

การศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดหัวใจด้วยระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ Study of Blood Flow Through a Coronary Artery Using Finite Element Method

จิรศักดิ์ ศิริโกการัตนา¹, กุลยา กนกจาร์วิจิตร^{1*} และ ภาณุ พุทธรังค์

¹ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อ.เมือง จ.พิษณุโลก 65000

*ผู้ติดต่อ: E-mail : koonlaya@nu.ac.th, เบอร์โทรศัพท์ : 0-5596-4210, เบอร์โทรสาร : 0-5596-4230

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดหัวใจด้วยกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยสมมติให้หลอดเลือดเป็นรูปทรงกระบอกที่มีผนังเกร็ง ดังนั้นโดเมนการคำนวณจึงเป็นสมมาตรตามแกนใน 2 มิติ และการไหลมี $Re = 200$ การศึกษาแบ่งออกเป็นสองส่วน ได้แก่ (1) การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมสำหรับการไหลของเลือด โดยพิจารณา 3 แบบจำลอง ได้แก่ Newtonian, Carreau-Yasuda และ Casson แล้วจึงเปรียบเทียบกับผลการทดลองการไหลของเลือดจริงจากวรรณกรรมปริทรรศน์ พบว่าแบบจำลอง Casson ให้ผลใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุด และ (2) การพิจารณาผลของการตีบระหว่าง 7.61 ถึง 80% ของหลอดเลือดที่มีต่อการไหลของเลือด โดยใช้แบบจำลองของ Casson พบว่า ที่การตีบเท่ากับ 29.28% การไหลหลังช่วงที่ตีบเริ่มเกิด Flow Separation และตั้งแต่ 50% เป็นต้นไป Flow Separation เกิดขึ้นอย่างชัดเจน ซึ่งก่อให้เกิดอาการเจ็บหน้าอกนั่นเอง

คำหลัก: หลอดเลือด, คัดสั้น, การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, อัตราการตีบ

Abstract

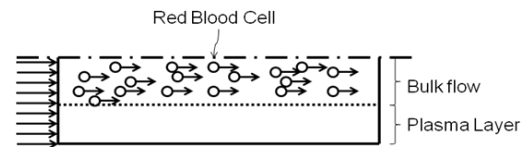
Numerical study of blood flow through coronary artery is investigated by using the finite element method. The blood vessel is assumed a cylinder with rigid wall, thus, the computational domain can be treated 2D axi-symmetric. The flow is fixed at $Re = 200$. The study is divided into two main parts: (1) examination of three mathematical models of Newtonian, Carreau-Yasuda and Casson shows that the Casson model best fits the experimental data obtained from the literature and (2) investigation of the effect of stenosis with the use of Casson model. The range of 7.61 to 80 percent of stenotic vessel is considered. Flow separation begins at 29.28% and from the 50% to 80% stenosis the flow separation occurs with high degree. This reflects to the chest pain that happens to a patient.

Keywords: Blood vessel, Casson, Hemodynamics, Numerical, Stenosis

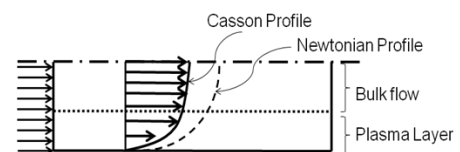
1. บทนำ

โรคหลอดเลือดหัวใจตีบเป็นปัญหาที่พบบ่อยในปัจจุบัน ด้วยสาเหตุที่มีเนื้อเยื่อประเภทไขมันผสมกับพังผืด กล้ามเนื้อ เม็ดเลือดขาว และอื่น ๆ มาจับตัวกันเป็นแผ่นหนูน และแข็งกว่าปกติ (Plaque) อยู่ทั่วไปตามผนังชั้นในของหลอดเลือดที่เลี้ยงหัวใจ ทำให้หลอดเลือดมีผนังค่อนข้างหนา และแข็งกว่าปกติ ทำให้เลือดไหลไม่สะดวกจึงส่งผลให้ กล้ามเนื้อหัวใจส่วนที่เลี้ยงโดยหลอดเลือดนั้นได้รับเลือดไม่เพียงพอ เกิดภาวะกล้ามเนื้อหัวใจขาดเลือด ทำให้เกิดอาการต่าง ๆ เช่น แน่นหน้าอก เหนื่อยหอบ เป็นต้น นักวิจัยในหลายๆ สาขาจึงทำการศึกษากาไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดอย่างแพร่หลาย ดังเช่น Ang และ Mazumdar [1] ได้ศึกษาการไหลผ่านหลอดเลือดที่ตีบด้วยแบบจำลอง 3 มิติ และใช้ระเบียบวิธีทางไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) โดยกำหนดให้ของไหลที่ศึกษาเป็นนิวทอนเนียน ($\tau = -\mu \frac{du}{dr}$) พบว่าบริเวณผนังที่ตีบจะเกิดความเค้นเฉือนสูงกว่าบริเวณที่เป็นปกติ Totorean และคณะ [2] ศึกษาแบบจำลองการตีบของหลอดเลือดแบบ 2 มิติ ด้วยระเบียบวิธีทางไฟไนต์วอลุ่ม โดยสมมติให้เลือดประพฤติตนตามแบบจำลองนิวทอนเนียนเช่นกัน พบว่าอัตราเร็วของการไหลของเลือดแปรผันตรงกับความเค้นเฉือนที่ผนังพวกเขาเหตุที่ใช้แบบจำลองนิวทอนเนียนว่าเนื่องจากเลือดประกอบไปด้วยน้ำ (พลาสมา) เป็นองค์ประกอบหลักถึง 60% และส่วนประกอบอื่นๆ เช่น เซลล์เม็ดเลือดแดง เกล็ดเลือด และอื่นๆ อีกประมาณ 40% ดังรูปที่ 1(ก) อย่างไรก็ตามแบบจำลองนิวทอนเนียนมีข้อผิดพลาดคือการสมมติให้เลือดเป็นของไหลเนื้อเดียวกัน จึงทำให้โปรไฟล์ความเร็วมีลักษณะเป็นพาราโบลาทั้งในชั้นของพลาสมาและชั้นของ Bulk Flow ดังแสดงในรูปที่ 1(ข) แต่ในความเป็นจริงนั้นเลือดมีส่วนประกอบของเม็ดเลือดแดง เกล็ดเลือด และอื่นๆ ปะปน จึงมีผู้คิดหาแบบจำลองใหม่ขึ้นมาเพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าว เพื่อให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายได้

ใกล้เคียงกับพฤติกรรมของการไหลของเลือดดีกว่าแบบจำลองนิวทอนเนียน



(ก) สเก็ทซ์การไหลของเลือด



(ข) โปรไฟล์ความเร็ว

รูปที่ 1 การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือด

Yasuda [3] เสนอแบบจำลอง Carreau-Yasuda ดังนี้

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty})(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{(n-1)/2}$$

