นต้องใช้ชุดเฟืองทดที่ไม่มีค่าแบกแลชเกิดขึ้น เราสามารถเลือกเฟืองแบบฮาร์โมนิกไดรฟ์ที่ไม่มีค่าแบกแลชได้ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงจะใช้เอนโค้ดเดอร์ร่วมกับฮาร์โมนิกไดรฟ์เป็นอุปกรณ์ตรวจวัดสำหรับวัดตำแหน่งมุม

ในการพิจารณาเลือกฮาร์โมนิกไดรฟ์นั้น ถ้าหากยังอัตราทดสูงเท่าไร ค่าความละเอียดในการวัดตำแหน่งมุมที่ได้ก็จะมีค่าความละเอียดสูงขึ้นตามไปด้วยทำให้ไม่จำเป็นต้องใช้เอนโค้ดเดอร์ที่มีค่าความละเอียดสูง แต่เนื่องจากลักษณะการใช้งานจะเป็นการขับเคลื่อนเฟืองแบบย้อนกลับ (back drive) ดังนั้นหากฮาร์โมนิกไดรฟ์ที่ใช้มีอัตราทดที่สูง ก็จะทำให้ต้องใช้กำลังในการเคลื่อนที่ข้อต่อต่างๆ ของแกนกลมากทำให้ไม่มีความคล่องตัวในการใช้งาน และสำหรับในส่วนของการเลือกเอนโค้ดเดอร์นั้น เนื่องจากราคาของเอนโค้ดเดอร์ที่มีขายในท้องตลาดนั้นจะแปรผันตามค่าความละเอียดที่วัดได้ในลักษณะที่แบ่งเป็นช่วงอย่างเช่น ช่วงความละเอียดตั้งแต่ 100-1000 PPR จะมีราคาเท่ากันหมดเป็นราคาหนึ่ง แล้วช่วงตั้งแต่ 1024-2000 PPR ก็จะเป็นอีกราคาหนึ่ง ดังนั้นในการเลือกฮาร์โมนิกไดรฟ์และเอนโค้ดเดอร์ที่ใช้จึงต้องพิจารณาถึงค่าความละเอียดของเอนโค้ดเดอร์ที่มีอยู่ในช่วงราคาต่างๆ และอัตราทดที่เหมาะสมของฮาร์โมนิกไดรฟ์ โดยในงานวิจัยนี้จะใช้เกณฑ์ทางด้านราคาเป็นหลักในการตัดสินใจ โดยค่าความละเอียดของเอนโค้ดเดอร์และอัตราทดของฮาร์โมนิกไดรฟ์ที่เลือกใช้จะแสดงอยู่ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ตารางแสดงค่าความละเอียดของเอนโค้ดเดอร์และอัตราทดของฮาร์โมนิกไดรฟ์ที่ใช้ในการวัดตำแหน่งมุมของข้อต่อทั้ง 6

ข้อต่อที่	ค่าความละเอียดของเอนโค้ดเดอร์ (PPR)	อัตราทดของฮาร์โมนิกไดรฟ์	ค่าความละเอียดที่วัดได้ (องศา)
1	40000	1:50	0.00018
2	40000	1:50	0.00018
3	40000	1:50	0.00018
4	40000	1:50	0.00018
5	4096	1:50	0.00176
6	4096	1:50	0.00176

จะเห็นว่าค่าความละเอียดที่ได้จากเอนโค้ดเดอร์และฮาร์โมนิกไดรฟ์มีความละเอียดสูงกว่าที่ต้องการมาก เนื่องจากโดยทั่วไปฮาร์โมนิกไดรฟ์จะเป็นชุดเฟืองที่มีอัตราทดสูงคือเริ่มที่อัตราทด 1:50 และก็มีที่อัตราทด 1:80 ซึ่งเป็นอัตราทดที่สูงมากดังนั้นเพื่อความคล่องตัวในการใช้งาน

ผู้วิจัยจึงได้เลือกใช้ฮาร์ดแวร์ที่มีอัตราทด 1:50 ประกอบกับเอนโค้ดเดอร์ที่ทางผู้วิจัยได้เลือกสำหรับข้อต่อที่ 1-4 โดยใช้เกณฑ์ทางด้านราคา นั้นสามารถที่จะเลือกช่วงความละเอียดได้ตั้งแต่ 14400-40000 PPR ผู้วิจัยจึงเลือกใช้ที่ค่าความละเอียดสูงสุดในช่วงซึ่งก็คือ 40000 PPR ดังนั้นอัตราทดที่ 1:50 จึงเพียงพอและเหมาะสมกับงานวิจัยนี้ที่สุด และสำหรับในส่วนข้อต่อที่ 5-6 ก็ใช้เกณฑ์ในการตัดสินใจเช่นเดียวกันกับข้อต่อที่ 1-4 ทำให้ค่าความละเอียดของมุมที่วัดได้ในแต่ละข้อต่อจึงสูงกว่าที่ต้องการมาก

3. การสอบเทียบซียู-ซีเอ็มเอ็ม (Calibration of CU-CMM)

เนื่องจากเครื่องวัดพิกัต 3 มิติแบบข้อต่อ 6 แกน เป็นเครื่องวัดพิกัต 3 มิติชนิดที่ไม่ได้วัดตำแหน่งพิกัตเป็นระบบพิกัตฉากโดยตรง แต่จะตรวจวัดตำแหน่งจากตำแหน่งการหมุนของแต่ละข้อต่อ แล้วจึงนำมาคำนวณหาตำแหน่งพิกัตของปลายหัววัดในระบบพิกัตฉากด้วยหลักการทางจลนศาสตร์แทน ดังนั้นสิ่งสำคัญสิ่งหนึ่งนอกเหนือไปจากความแม่นยำของเอนโค้ดเดอร์ที่ใช้ที่จะมีผลต่อค่าตำแหน่งพิกัตของปลายหัววัดและค่าความถูกต้องในการวัดก็คือ เมตริกซ์การแปลงที่ใช้ในสมการเพื่อการคำนวณหาตำแหน่งของปลายหัววัด โดยปกติแล้วค่าพารามิเตอร์ (Parameter) ต่างๆ ในเมตริกซ์การแปลง จะได้มาจากแบบ (Drawing) ของแขนกล แต่เนื่องจากในทางปฏิบัติและในทางวิศวกรรม การผลิตชิ้นส่วนต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นผลิตด้วยขั้นตอนกระบวนการใดก็ตาม ก็ไม่สามารถผลิตชิ้นส่วนให้ได้ขนาดตามที่กำหนดในแบบได้ถูกต้องแน่นอนได้เลย ดังนั้นในการผลิตชิ้นส่วนใดๆ ก็ตามย่อมต้องมีการกำหนดพิกัตความเผื่อเอาไว้ด้วยเสมอ โดยหากค่าพิกัตความเผื่อมีค่าที่ต่ำ ชิ้นงานที่ได้ก็จะถือว่ามีความแม่นยำสูง แต่ก็จำเป็นที่จะต้องใช้กระบวนการที่พิเศษขึ้นขึ้นในการผลิตทำให้ค่าการผลิตสูงตามไปด้วย ดังนั้นด้วยเหตุผลที่ได้กล่าวมาแล้วในช่วงต้น ขนาดของชิ้นส่วนต่างๆ ของเครื่องวัดพิกัต 3 มิติ จึงไม่ตรงตามที่ได้เขียนในแบบ และเมื่อนำชิ้นส่วนต่างๆ มาประกอบเข้าด้วยกัน พิกัดขนาดต่างๆ ของเครื่องวัดพิกัต 3 มิติ จึงไม่ตรงตามแบบ อีกทั้งยังไม่สามารถหาค่าพิกัตที่แน่นอนได้โดยง่ายอีกด้วย ดังนั้นหากนำค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ได้จากแบบที่เขียนขึ้นไปสร้างเมตริกซ์การแปลง (Transformation matrix) ก็จะทำให้การคำนวณตำแหน่งพิกัตของปลายหัววัดจากตำแหน่งการหมุนของแต่ละข้อต่อผิดพลาดไป ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงจะขอกล่าวถึงสมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งของเครื่องวัด, หลักการและวิธีในการหาพารามิเตอร์ต่างๆ ของซียู-ซีเอ็มเอ็ม เพื่อนำไปสร้างสมการเพื่อหาตำแหน่งปลายหัววัดที่ถูกต้อง และหลักการที่ใช้ในการสอบเทียบเพื่อหาค่าความถูกต้องของเครื่องวัด ดังนี้คือ