โดยแบบจำลองนี้มีข้อดีกว่าแบบจำลองนิวทอนเนียนตรงที่สามารถแสดงความเค้นเฉือนบริเวณใกล้ๆ ชั้นที่อยู่ติดกับผนังหลอดเลือด และมีตัวแปรบางตัวที่ครอบคลุมถึงส่วนประกอบอื่นๆ ของเลือดได้ดีกว่าแบบจำลองนิวทอนเนียน ดังนั้น จึงมีผู้ทำการศึกษากาไหลของเลือดโดยใช้แบบจำลอง Carreau-Yasuda กันอย่างแพร่หลาย เพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมการไหลของเลือดผ่านผนังที่ตีบ พบว่า อัตราการไหลของเลือดที่เพิ่มขึ้นมีผลให้ความเค้นเฉือนในบริเวณที่ตีบเพิ่มขึ้นและค่าสัมประสิทธิ์ความดัน (C_p) ลดลงเมื่อเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้น [4] การเกิดกระแสหมุนวนเป็นเหตุให้เกิดความเค้นเฉือนสูงที่ผนังท่อ [5], [6] นอกจากนี้ขนาดของการตีบยังส่งผลกระทบต่อความดัน โปรไฟล์ความเร็วและความเค้นเฉือนที่ผนังด้วย [7]

อย่างไรก็ดี แบบจำลอง Carreau-Yasuda มีผลคลาดเคลื่อนจากพฤติกรรมการไหลของเลือดเนื่องจากยังไม่ได้คำนึงถึงผลของเม็ดเลือดแดง อยู่ในเลือดด้วย Casson [8] จึงได้ศึกษาคุณลักษณะของเลือด โดยในขั้นแรกสมมติให้เลือดมีพฤติกรรมการไหลเป็นแบบนิวทอนเนียน แต่พบว่าเลือดประพฤติตัว

เป็นนอนนิวทอนเนียน จึงได้เสนอแบบจำลอง

$$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} - \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^{1/2} \quad \text{ซึ่งรวมค่าของเปอร์เซ็นต์}$$

ของเม็ดเลือดแดงในเลือด (Hematocrit) ด้วย และพบว่าผลการทดลองการไหลของเลือดสอดคล้องกับแบบจำลองที่พวกเขานำเสนอ ต่อมา Kim และคณะ [9] ได้ทำการทดลอง วัดความหนืดของของของไหล 4 ชนิดได้แก่ น้ำกลั่น เลือดมนุษย์ที่มีกรดเอทิลีนไดอะมีนเตตระอะซีติก (Ethylenediaminetetraacetic acid (EDTA)) ผสมอยู่ 7.5 % เพื่อป้องกันการเกิดลิ่มเลือด เลือดมนุษย์ที่อุณหภูมิ 25 °C และที่อุณหภูมิเดียวกับร่างกายที่ 37 °C ซึ่งของเหลวสองชนิดหลังไม่ได้ผสม EDTA จากนั้นนำผลการทดลองที่ได้มาเปรียบเทียบกับแบบจำลองของ Casson พบว่าผลของเลือดทั้งสามชนิดที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันกับ

แบบจำลอง Boyd และ Buick [10] ศึกษาการไหลของเลือดโดยใช้วิธี Lattice Boltzmann เพื่อเปรียบเทียบแบบจำลองของเลือดดังนี้ Newtonian, Carreau-Yasuda และ Casson พบว่าการไหลของ Casson และ Carreau-Yasuda ใกล้เคียงกันและให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำกว่าแบบจำลอง Newtonian ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Johnston และคณะ [11] ที่ได้สร้างแบบจำลอง 3 มิติของหลอดเลือดโคโรนารีด้านขวาโดยหลอดเลือดมีรูปร่างลักษณะคล้ายหลอดเลือดจริงเพื่อทำการคำนวณเพื่อเปรียบเทียบการไหลของเลือดจาก 5 แบบจำลองซึ่งได้แก่ Newtonian, Carreau-Yasuda, Walburn-Schneck

($\mu = C_1 e^{C_2 H} [e^{C_4 (TPMA/H^2)}](\dot{\gamma})^{-C_3 H}$), Power law ($\mu = \lambda |\dot{\gamma}|^{n-1}$) และ Casson พบว่าแบบจำลอง Power law และ Walburn-Schneck ให้ค่าประมาณของความเค้นเฉือนที่ผนัง (Wall Shear Stress, WSS) ที่สูงในช่วงความเร็วต่ำ (ความเร็วที่กึ่งกลางหลอดเลือด 0.02 m/s) และประมาณค่า WSS ต่ำในช่วงความเร็วสูง (ความเร็วที่กึ่งกลางหลอดเลือด 0.2 m/s) สำหรับแบบจำลองนิวทอนเนียน ให้การประมาณค่า WSS ที่ต่ำในช่วงความเร็วต่ำ พบว่าแบบจำลอง Casson และ Carreau-Yasuda ให้ผล

ออกมาใกล้เคียงกันในช่วงความเค้นเฉือนต่ำถึงความเค้นเฉือนกลาง (ที่ Strain ช่วง 0-300 s⁻¹) แต่แบบจำลอง Newtonian จะให้ค่าการประมาณที่ดีในช่วงความเค้นเฉือนกลางถึงความเค้นเฉือนสูง (ที่ Strain ช่วง 300 s⁻¹ ขึ้นไป) ซึ่งความเค้นเฉือนที่ผนังเป็นค่าที่สามารถบ่งชี้ถึงโอกาสการเกิดการตีบของหลอดเลือด

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเชิงตัวเลขของการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดหัวใจ โดยอาศัยระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อเปรียบเทียบแบบจำลองการไหลของเลือด 3 แบบจำลองผ่านหลอดเลือดปกติ ได้แก่ Newtonian, Carreau-Yasuda และ Casson แล้วจึงเลือกแบบจำลองที่ให้ผลในรูปของความเร็วใกล้เคียงกับผลการทดลองที่ได้จากวรรณกรรมที่สุด และศึกษาผลของอัตราการตีบของหลอดเลือดตั้งแต่ภาวะปกติจนถึงภาวะของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดหัวใจคือในช่วง 7.61 ถึง 80% ของเส้นผ่าศูนย์กลางของหลอดเลือดที่ไม่มีการตีบ ที่มีต่อการไหลของเลือด

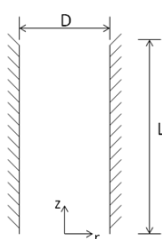
2. ระเบียบวิธีวิจัย

2.1 โดเมนการคำนวณ (Computational Domain)

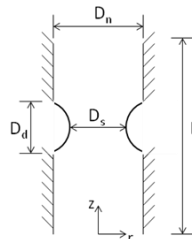
พิจารณารูปที่ 2 ซึ่งแสดงโดเมนการคำนวณในการศึกษานี้ โดยกำหนดให้หลอดเลือดเป็นทรงกระบอกที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง D_n เท่ากับ 4 mm และยาว 50 mm เพื่อไม่ให้เกิด End Effect นอกจากนี้ตลอดการศึกษาเรากำหนดให้หลอดเลือดมีผนังเกร็ง ดังรูปที่ 2(ก) แสดงโดเมนการคำนวณของปัญหาสำหรับการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดปกติ และรูปที่ 2(ข) แสดงโดเมนการคำนวณสำหรับปัญหาของการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดตีบ ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก % การตีบ = $\frac{D_n - D_s}{D_n} \times 100\%$ โดย D_n คือเส้นผ่าศูนย์กลางของหลอดเลือดปกติและ D_s คือเส้นผ่าศูนย์กลางของหลอดเลือดตีบ

เนื่องจากโดเมนการคำนวณมีสมมาตรตามแกนสองมิติ (2D Axi-symmetric) ดังนั้น เราจึงสามารถลดโดเมนการคำนวณให้เหลือเพียงหนึ่งในสี่ของทรงกระบอกดังแสดงในรูปที่ 3 ทั้งนี้เพื่อใช้เวลาใน

การคำนวณลดลงและใช้ RAM น้อยลง การศึกษาเชิงตัวเลขในที่นี้เราใช้ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยอาศัยซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ COMSOL ของภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยนเรศวร เรากำหนดสภาวะขอบเขตดังนี้คือ ความเร็วของของไหลผนังมีค่าเป็น 0 เนื่องจากสภาวะ No Slip ($v(r = R) = 0$) และที่กึ่งกลางหลอดเลือดจะมีความเร็วสูงที่สุดในระนาบ ($v(r = 0) = V_{max}$) ด้านบนของโดเมนการคำนวณกำหนดให้เป็นทางเข้าของเลือดที่ไหลด้วยอัตราเร็ว U และด้านล่างเป็นทางออก ที่มีความดัน $P = 90 \text{ mmHg}$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของความดันที่ทางออกทั้งร่างกายของมนุษย์ รูปที่ 3(ก) แสดงการกำหนดสภาวะขอบเขตสำหรับการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดปกติ รูปที่ 3(ข) แสดงกำหนดสภาวะขอบเขตสำหรับการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดตีบ สำหรับการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดตีบ สำหรับรูปที่ 3(ค) แสดงตำแหน่งต่างๆ ที่พิจารณาโปรไฟล์ความเร็วของเลือดในบริเวณที่ตีบ ได้แก่ ตำแหน่งก่อนการตีบที่ระยะ 28, 30, 32 และ 34 มิลลิเมตร จากทางเข้า

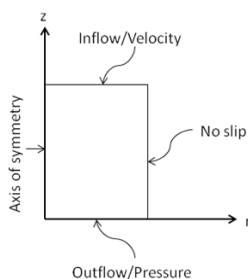


(ก) หลอดเลือดปกติ

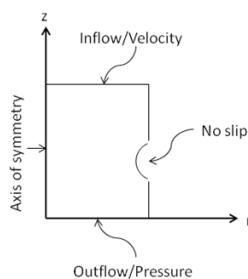


(ข) หลอดเลือดตีบ

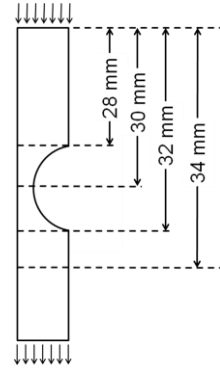
รูปที่ 2 โดเมนการไหลในระนาบ 2 มิติ



(ก) หลอดเลือดปกติ



(ข) หลอดเลือดตีบ



(ค) ตำแหน่งที่พิจารณาโปรไฟล์ ความเร็วของหลอดเลือดตีบ

รูปที่ 3 การกำหนดสภาวะขอบเขตการไหลใน

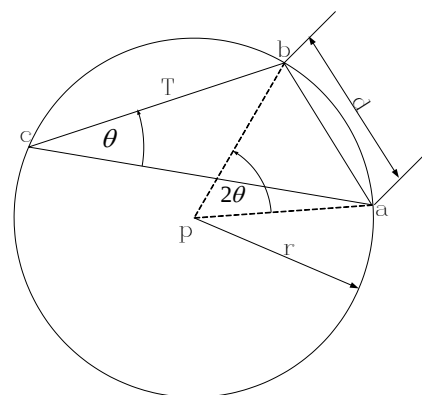
ระนาบ 2 มิติแบบสมมาตรตามแกน

2.2. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เมื่อกำหนดโดเมนการไหลแล้วเราสร้าง

Mesh

แบบสามเหลี่ยมไว้ระเบียบในโดเมนโดย Delaunay algorithm แนวความคิดพื้นฐานของแบบวิธีดังกล่าวคือหลักการของสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นแล้วปรับย้ายรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ต้องการออกไป ในการปรับค่าแต่ละครั้งก็จะได้ตำแหน่งยอดใหม่ของสามเหลี่ยมรูปใหม่ขึ้นมา และเพื่อให้ได้สามเหลี่ยมที่เหมาะสมที่สุดก็จะดำเนินการตามข้อกำหนดและหลักการที่จะกล่าวถึงคือ หลักการเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมซึ่งกล่าวว่า หากสามเหลี่ยม $T = abc$ มีมุมเป็น $\angle bca = \theta$ และ p เป็นศูนย์กลางวงล้อม ของสามเหลี่ยม T ดังนั้น $\angle bpa = 2\theta$ ตามรูปที่ 4



รูปที่ 4 รูปสามเหลี่ยมที่อยู่ในวงกลม

เงื่อนไขดังกล่าวสามารถพิสูจน์ได้ จากวิธีการ
พิจารณาของสามเหลี่ยม pab , pbc และ pca
ศูนย์กลางวงล้อมของสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็น
ศูนย์กลางของวงกลมที่เส้นรอบวงของ วงกลมดังกล่าว
ตัดผ่านมุมทั้งสามของสามเหลี่ยม ซึ่งปกติจะใช้
ตำแหน่งของมุมทั้งสามเป็นจุดศูนย์กลางวงล้อม แต่
หากตำแหน่งไม่เหมาะสมก็จะเพิ่มตำแหน่งใหม่ลงไป
โดยเซตจำกัดของจุดบนระนาบ คือ จุดสามจุดที่
ประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมโดยมีจุดศูนย์กลางของวง
ล้อมร่วมกัน โดยที่ไม่มีจุดอื่นอยู่ภายใน ทำให้เกิด
สามเหลี่ยมที่เหมาะสมที่จะใช้เป็นสามเหลี่ยมอ้างอิง
[15] เนื่องจากเอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยมจึงทำให้มี
node ทั้งหมด 6 node โดย node ที่ 1-3 จะอยู่ที่มุม
ของสามเหลี่ยมและมี node ระหว่างมุมทั้งสามอีก 3
node ซึ่งเรียงลำดับตามทฤษฎีของดาว ดังแสดงในรูปที่ 5
สำหรับแต่ละ Node point (P_i) และมี Degree of
freedom $N_i = nP_i$ และฟังก์ชันพื้นฐาน ϕ_i โดยจัดอยู่
ในรูประบบสมการได้เป็น

$$\phi(x, y) = \sum N_i(x, y)\phi_i \quad (1)$$

เมื่อ ϕ เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น u, v
ฟังก์ชันการประมาณ N ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของพิกัด
พื้นที่ L_1, L_2 และ L_3 ดังสมการ

$$N_1 = L_1^2 - L_1(L_2 + L_3)$$

$$N_2 = L_2^2 - L_2(L_3 + L_1)$$

$$N_3 = L_3^2 - L_3(L_1 + L_2)$$

$$N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_5 = 4L_3L_1$$

$$N_6 = 4L_1L_2$$

$$\text{เมื่อ } L_1 = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$$

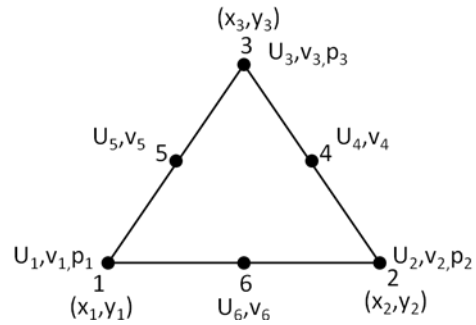
$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