3.1 สมการสำหรับการหาตำแหน่งของซียู-ซีเอ็มเอ็ม

สมการที่ใช้สำหรับหาตำแหน่งของปลายหัววัดของเครื่องวัดพิกัต 3 มิติแบบข้อต่อ 6 แกน นี้จะเป็นระบบสมการที่ทำหน้าที่แปลงเวกเตอร์จากระบบแกนพิกัตหนึ่งไปยังระบบแกนพิกัตอื่นด้วยเมตริกซ์การแปลง (Transformation Matrix) โดยในการหาตำแหน่งของหัววัดนี้ เวกเตอร์ที่จะทำการแปลงจะเป็นเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัตของข้อต่อสุดท้ายซึ่งชี้ไปยังตำแหน่งของปลายหัววัด แล้วทำการแปลงเวกเตอร์นี้ให้ไปเป็น

เวกเตอร์ซึ่งอยู่ในระบบแกนพิกัตที่ตั้งอยู่บนฐานของเครื่องวัดพิกัต 3 มิติ (ในการสร้างเมตริกซ์การแปลงโดยทั่วไปจะตั้งให้เป็นระบบแกนพิกัตที่ ศูนย์ โดยในการวัดตำแหน่งต่างๆ ตำแหน่งที่ได้ก็จะอ้างอิงมาจากระบบแกนนี้ ดังนั้นจะขอเรียกระบบแกนพิกัตนี้ว่า ระบบแกนพิกัตของเครื่อง) แต่เนื่องจากระบบแกนพิกัตของข้อต่อสุดท้ายตั้งอยู่บนข้อต่อซึ่งมีการติดตั้งหัววัดเอาไว้ ดังนั้นไม่ว่าเครื่องวัดพิกัต 3 มิติ จะตั้งอยู่ในตำแหน่ง หรือลักษณะใดก็ตามเวกเตอร์ที่ชี้ไปยังปลายหัววัดก็จะเป็นเวกเตอร์เดิมในระบบแกนพิกัตสุดท้าย ดังนั้นสมการในการหาตำแหน่งจุดปลายของซียู-ซีเอ็มเอ็ม นี้จะประกอบไปด้วยตัวเมตริกซ์การแปลง และเวกเตอร์ชี้ตำแหน่งหัววัด ซึ่งจะต้องสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการหาตำแหน่งของซียู-ซีเอ็มเอ็ม ดังนั้นในหัวข้อนี้จะนำหลักการในการสร้างเมตริกซ์การแปลง และกำหนดเวกเตอร์ชี้ตำแหน่งหัววัด แต่เนื่องจากว่ายังไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ที่แน่นอนของทั้งเมตริกซ์การแปลง และตัวเวกเตอร์ชี้ตำแหน่งหัววัด ในหัวข้อนี้จึงจะสร้างสมการที่ติดอยู่ในรูปของตัวแปรทั้งหมดก่อน แล้วจึงนำไปใช้ในการหาพารามิเตอร์ที่ถูกต้องทั้งหมดในหัวข้อต่อไป ได้ดังนี้

3.1.1 เมตริกซ์การแปลงของซียู-ซีเอ็มเอ็ม

ในการสร้างเมตริกซ์การแปลงของซียู-ซีเอ็มเอ็มจะใช้หลักการตามวิธีการของดีนาวิท-ฮาร์ทเทนเบอร์ก (Denavit-Hartenberg)

ขั้นที่ 1 จากรูปสเก็ตซ์ของซียู-ซีเอ็มเอ็ม ในรูปที่ 1 กำหนดและตั้งระบบแกนพิกัตให้กับทุกข้อต่อ

ขั้นที่ 2 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของแต่ละข้อต่อให้เป็นไปตามข้อกำหนดดังในตารางที่ 2 และ 3 ทั้ง 2 ตาราง ที่แสดงนี้จะเป็นค่าพารามิเตอร์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มทั้งคู่ โดยในตารางที่ 2 จะเป็นค่าพารามิเตอร์ซึ่งนำมาจากแบบ (Drawing) แต่จากที่ได้กล่าวไว้แล้วในตอนต้นว่าค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของเครื่องวัดที่สร้างเสร็จแล้วได้มีค่าผิดเพี้ยนไปจากค่าที่ได้ออกแบบไว้บ้าง ดังนั้นในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงของเครื่องวัด จึงจะต้องหาค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดอยู่ในรูปของตัวแปรเอาไว้ก่อน ดังในตารางที่ 3

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ของเมตริกซ์การแปลงซึ่งนำมาจากแบบ (Drawing)

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d	θ_i
1	$3\pi/2$	0	0	θ_1
2	$3\pi/2$	0	135.000	θ_2
3	$\pi/2$	0	579.272	θ_3
4	$\pi/2$	0	117.250	θ_4
5	$3\pi/2$	0	585.670	θ_5
6	$\pi/2$	0	104.000	θ_6

ตารางที่ 3 ตารางแสดงค่าตัวแปรต่างๆ ของเมตริกซ์การแปลง

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d	θ_i
1	α_0	a_0	d_1	θ_1
2	α_1	a_1	d_2	θ_2
3	α_2	a_2	d_3	θ_3
4	α_3	a_3	d_4	θ_4
5	α_4	a_4	d_5	θ_5
6	α_5	a_5	d_6	θ_6

ขั้นที่ 3 สร้างเมตริกซ์การแปลงของแต่ละข้อต่อจากตัวแปรในตารางที่ 1 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_0 \\ s\theta_1 \cdot c\alpha_0 & c\theta_1 \cdot c\alpha_0 & -s\alpha_0 & -s\alpha_0 \cdot d_1 \\ s\theta_1 \cdot s\alpha_0 & c\theta_1 \cdot s\alpha_0 & c\alpha_0 & c\alpha_0 \cdot d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 \\ s\theta_2 \cdot c\alpha_1 & c\theta_2 \cdot c\alpha_1 & -s\alpha_1 & -s\alpha_1 \cdot d_2 \\ s\theta_2 \cdot s\alpha_1 & c\theta_2 \cdot s\alpha_1 & c\alpha_1 & c\alpha_1 \cdot d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 \cdot c\alpha_2 & c\theta_3 \cdot c\alpha_2 & -s\alpha_2 & -s\alpha_2 \cdot d_3 \\ s\theta_3 \cdot s\alpha_2 & c\theta_3 \cdot s\alpha_2 & c\alpha_2 & c\alpha_2 \cdot d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ s\theta_4 \cdot c\alpha_3 & c\theta_4 \cdot c\alpha_3 & -s\alpha_3 & -s\alpha_3 \cdot d_4 \\ s\theta_4 \cdot s\alpha_3 & c\theta_4 \cdot s\alpha_3 & c\alpha_3 & c\alpha_3 \cdot d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & a_4 \\ s\theta_5 \cdot c\alpha_4 & c\theta_5 \cdot c\alpha_4 & -s\alpha_4 & -s\alpha_4 \cdot d_5 \\ s\theta_5 \cdot s\alpha_4 & c\theta_5 \cdot s\alpha_4 & c\alpha_4 & c\alpha_4 \cdot d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & a_5 \\ s\theta_6 \cdot c\alpha_5 & c\theta_6 \cdot c\alpha_5 & -s\alpha_5 & -s\alpha_5 \cdot d_6 \\ s\theta_6 \cdot s\alpha_5 & c\theta_6 \cdot s\alpha_5 & c\alpha_5 & c\alpha_5 \cdot d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 จากเมตริกซ์การแปลงของแต่ละข้อต่อที่ได้มาในขั้นต้นสามารถนำมาหาเมตริกซ์การแปลงของแกนที่ 6 เทียบกับแกนที่ 0 ได้จากสมการที่ 4.3 ดังนี้

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad [3.1]$$

แต่เนื่องจากระบบสมการเป็นเมตริกซ์ขนาด 4 คูณ 4 คูณกันทั้งหมด 6 ตัว อีกทั้งสมาชิกส่วนใหญ่ภายในเมตริกซ์แต่ละตัวยังติดอยู่ในรูปของสมการตรีโกณมิติอีกด้วย ผลลัพธ์ที่ได้จึงไม่สามารถที่จะจัดให้อยู่ในรูปของสมการที่สั้นและกะทัดรัดได้ ดังนั้นในการคำนวณจึงต้องใช้ระบบสมการที่ยังอยู่ในรูปการคูณกันของเมตริกซ์ทั้ง 6 อยู่

3.1.2 เวกเตอร์ชี้ตำแหน่งปลายหัววัด

เนื่องจากเวกเตอร์ชี้ตำแหน่งของปลายหัววัดนี้เป็นเวกเตอร์คงที่ซึ่งอ้างอิงจากระบบแกนพิกัดสุดท้าย (ระบบแกนพิกัดที่ 6) จึงกำหนดให้เวกเตอร์นี้มีชื่อว่าเวกเตอร์ 6P ดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.9 และกำหนดให้มีพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้

$${}^6P = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}$$

โดยที่ X_p, Y_p, Z_p คือ ระยะในแกน X, Y, และ Z ของปลายหัววัดที่ห่างจากจุดกำเนิดของระบบแกนที่ 6 ตามลำดับ