และตัวแปร A เป็นพื้นที่ของเอลิเมนต์และสามารถหา
ได้จากสมการ

$$A = \frac{1}{2}[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)]$$



รูปที่ 5 Node ในสามเหลี่ยมไว้ระเบียบ

สำหรับขั้นตอนสุดท้ายหลังจากการประยุกต์

สภาวะขอบเขตแล้วโปรแกรม COMSOL จะแก้สมการ
ตั้งต้นโดยใช้ UMFPACK algorithm ซึ่งเป็นอัลกอริทึม
ในการแก้ปัญหาประเภทสมมาตรตามแนวแกนได้
อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมีค่าความสัมพันธ์ผลต่าง
ความผิดพลาด (Relative Tolerance) เท่ากับ 10^{-6}
และจำนวนครั้งที่มากที่สุดในการทำซ้ำ (Maximum
Number of Iterations) เท่ากับ 25

2.3 Governing Equations

ในการคำนวณจะใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม
(Conservation of momentum) เป็นหลัก และมี
สมมุติฐานดังต่อไปนี้ เป็นการไหลที่สภาวะคงที่
(Steady state) ของไหลอัดตัวไม่ได้ (Incompressible
flow) และเป็นการไหลแบบสมมาตรตามแกน 2 มิติ
(2D axisymmetry) ซึ่งสมการความต่อเนื่อง และ
สมการอนุรักษ์โมเมนตัมมีรูปสมการดังนี้
สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศแนวรัศมี (Radial
Direction)

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}) \right] + \rho g_r \quad (3)$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศแนวแกน (Axial
Direction)

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \quad (4)$$

สำหรับงานวิจัยนี้พิจารณาของไหล 3 แบบจำลอง ดังนี้

1. Newtonian เป็นลักษณะการไหลของของ
ไหลที่เป็นไปตามการสันนิษฐานของนิวตันคือ ที่

อุณหภูมิหนึ่งๆ ของไหลจะมีค่าความหนืดเป็นค่าคงที่
ขึ้นกับอัตราเฉือน มีรูปแบบสมการดังนี้

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (5)$$

โดยที่

τ คือ ความเค้นเฉือน (Shear stress)

μ คือ ค่าความหนืดเชิงจลน์

$\frac{du}{dr}$ คือ เกรเดียนต์ของความเร็ว

2. Carreau-Yasuda fluid เป็นลักษณะการ
ไหลของของไหลที่ไม่เป็นไปตามการสันนิษฐานของ
นิวตัน กล่าวคือ ที่อุณหภูมิหนึ่งๆ ของไหลมีค่าความ
หนืดไม่คงที่ การเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับอัตราเฉือน
โดยให้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (6)

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{(n-1)/2} \quad (6)$$

โดยที่

μ_∞ คือ ความหนืดที่อัตราเฉือนอนันต์
ในกรณีที่ของไหลเป็นเลือดมีค่า
0.0035 Pa-s

μ_0 คือ ความหนืดที่อัตราเฉือนเป็น
ศูนย์ ในกรณีที่ของไหลเป็นเลือดมี
ค่า 0.056 Pa-s

λ คือ ค่าคงที่ ในกรณีที่ของไหลเป็น
เลือดมีค่า 3.313 s

$\dot{\gamma}$ คือ อัตราความเค้นเฉือน
(Shear rate)

n คือ ค่าคงที่ไร้มิติ โดย n มีค่า
เท่ากับ 0.3568 ในกรณีที่ของไหล
เป็นเลือด

3. Casson fluid หมายถึงของไหลที่ต้องการ
แรงกระทำที่สูงพอ ในการเอาชนะค่าความเค้นที่จุด
คราก (yield stress) ได้แล้วจึงเริ่มไหล ซึ่งมีรูปสมการ
ดังนี้

$$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} - \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^{1/2} \quad (7)$$

โดยที่

τ คือ ความเค้นเฉือน (Shear stress)

τ_0 คือ ความเค้นที่จุดคราก (Yield

Stress)

μ คือ ค่าความหนืดจลน์

$\frac{du}{dr}$ คือ เกรเดียนต์ของความเร็ว

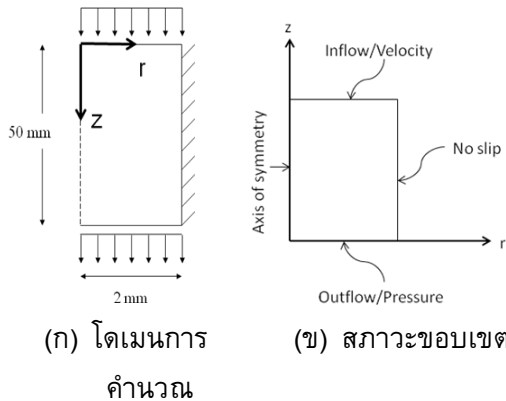
2.4 การตรวจสอบผลกระทบของความหนาแน่น ของ Mesh (Mesh density dependence check)

ก่อนที่จะทำการคำนวณเพื่อศึกษาการไหล
ผ่านหลอดเลือดที่สภาวะต่างๆ นั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่
จะต้องตรวจสอบผลกระทบของความหนาแน่นของ
Mesh ที่มีต่อคำตอบ ดังนั้น ในหัวข้อนี้เราจะแสดงการ
ตั้งสภาวะของโจทย์และทำการคำนวณหาความเร็วที่
ค่าความหนาแน่นของ Mesh ต่างๆ กันไป สำหรับ
แบบจำลองทั้งสามแบบดังที่ได้กล่าวมาในข้างต้น

2.4.1 โดเมนการคำนวณ (Computational Domain)

พิจารณาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่
มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 4 mm ยาว 50 mm กำหนดให้
เลือดมีความหนาแน่น 1060 kg/m³ ด้วยอัตราเร็ว
0.16 m/s เพื่อให้ได้เลขเรย์โนลด์เป็น 200 (Re = 200)
ซึ่งค่าของ Re = 200 เป็นค่าเฉลี่ยที่ใช้ในการทดลอง
ของหลายงานวิจัย [5, 17]

สำหรับงานวิจัยนี้พิจารณาเป็นการไหลแบบ
สมมาตรตามแกนใน 2 มิติ (2D Axi-Symmetric) ดัง
รูปที่ 6(ก) กล่าวคือ เนื่องจากเรากำหนดให้ผนังหลอดเลือด
เป็นทรงกระบอกแข็งเกร็ง (Rigid Wall) ซึ่งมี
สมมาตร ดังนั้น เราสามารถกำหนดโดเมนการคำนวณ
ให้เป็นสองมิติและเหลือเพียงครึ่งเดียวของของจริงได้
ทำให้ประหยัดทั้ง RAM และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ
รูปที่ 6(ข) แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ดังนี้
ทางเข้าด้านบนมีอัตราเร็ว 0.16 m/s กำหนดให้การ
ไหลผ่านผนังไม่มีการลื่นไถล และด้านล่างกำหนดเป็น
ทางออก โดยให้เลือดไหลออกสู่ความดันเท่ากับ 90
mmHg (หรือ 12000 Pa) ซึ่งเป็นค่าของความดัน
โลหิตในร่างกายของมนุษย์



รูปที่ 6 โดเมนการคำนวณและสภาวะขอบเขตของโจทย์การไหลของเลือด

2.4.2 ผลกระทบของความหนาแน่นของ Mesh ที่มีต่อคำตอบ

เนื่องจากการแบ่งโดเมนการคำนวณออกเป็น Mesh ขนาดเล็กที่มีความถี่มาก จะมีผลให้เกิดจุดต่อที่ต้องคำนวณเป็นจำนวนมาก และส่งผลต่อการใช้ทรัพยากรของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ ซึ่ง Mesh ขนาดเล็กที่มีความถี่มาก จะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากตามไปด้วย ดังนั้นจึงต้องมีการตรวจสอบเพื่อหาค่าความหนาแน่นของ Mesh ที่เหมาะสม [18]

การตรวจสอบจะแบ่งความหนาแน่นของ Mesh เป็น 4 แบบจำลองดังนี้ (1) แบบจำลอง A มีความหนาแน่น 1.68 meshes/mm² (2) แบบจำลอง B มีความหนาแน่น 6.72 meshes/mm² (3) แบบจำลอง C มีความหนาแน่น 26.88 meshes/mm² และ (4) แบบจำลอง D มีความหนาแน่น 107.52 meshes/mm² ดังตารางที่ 1 เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของคำตอบของแบบจำลอง A แบบจำลอง B และแบบจำลอง C เมื่อเทียบกับแบบจำลอง D สำหรับแต่ละแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้แก่แบบจำลอง Newtonian แบบจำลอง Carreau-Yasuda และแบบจำลอง Casson

เมื่อพิจารณาความเร็วที่ทางออกของแบบจำลองต่างๆดังที่กล่าวมาข้างต้น พบว่าแบบจำลอง C มีความคลาดเคลื่อนจากแบบจำลอง D น้อยที่สุด ดังตารางที่ 1 ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้ความหนาแน่นของ Mesh ที่ 107.52 Meshes/mm²

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของคำตอบเมื่อความหนาแน่นของ Mesh ในโดเมนการคำนวณเปลี่ยนไป

แบบจำลอง	ความหนาแน่นของ Mesh (meshes/mm ²)	ความคลาดเคลื่อนจากแบบจำลอง D (%)		
		Newtonian	Carreau-Yasuda	Casson
A	6.72	3.89	3.60	3.54
B	26.88	1.51	1.38	1.37
C	107.52	0.08	0.14	0.14
D	146.74	-	-	-

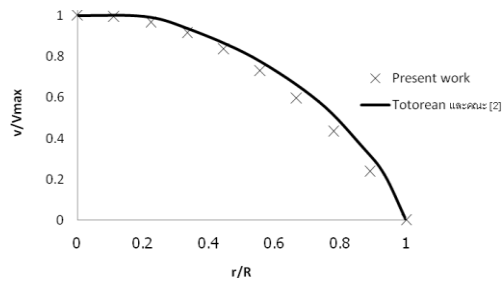
3. ผลการคำนวณและอภิปรายผล

3.1 การเปรียบเทียบกับวรรณกรรม

จากการประยุกต์ใช้กระบวนการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยโปรแกรม COMSOL เพื่อคำนวณหาโปรไฟล์ความเร็วของเลือดโดยใช้แบบจำลอง Carreau-Yasuda และแบบจำลอง Casson แล้วจึงนำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการทดลองจากวรรณกรรม พบว่าผลที่ได้จากการคำนวณมีแนวโน้มใกล้เคียงกับวรรณกรรม รูปที่ 7 เป็นผลการเปรียบเทียบผลการคำนวณ ด้วยแบบจำลอง Carreau-Yasuda กับงานวิจัยของ Totorean และคณะ [2] ซึ่งทำการศึกษาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับการไหลในท่อที่ $Re = 200$ ด้วยแบบจำลอง Carreau-Yasuda ซึ่งท่อมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 3 มิลลิเมตรโดยพิจารณาโปรไฟล์ความเร็วที่ตำแหน่ง Fully developed พบว่ามีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย 9.88 % (ค่าความคลาดเคลื่อนคำนวณจากข้อมูลในแต่ละตำแหน่งดังนี้

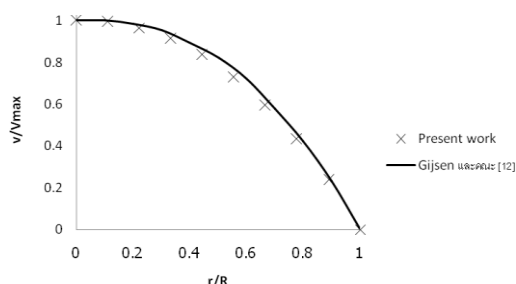
$$\left| \frac{\text{Totorean} - \text{Current Work}}{\text{Totorean}} \right| \times 100\%$$

แล้วจึงนำมาคำนวณค่าเฉลี่ย) โดยความคลาดเคลื่อนอาจเกิดจากผลของ End effect ในแบบจำลองของ Totorean และคณะ [2] ซึ่งแสดงข้อมูลที่ตำแหน่งก่อนการลดขนาดที่เพียง 2 มิลลิเมตร ในขณะที่งานวิจัยนี้เราเลือกแสดงข้อมูลที่ระยะ 20 มิลลิเมตรหลังทางเข้าของเลือด และรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ต่างกันโดยงานวิจัยของ Totorean และคณะ [2] ใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม แต่งานวิจัยนี้ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมไร้ระเบียบ



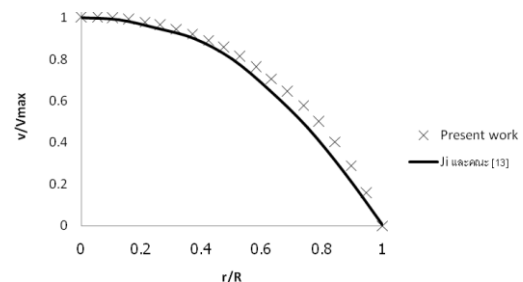
รูปที่ 7 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของงานวิจัยนี้
กับผลการคำนวณของ Totorean และคณะ [2]
ที่ $Re=200$