3.1.3 สมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งของปลายหัววัด

จากเมตริกซ์การแปลง และเวกเตอร์ชี้ตำแหน่งที่สร้างขึ้นสามารถนำมาสร้างสมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งของซียู-ซีเอ็มเอ็ม ได้ดังนี้

$${}^0P = {}^0T_6 \cdot {}^6P \quad [3.2]$$

โดย 0P คือ เวกเตอร์ชี้ตำแหน่งปลายหัววัดซึ่งอ้างอิงจากระบบแกนพิกัดของเครื่อง

ในสมการที่ 3.2 จะประกอบไปด้วยตัวแปรอิสระคือ ค่ามุมของข้อต่อในแต่ละข้อต่อทั้ง 6 ซึ่งได้รวมอยู่ในเมตริกซ์การแปลง และจะมีเวกเตอร์ 0P เป็นตัวแปรตาม

3.2 หลักการและวิธีในการหาค่าพารามิเตอร์ของซียู-ซีเอ็มเอ็ม

ดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้นแล้วว่าค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ ที่จำเป็นต้องรู้เพื่อใช้ในการสร้างเมตริกซ์การแปลงของเครื่องที่สร้างขึ้นจริงกับที่ได้ออกแบบเอาไว้มันจะมีความคลาดเคลื่อนจากกันอยู่เสมอ แต่การที่จะคำนวณตำแหน่งพิกัดของเครื่องวัดได้อย่างถูกต้องแม่นยำได้นั้น จำเป็นที่จะต้องรู้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในเมตริกซ์การแปลงได้อย่างถูกต้องแม่นยำเช่นกัน ซึ่งวิธีหนึ่งที่สามารถกระทำได้ก็คือ การนำชิ้นส่วนต่างๆ ของเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ ที่สร้างและประกอบเข้าด้วยกันเสร็จแล้วมาทำการวัดเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่จำเป็นโดยตรง แต่เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เป็นทั้งค่ามุม และค่าความยาวในแต่ละข้อต่อจะต้องมีความถูกต้องแม่นยำ อีกทั้งด้วยขนาดที่ใหญ่ของตัวเครื่องวัด เครื่องมือวัดที่ใช้จึงจำเป็นต้องเป็นเครื่องมือที่มีลักษณะพิเศษที่ต้องมีทั้งความแม่นยำสูง และมีขอบเขตการทำงานที่ใหญ่เพียงพอที่จะใช้ในการวัดชิ้นส่วนต่างๆ ของเครื่องวัดพิกัดนี้ได้ ถึงแม้เราจะมีเครื่องมือวัดพิกัดดังกล่าวแต่ก็ยังมีความยากลำบากเนื่องจากการผิดพลาดในการประกอบซึ่งวัดได้ยากมาก ดังนั้นจึงไม่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการได้ถูกต้องแม่นยำด้วยวิธีการวัดขนาดจากชิ้นส่วนต่างๆ โดยตรง จึงจำเป็นต้องใช้แนวทางอื่นในการหาแทน โดยแนวทางหนึ่งที่น่าจะมีประสิทธิภาพที่ผู้วิจัยได้คิดขึ้นนั้นจะประกอบไปด้วยการทดลอง และการใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ต้องการจากผลของการทดลองที่ได้ ในหัวข้อนี้จึงจะขออธิบายถึงแนวทางในการหาค่าพารามิเตอร์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่ทางผู้วิจัยได้คิดขึ้นโดยจะแบ่งเนื้อหาออกเป็นหัวข้อย่อยต่างๆ อันได้แก่ ลักษณะของปัญหา, หลักการที่สามารถใช้แก้ปัญหาในลักษณะนี้ และสุดท้ายคือวิธีในการนำหลักการที่ได้มาหาค่าพารามิเตอร์โดยประมาณของซียู-ซีเอ็มเอ็ม

ลักษณะของปัญหา

จากสมการที่ 3.2 ซึ่งประกอบไปด้วยตัวแปรอิสระคือ ค่ามุมทั้ง 6 ของแต่ละข้อต่อ และตัวแปรตามคือ ตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัด หรือเวกเตอร์ 0P ดังนั้นสามารถที่จะเขียนสมการขึ้นใหม่ในรูปที่ง่ายขึ้นเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = F(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \quad [3.3]$$

โดย X_0, Y_0, Z_0 คือ ตำแหน่งปลายหัววัดในแนวแกน X, Y, Z อ้างอิงตามลำดับจากระบบแกนของเครื่อง

q_i คือ ค่ามุมของข้อต่อที่ i

F เป็นฟังก์ชันซึ่งรวมเอาทั้งเมตริกซ์การแปลง และเวกเตอร์

6P เข้าด้วยกัน

แต่เนื่องจากฟังก์ชัน F เป็นการรวมเมตริกซ์การแปลง และเวกเตอร์

6P เข้าด้วยกัน ดังนั้นจึงสามารถหารูปแบบของตัวฟังก์ชันได้แต่ค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ของเครื่องวัดยังคงติดอยู่ในรูปของตัวแปรที่ต้องการทราบค่า แต่เพื่อให้เป็นการทำงาน ลองมาพิจารณาถึงตัวฟังก์ชันทั่วๆ ไปก่อน ดังตัวอย่างเช่น

$$y = f(x) \quad [3.4]$$

เมื่อสามารถทราบค่าของตัวแปร x และรู้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันแบบไหนสัมประสิทธิ์ต่างๆ ทั้งหมดภายในฟังก์ชันมีค่าเป็นเท่าไรบ้าง ก็จะสามารถหาค่าของตัวแปร y ได้ ดังนั้นในทางกลับกันหากทราบค่าของตัวแปร x และค่าของตัวแปร y ซึ่งต่อจากนี้ไปจะขอเรียกว่า ชุดข้อมูล ก็สามารถที่จะนำมาหาค่าของสัมประสิทธิ์ต่างๆ ภายในฟังก์ชัน f ได้เช่นกัน เพียงแต่จะต้องมีจำนวนชุดข้อมูลอย่างน้อยเท่ากับจำนวนสัมประสิทธิ์ที่ต้องการหาค่า ทั้งนี้หลักการที่ใช้ในการแก้ปัญหาประเภทนี้ก็มียุหลายวิธีด้วยกัน แตกต่างกันไปตามลักษณะของปัญหา ตัวอย่างเช่น หากลักษณะปัญหาเป็นแบบเชิงเส้นดังในสมการที่ 3.5

$$y = ax + b \quad [3.5]$$

จำนวนชุดข้อมูลที่ต้องมีสำหรับการหาค่าของ a และ b คือ 2 ชุดเท่านั้น อีกทั้งยังสามารถที่จะหาค่าของ a และ b ได้โดยตรงจากการแก้สมการด้วยวิธีทั่วๆ ไปซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad [3.6]$$

$$b = \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 - X_1} \quad [3.7]$$

แต่ถ้าลักษณะปัญหาเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น และจำนวนสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่ามีจำนวนมาก การแก้ปัญหาด้วยวิธีการแก้สมการในเชิงวิเคราะห์ดังในตัวอย่างข้างต้นอาจจะไม่สามารถกระทำได้ ดังนั้นโดยทั่วไปการแก้ปัญหาลักษณะดังกล่าวจึงมักจะแก้ระบบสมการโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหา คราวนี้กลับมาพิจารณาถึงตัวฟังก์ชันที่ใช้ในการหาตำแหน่งของซียู-ซีเอ็มเอ็ม (สมการที่ 3.3)

ตัวแปรต้นหรือ ตัวแปรอิสระคือ ค่ามุมทั้ง 6 อันได้แก่

$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$

ตัวแปรตามคือ ค่าพิกัดตำแหน่งของเครื่องวัดอันได้แก่ X_0, Y_0 และ Z_0

จากสมการที่ 3.3 จะเห็นว่าตัวแปรตามมีถึง 3 ตัว และตัวเมตริกซ์การแปลงนอกจากจะให้ค่าตำแหน่งพิกัดทั้ง 3 แล้ว ตัวเมตริกซ์ยังสามารถให้ค่าตำแหน่งการหมุนของหัววัดได้อีกด้วย ดังนั้นในความเป็นจริงสมการที่ 3.3 นี้จึงมีตัวแปรตามถึง 6 ตัว คือค่าตำแหน่งพิกัดทั้ง 3 และค่าตำแหน่งการหมุนทั้ง 3 ตัวเช่นกัน แต่เนื่องจากฟังก์ชัน F เป็นสมการเมตริกซ์ดังนั้นสมการที่ 3.3 จึงเปรียบเสมือนระบบสมการที่มีสมการทั้งหมด 6 สมการเพียงแต่สัมประสิทธิ์ของทั้ง 6 สมการจะมี

ความสัมพันธ์กันอยู่ นอกจากนี้เนื่องจากซียู-ซีเอ็มเอ็ม มีค่าองศาอิสระเท่ากับ 6 ดังนั้นที่ตำแหน่งพิกัดเดียวกันก็อาจจะมีการกำหนดค่าตำแหน่งการหมุนที่แตกต่างกันได้มากมาย (ปัญหา non-unique solution ของ Inverse kinematics) ทำให้ถ้าหากพิจารณาฟังก์ชัน F เฉพาะตัวแปรตามที่เป็นค่าตำแหน่งพิกัดทั้ง 3 และตัวแปรต้นที่เป็นค่ามุมทั้ง 6 แล้วฟังก์ชัน F ก็จะไม่เป็นฟังก์ชัน 1 ต่อ 1 ดังนั้นในกรณีที่สามารถรู้ได้แต่เพียงค่าของตำแหน่งพิกัด และค่ามุมทั้ง 6 แต่ไม่ทราบค่าตำแหน่งการหมุน จึงไม่สามารถที่จะหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของสมการได้ด้วยการแก้สมการทั้งในเชิงวิเคราะห์ หรือด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

วิธีและหลักการแก้ปัญหา

เนื่องจากการวัดตำแหน่ง F การหมุนของหัววัด ไม่สามารถกระทำได้โดยง่าย ดังนั้นในการทดลองเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน F จึงสามารถที่จะหาชุดข้อมูลได้เพียงค่าตำแหน่งพิกัดทั้ง 3 และค่าตำแหน่งมุมของข้อต่อทั้ง 6 เท่านั้น อีกทั้งฟังก์ชัน F ยังเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นอีกด้วย การจะหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันลักษณะเช่นนี้ และด้วยข้อมูลที่มีเพียงจำกัด วิธีการหนึ่งที่เหมาะสมก็คือ การใช้ระเบียบวิธีการถดถอยแบบน้อยสุด (least square regression) โดยใช้แนวทางของวิธีการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear Regression) ด้วยเหตุผลต่างๆ ดังต่อไปนี้

ตัวฟังก์ชัน F เป็นฟังก์ชันซึ่งทราบโครงสร้าง มีเพียงแต่สัมประสิทธิ์ภายในเท่านั้นที่ยังไม่ทราบค่า

ตัวฟังก์ชัน F เป็นเหมือนระบบสมการที่มีสมการทั้งหมด 3 สมการ (สนใจเพียงสมการที่ให้ค่าตำแหน่งพิกัดทั้ง 3 เท่านั้น) โดยที่สัมประสิทธิ์ภายในของทั้ง 3 สมการมีความสัมพันธ์กันอยู่ การทำการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้น จะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ของทั้งระบบไปพร้อมๆ กันได้ ดังนั้นไม่ว่าสัมประสิทธิ์ของสมการทั้ง 3 จะมี หรือไม่มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ก็สามารถที่จะหาค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นได้

เนื่องจากการทำการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้น สามารถที่จะใช้ข้อมูลจำนวนที่มากเท่าไรก็ได้ (อย่างน้อยต้องมีมากกว่าจำนวนตัวไม่รู้ค่าที่ต้องการหา) ดังนั้นในการหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของฟังก์ชัน F ที่สามารถหาได้เพียงแต่ค่าตำแหน่งพิกัดเท่านั้น เราสามารถที่จะหาค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นได้โดยใช้จำนวนข้อมูลที่ครอบคลุม และมากเพียงพอในการทำการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้น เพื่อชดเชยข้อมูลตำแหน่งการหมุนที่ไม่ทราบค่า เพื่อความเข้าใจจะขอยกตัวอย่างเช่นในการทดลองจริง ที่ตำแหน่งพิกัดตำแหน่งหนึ่ง สามารถที่จะใช้แขนกลซียู-ซีเอ็มเอ็มวัดตำแหน่งนี้ได้ด้วยตำแหน่งการหมุนของปลายหัววัดที่ต่างๆ กันได้หลายค่า เมื่อนำข้อมูลเหล่านี้ไปคำนวณเพื่อหาเมตริกซ์การแปลง ข้อมูลเหล่านี้ก็จะชดเชยข้อมูลตำแหน่งการหมุนที่ไม่ทราบค่าได้ เนื่องจากที่ตำแหน่งพิกัดค่าหนึ่งไม่ว่าหัววัดจะมีตำแหน่งการหมุนอย่างไรก็จะมีเมตริกซ์การแปลงตัวเดียวกัน

ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงจะขออธิบายถึงหลักการของการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้นอย่างโดยประมาณ ดังต่อไปนี้

หลักการสำคัญของการทำการถดถอยไม่ว่าจะเป็นแบบเชิงเส้นหรือแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Linear or Nonlinear Regression) คือ การหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการที่ทำให้ผลรวมกำลังสองของเศษตกค้าง

(The sum of the squares of the residuals) มีค่าน้อยที่สุดตั้งในสมการต่อไปนี้

$$\min_x \sum_{i=1}^n (F(x, xdata_i) - ydata_i)^2 \quad [3.8]$$

โดย x คือ ค่าพารามิเตอร์ หรือสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่ต้องการหาค่า

$xdata_i$ คือ ตัวแปรต้นของฟังก์ชันจากข้อมูลชุดที่ i

$ydata_i$ คือ ตัวแปรตามของฟังก์ชันที่ได้จากการวัดข้อมูลจริงชุดที่ i

เศษตกค้างในสมการที่ 3.8, $F(x, xdata_i) - ydata_i$, เกิดจากค่าผิดพลาดระหว่างค่าของตัวแปรตาม $ydata_i$ ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการวัดจากระบบจริงกับค่าของตัวแปรตามซึ่งได้จากการคำนวณจากฟังก์ชัน F (ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ภายในเป็น x) โดยใช้ค่าของตัวแปรต้น $xdata_i$ เดียวกัน (จากนี้จะขอเรียกค่าตัวแปรตาม $ydata_i$ ว่าเป็นค่าที่วัดได้ตัวที่ i , เรียกตัวแปรต้น $xdata_i$ ว่าเป็นตัวแปรต้นที่ i และจะเรียก $xdata_i$ กับ $ydata_i$ ว่าเป็นข้อมูลชุดที่ i)

ในการหาค่าพารามิเตอร์ที่สามารถลดเศษตกค้างได้นั้นจำเป็นที่จะต้องอาศัยการคำนวณแบบทำซ้ำ (iteration) หลายๆ ครั้งโดยจะต้องมีการให้ค่าเริ่มต้นแก่พารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อเริ่มการคำนวณ ซึ่งมักจะพบว่าในการที่จะประสบผลสำเร็จในการหาค่าตอบนั้น สิ่งสำคัญอย่างมากก็คือการเดาค่าเริ่มต้นของพารามิเตอร์เหล่านั้นเอง

แนวทาง หรืออัลกอริทึม (algorithm) ในการที่จะลดผลรวมกำลังสองของเศษตกค้างลงได้นั้นมีมากมาย วิธีของเกาส์-นิวตัน (Gauss-Newton method) ก็เป็นวิธีการพื้นฐานวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้ในการคำนวณได้ โดยกฎแฉกสำคัญของวิธีการนี้ก็คือ การใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) เพื่อหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ต้องการ และเปลี่ยนฟังก์ชันไปให้อยู่ในรูปของสมการแบบเชิงเส้นแทน จากนั้นจึงใช้ทฤษฎีกำลังสองน้อยสุด (least square theory) เพื่อหาค่าโดยประมาณของค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการใหม่ที่เคลื่อนไปในทิศทางที่จะลดเศษตกค้างลง [4]

เพื่อที่จะอธิบายถึงวิธีการทำงานของอัลกอริทึมนี้ ขั้นแรกความสัมพันธ์ระหว่างสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นกับข้อมูลที่วัดได้ สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$y_i = f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m) + e_i \quad [3.9]$$

โดย y_i คือ ค่าของตัวแปรตามที่วัดได้จากระบบจริง

e_i คือ ค่าความผิดพลาดแบบสุ่ม (random error)

$f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m)$ คือ ฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรต้น x_i และมี $a_0, a_1, \dots, a_m$ เป็นพารามิเตอร์ของฟังก์ชัน