รูปที่ 8 เป็นผลการเปรียบเทียบผลการ
คำนวณโดยใช้แบบจำลอง Casson เปรียบเทียบกับ
ผลการทดลองของ Gijssen และคณะ [12] ซึ่งเป็นการ
ทดลองโดยใช้ของไหล KSCN-X ซึ่งเป็นสารละลาย
Potassium thiocyanate ในน้ำที่ความเข้มข้น 71 %
โดยน้ำหนัก และผสมกับ Xanthan gum ที่ 250 ppm
และเป็นของไหลที่มีความหนืดใกล้เคียงกับเลือด
ไหลผ่านท่อที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 มิลลิเมตร ที่ $Re =$
270 โดยพิจารณาโปรไฟล์ความเร็วที่ตำแหน่ง Fully
developed พบว่ามีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย 11.13%
ซึ่งอาจเกิดจากผลของความเสียดทานภายในท่อของ
การทดลอง ของไหลที่ใช้มีคุณสมบัติความหนืดคล้าย
เลือดแต่ไม่มีองค์ประกอบเช่นเดียวกับเลือด เช่น ไม่มี
เซลล์เม็ดเลือดแดง เป็นต้น และความหนาแน่นต่าง
จากเลือดโดยที่ KSCN-X มีความหนาแน่น 1,410
 kg/m^3 ในขณะที่เลือดมีความหนาแน่น 1,050-1,060
 kg/m^3



รูปที่ 8 การเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการทดลอง
ของ Gijssen และคณะ [12] ที่ $Re=270$

และรูปที่ 9 เป็นการเปรียบเทียบผลการ
คำนวณโดยใช้แบบจำลอง Casson เปรียบเทียบกับ
ผลการทดลองจากการวัดของ Ji และคณะ [13]
ซึ่งเป็นการทดลองโดยใช้ของเลือดมนุษย์ที่มี
Hematocrit 40% ไหลผ่านท่อแคปิลลารีที่มี
เส้นผ่านศูนย์กลาง 100 μm ที่อัตราการไหล 10 $\mu l/hr$
พบว่ามีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย 5.89 % ซึ่งอาจเกิด
จากการทดลองที่ใช้เลือดจริงมีผลของเม็ดเลือดแดงที่
อยู่ในน้ำเลือดและการที่ท่อมีขนาดเล็กอาจมีผลกระทบ
ของแรงตึงผิวภายในท่อทำให้โปรไฟล์ความเร็วที่ผนัง
ท่อมีความคลาดเคลื่อนได้



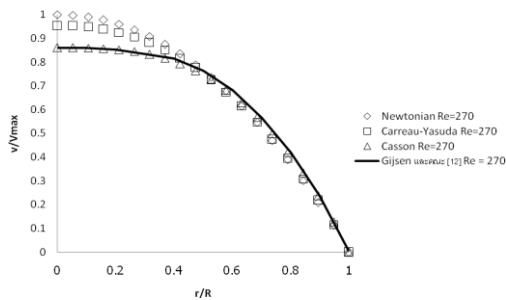
รูปที่ 9 การเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการทดลอง
ของ Ji และคณะ [13]

3.2 แบบจำลองการไหลผ่านหลอดเลือดปกติ

การเปรียบเทียบผลการคำนวณโดยใช้
โปรแกรม COMSOL สำหรับแบบจำลอง 3 แบบ
ได้แก่ Newtonian, Carreau-Yasuda และ Casson
สำหรับการไหลของเลือดผ่านท่อที่ $Re = 270$ กับผล
การทดลองของ Gijssen และคณะ [12] ดังแสดงในรูป
ที่ 10

พบว่าแบบจำลอง Casson มีแนวโน้ม
ใกล้เคียงกับผลการทดลองของ Gijssen และคณะ [12]
มากที่สุดเนื่องจากแบบจำลอง Casson ได้พิจารณา
รวมผลของ Hematocrit ไว้ด้วยจึงให้ผลการคำนวณ
ที่ใกล้เคียงมากที่สุด สำหรับแบบจำลอง Newtonian
และ Carreau-Yasuda นั้นจะมีความคลาดเคลื่อนจาก
ผลการทดลองมากกว่าแบบจำลอง Casson ในช่วง
บริเวณกึ่งกลางท่อ (ที่ r/R ช่วง 0 - 0.5) เนื่องจาก
แบบจำลอง Newtonian มีข้อผิดพลาดคือการสมมติ

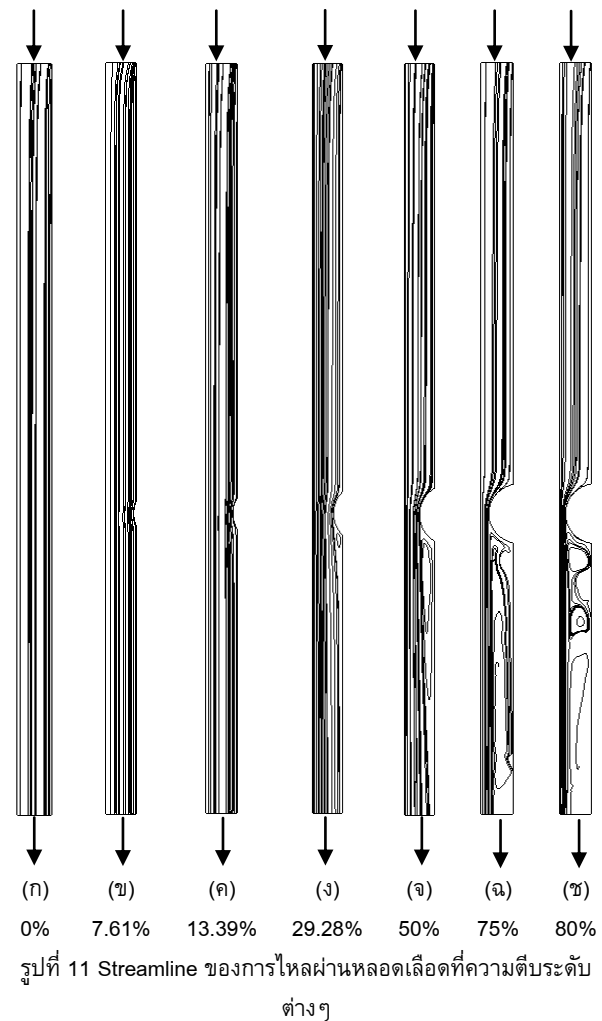
ของไหลเป็นเนื้อเดียวกัน จึงทำให้โปรไฟล์ความเร็วมีลักษณะเป็นพาราโบลาทั้งในชั้นของพลาสมาและชั้นของ Bulk Flow และแบบจำลอง Carreau-Yasuda มีความคลาดเคลื่อนเนื่องจากไม่ได้คำนึงถึงผลของเม็ดเลือดแดงที่มีผลต่อความหนืดในแต่ละชั้นของพลาสมาและชั้นของ Bulk Flow