เพื่อความสะดวก จะเขียนสมการที่ 3.9 ให้อยู่ในรูปแบบอย่างย่อโดยการละพารามิเตอร์ของฟังก์ชันทั้งปวงดังนี้

$$y_i = f(x_i) + e_i \quad [3.10]$$

ฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปการประมาณอันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์รอบๆ ค่าพารามิเตอร์ ดังตัวอย่างในกรณีของพารามิเตอร์ 2 ตัวดังนี้

$$f(x_i)_{j-1} = f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1 \quad [3.11]$$

โดย j คือ ค่าเริ่มต้น (initial guess)

$j+1$ คือ ค่าจากการทำนาย (prediction)

$$\Delta a_0 = a_{0,j-1} - a_{0,j}$$

$$\Delta a_1 = a_{1,j-1} - a_{1,j}$$

สมการที่ 5.11 สามารถที่จะแทนค่าลงในสมการที่ 3.10 ได้ดังนี้

$$y_i - f(x_i)_j = \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1 + e_i \quad [3.12]$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมตริกซ์

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{Z}_{j\text{th}}^T \mathbf{a} + \mathbf{e} \quad [3.13]$$

โดยที่ $\mathbf{Z}_{j\text{th}}$ คือ เมตริกซ์ของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่คำนวณจากค่าเริ่มต้น, j

$$\mathbf{Z}_{j\text{th}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_0} & \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_0} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial a_0} & \frac{\partial f_M}{\partial a_1} \end{bmatrix}$$

n เป็นจำนวนข้อมูล และ $\frac{\partial f_i}{\partial a_k}$ คืออนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่เทียบ

กับพารามิเตอร์ตัวที่ k เมื่อคำนวณจากข้อมูลชุดที่ i ส่วนเวกเตอร์ $\Delta \mathbf{a}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าความต่างระหว่างค่าจากการวัดกับค่าที่ได้จากฟังก์ชัน

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \vdots \\ y_M - f(x_M) \end{bmatrix}$$

และเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่เก็บค่าการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์เอาไว้

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

โดยการประยุกต์ทฤษฎีกำลังสองน้อยสุดแบบเชิงเส้นเข้ากับสมการที่ 3.13 ทำให้ได้ว่า

$$\mathbf{Z}_{j\text{th}}^T \mathbf{Z}_{j\text{th}} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{Z}_{j\text{th}}^T \Delta \mathbf{a} \quad [3.14]$$

ดังนั้นในการคำนวณจึงประกอบไปด้วยการแก้สมการที่ 3.14 เพื่อหาค่าของ $\Delta \mathbf{a}$ ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาค่าของพารามิเตอร์ค่าใหม่ที่ใช้ในการคำนวณในครั้งต่อไปได้ดังนี้

$$a_{0,j-1} = a_{0,j} + \Delta a_0 \quad [3.15]$$

และ

$$a_{1,j-1} = a_{1,j} + \Delta a_1 \quad [3.16]$$

จากนั้นขั้นตอนต่างๆ ที่ได้กล่าวมานี้ก็จะถูกนำมาคำนวณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งผลลัพธ์เข้าสู่ค่าตอบที่ต้องการ โดยอาจจะพิจารณาจากค่าของ

$$|e|_k = \left| \frac{a_{k,j-1} - a_{k,j}}{a_{k,j-1}} \right| 100\% \quad [3.17]$$

ว่าอยู่ในช่วงเกณฑ์ที่ต้องการแล้วหรือยัง เมื่อเข้าสู่เกณฑ์ที่ต้องการแล้วจึงหยุดการคำนวณ

ปัญหาใหญ่ในการทำซ้ำด้วยวิธีของเกาส์-นิวตัน ที่ได้อธิบายไปแล้วข้างต้นก็คือ ความยากลำบากในการหาฟังก์ชันซึ่งเป็นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่ต้องการ อย่างไรก็ตามในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ค่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่ต้องการนั้นสามารถที่จะคำนวณได้โดยการประมาณค่าจากสมการ

$$\frac{\partial f}{\partial a_k} \approx \frac{f(x; a_0, k, a_k + h, k, a_n) - f(x; a_0, k, a_k, k, a_n)}{h} \quad [3.18]$$

โดยที่ h คือ ช่วงของการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนด

วิธีของเกาส์-นิวตันที่ใช้ในการทำการถดถอยนี้อาจจะมีข้อบกพร่องบางประการ เช่น ค่าตอบอาจจะลู่เข้าช้า, ทิศทางของการทำซ้ำมักจะเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา และผลการคำนวณอาจจะไม่ลู่เข้าสู่ค่าตอบเสมอไป

แต่ก็ได้มีการดัดแปลงวิธีการของเกาส์-นิวตัน เพื่อแก้ข้อบกพร่องต่างๆ ที่มีโดย, Booth and Peterson, 1958; Hartley, 1961, นอกจากวิธีการของเกาส์-นิวตันแล้ว ยังมีระเบียบวิธีอื่นๆ อย่างเช่น สตีปเปสแตสเซนส์ (steepest descent) และ เลเวนเบิร์ก-มาร์ควาร์ด (Levenberg-Marquardt) ที่ได้พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น

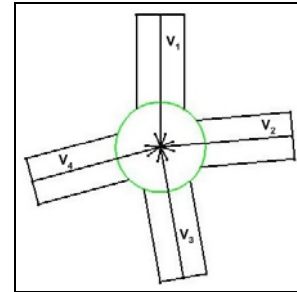
วิธีนำหลักการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้นมาใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์จริง

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ในการทำการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้นจำเป็นที่จะต้องรู้ข้อมูลของระบบจริงซึ่งในที่นี้ก็คือ ค่าตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัด และค่าตำแหน่งมุมของแต่ละข้อต่อที่สัมพันธ์กับค่าตำแหน่งพิกัดที่วัดได้นั้น สำหรับค่าตำแหน่งมุมของแต่ละข้อต่อนั้นสามารถหาได้จากเอนโคเดอร์ที่ติดอยู่ในแต่ละข้อต่อได้ แต่ในส่วนของตำแหน่งของปลายหัววัดนั้นจำเป็นที่จะต้องอาศัยเครื่องวัดพิกัด 3 มิติแบบพิกัดฉากที่ทางห้องปฏิบัติการมีอยู่ช่วยในการหาตำแหน่งดังนี้

เนื่องจากสิ่งที่ต้องการรู้คือ ตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัดในระบบพิกัดฉากที่อ้างอิงมาจากระบบแกนพิกัดที่ฐาน ดังนั้นในการสอบเทียบจึงไม่สามารถที่จะใช้อุปกรณ์ประเภทบล็อกเกจ (block gauge) หรือชิ้นงานมาตรฐานที่รู้ค่าพิกัดขนาดต่างๆ ที่แม่นยำแน่นอนได้ เพราะอุปกรณ์ดังกล่าวเหล่านี้ใช้อ้างอิงได้เพียงค่าพิกัดทางขนาดต่างๆ เช่น ความยาว, เส้นผ่าศูนย์กลางของรู และมุมระหว่างระนาบ ไม่สามารถที่จะใช้ในการอ้างอิงค่าตำแหน่งที่เป็นจุดพิกัดได้

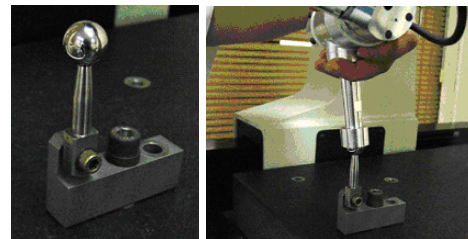
หากทำการพิจารณาจากเลขาคณิต (geometry) ของทรงกลม จะพบว่าเมื่อนำทรงกระบอกมาครอบบนทรงกลมไม่ว่าจะเป็นทิศทางใดระยะทางจากทรงกระบอกไปยังจุดศูนย์กลางของทรงกลมจะยังคงเท่า

เดิมเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 5 เวกเตอร์ V_1, V_2, V_3 และ V_4 เป็นเวกเตอร์ที่ชี้จากจุดกึ่งกลางทรงกระบอกไปยังจุดศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งจะเห็นว่าเวกเตอร์ทั้ง 4 ตัวจะเป็นเวกเตอร์ที่มีทั้งขนาดและทิศทางเดียวกัน เมื่ออ้างอิงกับทรงกระบอก ดังนั้นหากนำหัววัดของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่มีลักษณะเป็นทรงกระบอกมาครอบลงบนทรงกลมที่มีความแม่นยำทางรูปทรง และขนาดสูง และรู้ค่าตำแหน่งของจุดศูนย์กลางได้อย่างแม่นยำ ไม่ว่าจะครอบปลายหัววัดลงบนทรงกลมนี้ในทิศทางใดก็ตาม ก็จะได้เวกเตอร์คงที่ตัวหนึ่งที่ยังคงจากหัววัดชี้ไปยังจุดศูนย์กลางของทรงกลมนี้เสมอ ดังนั้นจึงสามารถที่จะใช้ค่าตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางของทรงกลมนี้ในการอ้างอิงเป็นค่าตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัดเพื่อใช้ในการสอบเทียบได้



รูปที่ 5 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์บนทรงกระบอกกับจุดศูนย์กลางทรงกลม

ด้วยเหตุผลต่างๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในขั้นต้น ดังนั้นในการทดลองเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มจึงจะใช้ทรงกลมสอบเทียบ (calibration sphere) ดังแสดงในรูปที่ 6 ในการอ้างอิงค่าตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัด

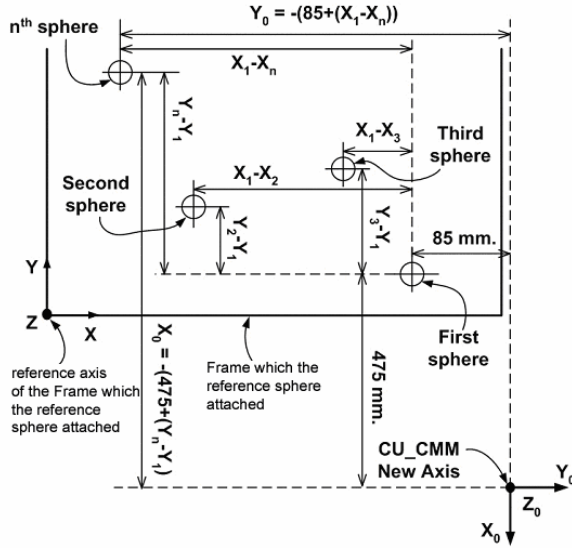


รูปที่ 6 รูปแสดงทรงกลมสอบเทียบของซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ป

ในการทดลองนี้ตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางของทรงกลมสอบเทียบจะวางอยู่บนตำแหน่งที่เรารู้ค่าแน่นอนซึ่งได้ออกแบบและกำหนดเทียบกับฐานของแท่นยึดทรงกลมสอบเทียบ ตำแหน่งดังกล่าวนี้ได้ออกแบบไว้ให้มีความถูกต้องค่อนข้างสูงมาก แต่ฐานของแท่นทรงกลมสอบเทียบยึดติดอยู่กับแท่นของอุปกรณ์วัดไม่ใช่เป็นแท่นเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 7 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการย้ายแกนข้อมูล ซึ่งจะกล่าวต่อไป

ใช้ซียู-ซีเอ็มเอ็มมาทำการวัดตำแหน่งของทรงกลมนี้โดยการครอบหัววัดซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกรวย (ใช้หัววัดที่เป็นทรงกรวยแทนเนื่องจากการนำทรงกรวยมาครอบลงบนทรงกลมจะมีความสนิทและแน่นนอนกว่าการใช้ทรงกระบอก) ลงบนทรงกลมสอบเทียบพร้อมทั้งจดบันทึกค่าตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางทรงกลมนั้น และค่าตำแหน่งมุมของแต่ละข้อต่อของซียู-ซีเอ็มเอ็มในขณะนั้น ซึ่งเป็นค่าของตัวแปร

ตาม และตัวแปรต้น ที่ได้จากการทดลองจริง สามารถนำไปใช้ในการทำการถดถอยเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ จากนั้นก็เปลี่ยนตำแหน่งของทรงกลมสอบเทียบไปยังตำแหน่งต่างๆ ที่อยู่ในช่วงที่ต้องการทำการสอบเทียบ แล้วทำการวัดค่าต่างๆ ที่ได้จากมาในขั้นตอนในทุกตำแหน่งของทรงกลมสอบเทียบ ก็จะทำให้ได้ชุดข้อมูลของตัวแปรต้น และตัวแปรตามที่สามารถนำไปใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ได้ แต่เนื่องจากค่าตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางทรงกลมที่เราวัดค่านี้จะอยู่ในระบบพิกัดจาก (x,y,z) เทียบกับพิกัดของแท่นที่ทรงกลมสอบเทียบยึดติดอยู่ ดังนั้นข้อมูลตำแหน่งจุดศูนย์กลางทรงกลมที่วัดได้ จะต้องทำการแปลงให้มาเป็นระบบแกนพิกัดของซียู-ซีเอ็มเอ็มก่อนนำไปคำนวณ



รูปที่ 7 รูปแสดงความสัมพันธ์ของระบบแกนของซียู-ซีเอ็มเอ็มกับแท่นที่ลูกทรงกลมสอบเทียบติดตั้งอยู่

ในการย้ายระบบแกนนี้ จะกำหนดระบบแกนพิกัดขึ้นมาใหม่อีกระบบหนึ่งที่ยังไม่รู้ตำแหน่งที่แน่นอน (ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ) ที่ใช้ในการเทียบแกนจากแกนศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มมายังระบบแกนนี้จะติดเป็นตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด) เพื่อใช้ในการย้ายข้อมูลที่ได้ให้มาอยู่ในระบบแกนนี้แทนก่อน แล้วรวมระบบแกนนี้เข้าไปอยู่ในระบบสมการที่ใช้ในการหาค่าตำแหน่งพิกัดจุดปลายหัววัดของซียู-ซีเอ็มเอ็ม และใช้สมการใหม่นี้ในการทำการถดถอยแทน (Regression) ดังนั้นเมื่อทำการสอบเทียบเสร็จแล้ว ค่าตำแหน่งพิกัดต่างๆ ที่ซียู-ซีเอ็มเอ็มวัดได้ก็จะอ้างอิงมาจากระบบแกนที่สร้างขึ้นใหม่นี้ แทนที่จะเป็นระบบแกนที่ศูนย์ ของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่ได้กำหนดขึ้น

พิจารณาสมการที่ 3.2 อีกครั้ง

$${}^0P = {}^0T \cdot {}^6P \quad [3.2]$$

เวกเตอร์ 0P เป็นเวกเตอร์ชี้ตำแหน่งของปลายหัววัดซึ่งอ้างอิงจากระบบแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็ม หากต้องการย้ายระบบแกนจากระบบแกนของซียู-ซีเอ็มเอ็มนี้ไปยังระบบแกนที่สร้างขึ้นใหม่ จะต้องคูณเมตริกซ์การแปลงอีกหนึ่งเทอมดังนี้ [3]

$${}^6P = {}^6T \cdot {}^0T \cdot {}^6P \quad [3.19]$$

โดย 6T คือเมตริกซ์การแปลงที่ใช้ในการย้ายระบบแกนจากระบบแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มไปเป็นระบบแกนที่สร้างขึ้นใหม่

เมตริกซ์การแปลง 6T จะประกอบด้วยพารามิเตอร์ต่างๆ ดังต่อไปนี้

$${}^6T = \begin{bmatrix} {}^6R & {}^6P_{0Origin} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.20]$$

โดย

$${}^6R = \begin{bmatrix} Cb & Cg & -Cb & Sg & Sb \\ Sa & Sb & Cg & +Ca & Sg & -Sa & Sb & Sg & +Ca & Cg & -Sa & Cb \\ -Ca & Sb & Cg & +Sa & Sg & Ca & Sb & Sg & +Sa & Cg & Ca & Cb \end{bmatrix}$$

$${}^6P_{0Origin} = \begin{bmatrix} X_{0Origin} \\ Y_{0Origin} \\ Z_{0Origin} \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ 6R เป็นเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่งการหมุนของระบบแกนของซียู-ซีเอ็มเอ็มเทียบกับระบบแกนที่ตั้งขึ้นใหม่ โดยตั้งตามระบบมุมของออยเลอร์ (Euler angle) ซึ่งจะประกอบด้วยพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า 3 ตัวคือ a, b และ g สำหรับเวกเตอร์ ${}^6P_{0Origin}$ คือเวกเตอร์ที่ชี้ตำแหน่งจุดกำเนิดของระบบแกนของซียู-ซีเอ็มเอ็มอ้างอิงจากระบบแกนใหม่ที่ประกอบไปด้วยพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าอีก 3 ตัวคือ $X_{0Origin}$, $Y_{0Origin}$ และ $Z_{0Origin}$ ซึ่งเป็นระยะห่างของจุดกำเนิดของระบบแกนซียู-ซีเอ็มเอ็มในแนวแกนต่างๆ อ้างอิงจากระบบแกนใหม่จากการย้ายระบบแกนซียู-ซีเอ็มเอ็มไปยังระบบแกนใหม่นี้ทำให้ระบบสมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งจุดปลายของหัววัดมีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเพิ่มขึ้นมาอีก 6 ตัวแต่ทำให้ไม่จำเป็นต้องรู้ตำแหน่งพิกัดของซียู-ซีเอ็มเอ็มเทียบกับระบบแกนพิกัดที่ตั้งขึ้นใหม่ถูกต้องแม่นยำนักเนื่องจากตำแหน่งของซียู-ซีเอ็มเอ็มเมื่อเทียบกับตำแหน่งของระบบแกนใหม่ที่สร้างขึ้นแล้วนั้นได้ถูกแปลงให้เป็นเมตริกซ์การแปลง 6T ซึ่งสามารถหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ได้จากการทดลอง และทำการถดถอยระบบสมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งทั้งหมด