รูปที่ 10 ผลการเปรียบเทียบโปรไฟล์ความเร็วที่ทางออกของแบบจำลองทั้งสามกับผลการทดลองจากวรรณกรรมที่ $Re = 270$

3.3 การไหลผ่านหลอดเลือดตีบ

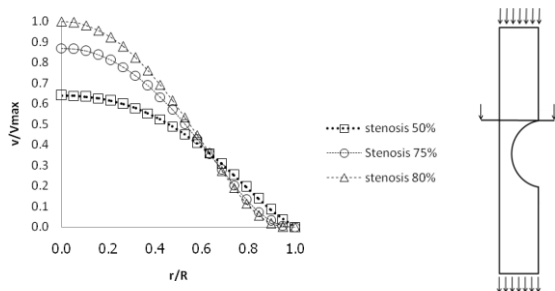
หัวข้อนี้แสดงผลการคำนวณโดยอาศัยแบบจำลอง Casson ซึ่งให้ความถูกต้องสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลอง เพื่อพิจารณาผลกระทบของการตีบของหลอดเลือดที่มีต่อการไหล โดยพิจารณาอัตราการตีบที่ 7.61, 13.39, 29.28, 50, 75 และ 80% และเปรียบเทียบกับหลอดเลือดปกติที่ไม่มีการตีบ ดังแสดงในเชิงคุณภาพในรูปของ Streamline ของรูปที่ 11 สังเกตได้ว่า ที่อัตราการตีบต่ำๆ เช่น 7.61 และ 13.39% นั้นการไหลยังใกล้เคียงกับการไหลผ่านหลอดเลือดปกติ ความผิดปกติของการไหลของเลือดจะพบที่อัตราการตีบ 29.28% ขึ้นไป โดยพบการเกิดการแยกของการไหล (Flow Separation) หลังบริเวณที่ตีบ และการหมุน ในขณะ ที่อัตราการตีบ 50% ขึ้นไปนั้นการไหลหมุนวนเกิดขึ้นอย่างชัดเจน ซึ่งที่ระดับความตีบเหล่านี้เองที่ทำให้ผู้ป่วยเกิดอาการแน่นหน้าอก



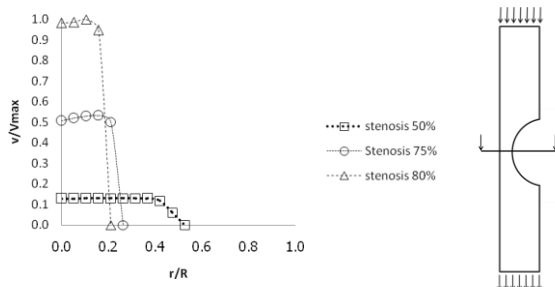
เมื่อพิจารณาโปรไฟล์ความเร็วบริเวณก่อนการตีบของอัตราการตีบ 50% พบว่าโปรไฟล์ความเร็วยังมีลักษณะเป็นพาราโบลาและมีความเร็วต่ำสุดสำหรับอัตราการตีบ 75% และ 80% โปรไฟล์ความเร็วจะมีค่าสูงขึ้นตามลำดับ และเมื่อพิจารณาที่ระยะ $r/R = 0.9$ ถึงระยะ $r/R = 1$ พบว่าโปรไฟล์ความเร็วของอัตราการตีบจะมีค่าใกล้เคียงกันแสดง Flow separation นั้นเอง ทั้งนี้ความเร็วที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากพื้นที่สำหรับการไหลลดลงเมื่ออัตราการตีบเพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 12(ก) เมื่อพิจารณาโปรไฟล์ความเร็ว ที่บริเวณกึ่งกลางของการตีบพบว่าโปรไฟล์ความเร็วที่อัตราการตีบ 80 % จะมีค่าสูงที่สุด ที่อัตราการตีบ 75 % มีความเร็วรองลงมาและที่อัตราการตีบ 50% มีความเร็วต่ำที่สุด แต่โปรไฟล์ความเร็วของอัตราการตีบทั้งสามจะมีลักษณะมีลักษณะแบนราบดังรูปที่ 12(ข) ต่างจาก

ตำแหน่งก่อนการตีบในรูป 12(ก) ทั้งนี้เป็นเพราะพื้นที่การไหลน้อยลงทำให้เม็ดเลือดถูกอัดตัว เป็นเหตุให้มีระยะห่างระหว่างกันน้อย

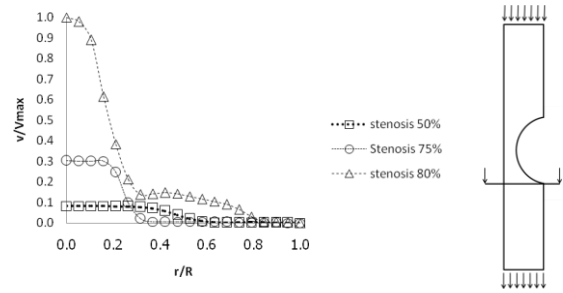
เมื่อพิจารณาบริเวณหลังการตีบ ในรูปที่ 12 (ค-ง) พบว่าโปรไฟล์ความเร็วของอัตราการตีบ 80 % จะมีความเร็วสูงในช่วงระยะ $r/R = 0$ ถึงระยะ $r/R = 0.2$ จากนั้นความเร็วจะลดลงอย่างรวดเร็วจนถึงระยะ $r/R = 0.3$ และความเร็วค่อยๆลดลงจนถึงระยะ $r/R = 0.8$ สำหรับอัตราการตีบ 75% มีความเร็วรองลงมา และอัตราการตีบ 50 % ให้ความเร็วต่ำสุด สังเกตได้ว่าที่ระยะ $r/R = 0$ ถึง 0.2 สำหรับอัตราการตีบ 75% และที่ $r/R = 0$ ถึง 0.5 สำหรับอัตราการตีบ 80% นั้นแสดงลักษณะที่คล้ายคลึงกัน กล่าวคือ ความเร็วค่อนข้างคงที่ แล้วจึงลดลงเข้าสู่ ศูนย์ก่อนถึงผนัง ($r/R = 1$) นี่เป็นการแสดงให้เห็นถึงการเริ่มต้นการเกิด Adverse Gradient ($dP/dx > 0$) ซึ่งจะก่อให้เกิดการไหลย้อนกลับ (Back Flow) นั่นเอง



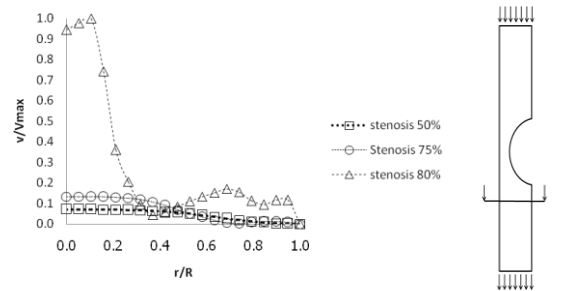
(ก) ตำแหน่งก่อนตีบที่ระยะ 28 มิลลิเมตรจากทางเข้า