เนื่องจากระบบแกนใหม่ที่สร้างขึ้นนี้จะกลายเป็นระบบแกนที่ใช้ในการอ้างอิงค่าตำแหน่งพิกัดที่เครื่องซียู-ซีเอ็มเอ็มวัดได้แทนระบบแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็ม ดังนั้นตำแหน่งที่ระบบแกนใหม่นี้ตั้งอยู่จึงควรที่จะอยู่ในตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับตำแหน่งแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็ม และเพื่อให้การย้ายข้อมูลจากระบบแกนของแท่นที่ทรงกลมอ้างอิงยึดติดอยู่มาอยู่ในระบบแกนใหม่นี้ทำได้โดยไม่ยากนักจึงจะตั้งให้ตำแหน่งหมุนของระบบแกนใหม่นี้ซ้อนทับกับระบบแกนของแท่นที่ทรงกลมอ้างอิงยึดติดอยู่ ดังนั้นระบบแกนใหม่ที่ตั้งขึ้นมานี้จะมีจุดกำเนิดอยู่ในตำแหน่งใกล้เคียงกับจุดกำเนิดของระบบแกนศูนย์ แต่จะมีตำแหน่งการหมุนของระบบแกนซ้อนทับกับตำแหน่งการหมุนของระบบแกนของแท่นที่ทรงกลมอ้างอิงยึดติดอยู่ ดังนั้นในการทำการสอบเทียบจึงจะติดตั้งซียู-ซีเอ็มเอ็มให้ตำแหน่งแกนศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มมีตำแหน่งการหมุนที่ใกล้เคียงกับของระบบแกนของแท่นที่ทรงกลมอ้างอิงยึดติดอยู่ เพื่อให้ระบบแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มมีตำแหน่งการหมุนที่ใกล้เคียงกับของระบบแกนที่ตั้งขึ้นใหม่นี้

ด้วยเหตุนี้ในการย้ายข้อมูลที่อยู่ในระบบแกนของแท่นที่ทรงกลมอ้างอิงยึดติดอยู่ให้มาอยู่ในระบบแกนใหม่ที่ตั้งขึ้นนี้จึงสามารถทำได้โดยเพียงวัดระยะโดยประมาณในทั้ง 3 แนวแกน (x, y และ z) ระหว่างจุดกำเนิดของระบบแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มกับจุดศูนย์กลางของทรงกลมสอบเทียบที่ทำการทดลองเป็นตำแหน่งแรก แล้วจึงกำหนดให้ค่าระยะทางที่วัดได้ทั้ง 3 แนวแกนนี้เป็นค่าตำแหน่งพิกัดของทรงกลมตำแหน่งแรกนี้ ในระบบพิกัดของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่ตั้งขึ้นใหม่ได้เลย จากนั้นจึงย้ายระบบพิกัดของตำแหน่งทรงกลมที่เหลือมายังระบบพิกัดใหม่ของซียู-ซีเอ็มเอ็มโดยอ้างอิงมาจากทรงกลมตำแหน่งแรก

ดังนั้นจากที่ได้กล่าวมาทั้งหมด สมการที่ 3.19 จะเป็นสมการที่ผู้วิจัยใช้ในการทำการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้นกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองจริง โดยข้อมูลที่ต้องการจากการทดลองจะประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือ ค่าตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัดซึ่งจะใช้ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของทรงกลมสอบเทียบเป็นค่าอ้างอิงแทน และค่าตำแหน่งมุมของข้อต่อทั้ง 6 ของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่คู่กับข้อมูลของค่าพิกัดของหัววัดนั้น ส่วนค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งจะมีทั้งหมด 30 ตัวอันประกอบไปด้วยค่าพารามิเตอร์ของเมตริกซ์การแปลงของซียู-ซีเอ็มเอ็ม จำนวน 24 ตัวอันได้แก่ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28}, a_{29}, a_{30}$ โดยพารามิเตอร์ $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, x_p, y_p, z_p, d_{q1}, d_{q2}, d_{q3}, d_{q4}, d_{q5}$ และ d_{q6} จะเป็นค่าความเหลื่อม (offset) ระหว่างตำแหน่งศูนย์จริงของข้อต่อของซียู-ซีเอ็มเอ็มกับตำแหน่งศูนย์ของเอนโค้ดเดอร์ในแต่ละข้อต่อ ส่วนพารามิเตอร์ที่เหลืออีก 6 ตัวจะเป็นของเมตริกซ์การแปลงที่ใช้ในการย้ายแกนดังที่ได้กล่าวไปแล้วซึ่งจะประกอบไปด้วย $a, b, g, x_{0Origin}, y_{0Origin}$ และ $z_{0Origin}$

อันที่จริงแล้วพารามิเตอร์ของเมตริกซ์การแปลงของซียู-ซีเอ็มเอ็มนั้น ยังจะต้องมี a_0, a_0 และ d_1 แต่เนื่องจากค่าพารามิเตอร์เหล่านี้เป็นของระบบแกนที่ศูนย์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดให้ระบบแกนนี้ซ้อนทับกับระบบแกนที่หนึ่งดังแสดงไว้ในรูปที่ 1 ทำให้ค่าของ a_0, a_0 และ d_1 มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมดและไม่จำเป็นต้องทำการถดถอยเพื่อหาค่าของพารามิเตอร์เหล่านี้อีก

ในการทำการถดถอยนั้น เนื่องจากโปรแกรมแมทแลบ (Matlab) มีฟังก์ชันที่สามารถทำการถดถอยแบบไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นผู้วิจัยจึงจะใช้ฟังก์ชันในโปรแกรมแมทแลบเป็นหลักในการทำการถดถอย ซึ่งในที่นี้ก็คือฟังก์ชัน lsqcurvefit ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันสำหรับแก้ปัญหา non-linear least squares fitting (nonlinear curve-fitting) โดยใช้การถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุดดังในสมการ

$$\min_x \frac{1}{2} \|F(x, xdata) - ydata\|_2^2 = \frac{1}{2} \| (F(x, xdata) - ydata) \|^2 \quad [3.21]$$

ฟังก์ชัน lsqcurvefit จะรับค่าตัวแปรต้น, $xdata$ และค่าตัวแปรตามที่ได้จากระบบจริง (observed output), $ydata$ เป็นค่าอินพุต (input) ของฟังก์ชัน แล้วจึงจะหาค่าพารามิเตอร์ x ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ภายในฟังก์ชัน F ที่ทำให้สมการที่ 3.21 เป็นจริง

4. ผลการทดลองที่ได้จากการสอบเทียบ

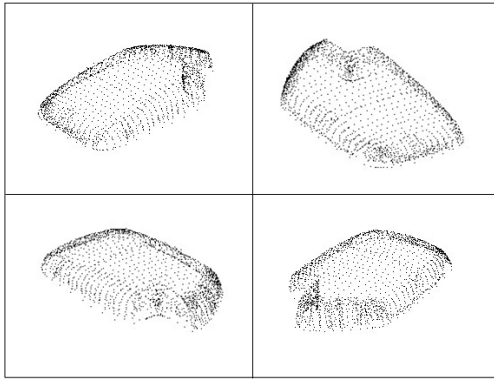
เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ของซียู-ซีเอ็มเอ็มที่หาได้แทนลงในสมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งจุดปลายหัววัดของซียู-ซีเอ็มเอ็มในสมการที่ 3.19 แล้วจึงใช้สมการที่ 3.19 นี้ทำการแปลงค่าตำแหน่งมุมของแต่ละข้อต่อที่ใช้ในการทำการถดถอยในหัวข้อที่แล้วไปเป็นค่าตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางของทรงกลม จากนั้นจึงนำมาเปรียบเทียบกับข้อมูลตำแหน่งของทรงกลมที่วัดได้จากซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ป แต่เนื่องจากการทดลองวัดตำแหน่งทรงกลมแต่ละตำแหน่งโดยซียู-ซีเอ็มเอ็มนั้นจะต้องทำการวัด 10 ครั้ง ดังนั้นค่าตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางทรงกลมที่วัดด้วยซียู-ซีเอ็มเอ็มจึงจะใช้เป็นค่าเฉลี่ยแทน สำหรับค่าความผิดพลาดระหว่างความยาวที่วัดได้จากซีเอ็มเอ็มทั้งสองจะแสดงไว้ในตารางที่ 8.2 แต่เนื่องจากการจับคู่ตำแหน่งทรงกลมเพื่อเปรียบเทียบความยาวระหว่างทรงกลมแต่ละตำแหน่งทั้ง 30 ตำแหน่งนั้นสามารถที่จะจับคู่ได้ถึง 435 คู่ ดังนั้นในตารางที่ 4 จึงจะแสดงข้อมูลการเปรียบเทียบเพียงบางตำแหน่งเท่านั้น

ตารางที่ 4 ตารางแสดงการเปรียบเทียบผลการวัดของซียู-ซีเอ็มเอ็มกับซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ป

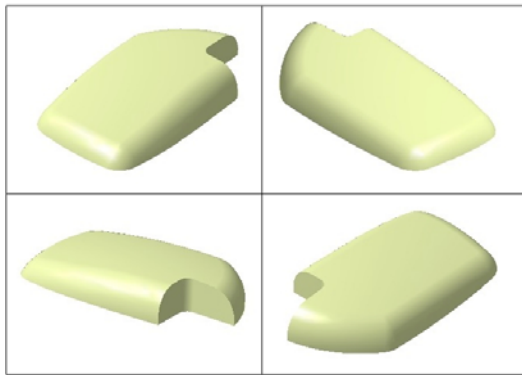
ตำแหน่งทรงกลม	ความยาวที่วัดได้จากซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ป (มิลลิเมตร)	ความยาวที่วัดได้จากซียู-ซีเอ็มเอ็ม (มิลลิเมตร)	ค่าความผิดพลาด (มิลลิเมตร)
1 กับ 21	263.4378	263.4844	0.0466
2 กับ 17	258.6525	258.7026	0.0501
3 กับ 25	189.6516	189.5895	-0.0621
4 กับ 9	210.4361	210.4164	-0.0197
5 กับ 20	218.0888	218.1329	0.0441
6 กับ 15	220.2522	220.2034	-0.0488
7 กับ 14	173.4846	173.3873	-0.0973
8 กับ 24	208.9195	208.9360	0.0165
10 กับ 13	113.5635	113.5914	0.0279
11 กับ 27	181.0480	181.0720	0.0240
12 กับ 23	128.9286	128.8694	-0.0592
16 กับ 28	264.4264	264.4686	0.0422
18 กับ 19	27.3751	27.4010	0.0259
22 กับ 26	114.6263	114.6013	-0.0250
29 กับ 30	110.9317	110.8721	-0.0596

จากการเปรียบเทียบความยาวระหว่างจุดศูนย์กลางทรงกลมทั้ง 30 ตำแหน่ง จะพบว่าค่าความผิดพลาดของทุกตำแหน่งจะมีค่าน้อยกว่า +/- 100 ไมโครเมตร โดยมีค่าความผิดพลาดมากที่สุดเท่ากับ 99 ไมโครเมตร และค่าเฉลี่ยของค่าสัมบูรณ์ของค่าความผิดพลาดของทุกตำแหน่งจะมีค่าเท่ากับ 39 ไมโครเมตร รูปที่ 8 และ 9 เป็นตัวอย่าง

ชิ้นงานที่ได้จากขบวนการวิศวกรรมย้อนกลับโดยใช้อุปกรณ์วัดพิกัดที่พัฒนาขึ้นนี้



รูปที่ 8 รูปแสดงกลุ่มก้อนของจุดในโปรแกรมคาเทียที่ได้จากการวัดตำแหน่งพื้นผิวของชิ้นงาน



รูปที่ 9 รูปแสดงพื้นผิวและแบบที่ได้จากกลุ่มก้อนของจุด

5. สรุป

งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาและสร้างเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ แบบข้อต่อ 6 แกนที่มีค่าความถูกต้อง 100 ไมโครเมตร และมีขอบเขตการทำงาน 500x500x300 ลูกบาศก์มิลลิเมตร เพื่อใช้ร่วมในกระบวนการวิศวกรรมย้อนกลับ (reverse engineering) โดยอาศัยหลักการทางจลนศาสตร์ในการแปลงค่าตำแหน่งมุมของแต่ละข้อต่อของเครื่องวัดพิกัดไปเป็นค่าตำแหน่งพิกัดของปลายหัววัดในระบบพิกัดฉาก ค่าตำแหน่งพิกัดที่ได้จะถูกเก็บอยู่ในรูปแบบมาตรฐานดังเช่น รูปแบบซีจีโอเอสกี (CGO_ASCII) ซึ่งเป็นรูปแบบที่สามารถนำไปใช้ในโปรแกรมแคด (CAD) ทั่วๆ ไปได้

ค่าความถูกต้องของเครื่องซึ่งทดสอบโดยการวัดตำแหน่งพิกัดระหว่างจุดศูนย์กลางทรงกลม 2 จุด เปรียบเทียบกับผลการวัดด้วยเครื่องซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ปซึ่งมีค่าความถูกต้องถึง +/-3 ไมโครเมตร โดยในการทดลองได้แบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

ทำการวัดตำแหน่งทรงกลม 30 ตำแหน่งเพื่อใช้ในการสอบเทียบ แล้วจากนั้นจึงนำค่าตำแหน่งพิกัดของทรงกลมที่วัดได้ทั้ง 30 ตำแหน่งมาคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของทรงกลมทั้งหมดเป็นคู่ๆ ซึ่งจะได้ทั้งหมด 435 คู่ แล้วนำค่าระยะทางที่คำนวณได้มาเปรียบเทียบกับผลการวัดที่ได้จากซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ป

ทำการทดลองโดยเริ่มตั้งแต่เปิดเครื่องวัดพิกัดขึ้นมาใหม่แล้วทดลองเข้าโฮมเครื่อง จากนั้นจึงทำการวัดตำแหน่งทรงกลม 5 ตำแหน่ง แล้วนำผลการวัดที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการวัดที่ได้จากซีเอ็มเอ็มบราวน์แอนด์ชาร์ปเช่นเดียวกับการทดลองแบบแรก

จากผลการทดลองทั้ง 2 แบบพบว่าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นทั้งหมดมีค่าสูงสุดไม่เกิน 100 ไมโครเมตร

นอกจากการทดสอบเพื่อหาค่าความถูกต้องของเครื่องแล้วในงานวิจัยนี้ยังได้ทำการทดลองวัดพื้นผิวของชิ้นงานตัวอย่างพร้อมทั้งนำผลการวัดที่ได้ไปสร้างเป็นพื้นผิวในโปรแกรมคาเทีย พบว่าเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ แบบข้อต่อ 6 แกนนี้สามารถวัดพื้นผิวที่มีความซับซ้อนได้ดีกว่าเครื่องวัดพิกัด 3 มิติแบบอื่นๆ ตัวอย่างเช่นเครื่องวัดพิกัด 3 มิติแบบที่ใช้แถบแสงเลเซอร์ในการวัด เนื่องจากมีองศาอิสระที่มากกว่า อีกทั้งยังไม่มีปัญหาที่เกิดจากคุณสมบัติการสะท้อนแสงและความชันของพื้นผิวชิ้นงานอีกด้วย แต่เนื่องจากเครื่องวัดพิกัด 3 มิติ แบบข้อต่อ 6 แกนนี้เป็นเครื่องวัดที่จะต้องทำการวัดที่ละจุดจึงทำให้ต้องใช้เวลาในการวัดมากกว่าเครื่องวัดแบบใช้แถบแสงเลเซอร์มาก

6. เอกสารอ้างอิง

1. John A. Bosch. Coordinate Measuring Machines and Systems. New York: Marcel Dekker, 1995.
2. Ernest O. Doebelin. Measurement Systems Application and Design. 4th ed., New York: McGraw-Hill, 1990.
3. John J. Craig. Introduction to Robotics Mechanics and Control. 2nd ed. USA: Addison-Wesley, 1989.
4. Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. Numerical Methods for Engineers., 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
5. Coleman, T.F. and Y. Li. An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. SIAM Journal on Optimization 6 (1996): 418-445.
6. Coleman, T.F. and Y. Li. On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds. Mathematical Programming 67, 2 (1994): 189-224.
7. Levenberg, K. A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares. Quarterly Applied Math 2 (1944): 164-168.
8. Marquardt, D. An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters. SIAM Journal Applied Math 11 (1963): 431-441.
9. More, J. J. The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory, Numerical Analysis, ed. G. A. Watson. Lecture Notes in Mathematics 630. Springer Verlag, 1977.
10. Dennis, J. E. Jr. Nonlinear Least Squares. State of the Art in Numerical Analysis. ed. D. Jacobs. Academic Press, 1977.