(ข) ตำแหน่งกึ่งกลางบริเวณตีบที่ระยะ 30 มิลลิเมตรจากทางเข้า



(ค) ตำแหน่งหลังตีบที่ระยะ 32 มิลลิเมตรจากทางเข้า



(ง) ตำแหน่งหลังตีบที่ระยะ 34 มิลลิเมตรจากทางเข้า

รูปที่ 12 โปรไฟล์ความเร็วของหลอดเลือดที่ระยะต่างๆ

รูปที่ 13 แสดงผลของอัตราการตีบที่มีต่ออัตราการไหล โดยแสดงข้อมูลที่หน้าตัด ที่ระยะต่างๆ ได้แก่ ที่ 28, 30, 32 และ 34 มิลลิเมตร หลังทางเข้า พบว่า อัตราการตีบที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้อัตราการไหลของเลือดเพิ่มขึ้น และก่อให้เกิดการไหลย้อนกลับได้ จุดที่น่าสนใจคือ การตีบ 80% อัตราการไหลสูงขึ้นอย่างชัดเจน และสอดคล้องกับผลเชิงปริมาณในรูปที่ 11 ก่อให้เกิดความดันของโลหิตสูงดังแสดงในรูปที่ 14 ซึ่งได้จากความสัมพันธ์

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta \rho}{8 \mu L} \quad (8)$$

โดยที่

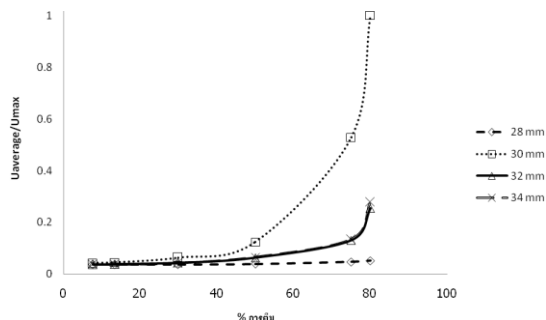
Q คือ อัตราการไหล (m^3/s)

$\Delta \rho$ คือ ความแตกต่างของผลรวมของเทอมของความดันและแรงโน้มถ่วง ($\Delta \rho = ((P_0 - \rho g O) - (P_L - \rho g L))$ (Pa)

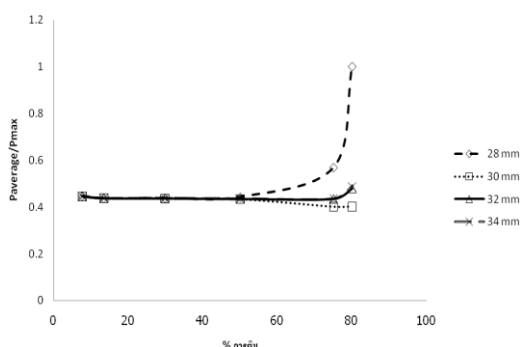
R คือ รัศมีของท่อ (m)

L คือ ความยาวท่อ (m)

สำหรับการเกิดการตีบที่ 50 % ผู้ป่วยจะเริ่มรู้สึกเจ็บหน้าอก ที่อัตราการตีบ 75 % ผู้ป่วยรู้สึกเจ็บหน้าอกอย่างรุนแรง และที่อัตราการตีบ 80 % ขึ้นไปอาจเป็นอันตรายถึงชีวิตได้ ทั้งนี้ได้มีการรักษาอาการตีบของหลอดเลือดหลายวิธี วิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้คือการใช้บอลลูนและใส่ขดลวดสวนหัวใจ (Stent) เพื่อถ่างและค้ำยันผนังหลอดเลือดบริเวณที่ตีบให้มีขนาดใกล้เคียงกับหลอดเลือดก่อนการตีบ โดยในอนาคตเราจะทำการศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่ใส่ขดลวดสวนหัวใจเพื่อพิจารณาผลกระทบที่มีต่อโปรไฟล์ความเร็ว เช่น ระยะพิทช์ของขดลวดสวนหัวใจ รูปร่างของเส้นลวด เป็นต้น



รูปที่ 13 การเปรียบเทียบอัตราการตีบเทียบกับโปรไฟล์ความเร็วตำแหน่งหลังตีบที่ระยะ 28 mm, 30 mm, 32 mm และ 34 mm จากทางเข้า



รูปที่ 14 การเปรียบเทียบอัตราการตีบเทียบกับโปรไฟล์ความดันตำแหน่งหลังตีบที่ระยะ ระยะ 28 mm, 30 mm, 32 mm และ 34 mm จากทางเข้า

4. สรุป

จากการศึกษาลักษณะการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดโดยอาศัยกระบวนการทางไฟไนท์เอลิเมนต์ โดยใช้แบบจำลอง 3 แบบ ได้แก่ Newtonian, Carreau-Yasuda และ Casson เมื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกันพบว่าโปรไฟล์ความเร็วที่บริเวณกลางท่อแบบจำลอง Casson แบบราบกว่าแบบจำลอง Carreau-Yasuda และ Newtonian นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากแบบจำลองทั้งสามกับผลการทดลองการไหลของเลือดที่ได้จากการรณกรรมของ Gijssen และคณะ [12] พบว่า Casson ให้ผลที่ใกล้เคียงกับการทดลองมากกว่าอีกสองแบบจำลอง โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณใกล้กึ่งกลางท่อ หรือบริเวณของ Bulk Flow เนื่องมาจากแบบจำลอง Casson รวมผลของเม็ดเลือดแดง และ hematocrit ไว้ด้วย สำหรับการศึกษาลักษณะการไหลของเลือดที่มีต่อการไหลของเลือดนั้น เราได้ทำการคำนวณอัตราการตีบที่ 7.61 – 80% พบว่าที่อัตราการตีบต่ำๆ นั้นการไหลผ่านบริเวณที่ตีบไม่ต่างจากกรณีของหลอดเลือดปกติ (ไม่มีการตีบ) เท่าใดนัก อย่างไรก็ตาม ที่อัตราการตีบ 50% ขึ้นไปนั้น พบว่าเกิด Flow Separation และ Back Flow เป็นเหตุให้การไหลมีลักษณะหมุนวน ซึ่งแสดงออกเป็นอาการเจ็บหน้าอกอย่างรุนแรงในผู้ป่วยนั่นเอง

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ได้เอื้อเฟื้อเอกสารและข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่อการดำเนินงานการจัดประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 25

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Ang, K.C. and Mazumdar, J.N., (1997). Mathematical modeling of Three-dimensional flow through an asymmetric arterial stenosis, *Mathl. Comput. Modelling*, Vol.25, pp.19-29.
- [2] Totorean, A. F., Vinatu, V. F., Bernad, S. I. and Susan-Resiga, R. F., (2009), Hemodynamic

analysis of the residual stenoses after coronary angioplasty, *Scientific bulletin of The Politehnica University of Timisoara, Romania transactions on mechanics*, Vol.54, pp.49-56.

[3] Yasuda, K., Ph.D. Thesis, MIT, Cambridge. MA, 1979.

[4] Banerjee, R.K., Back, L. H., Back, M. R. and Cho, Y. I., (2000), Physiological flow simulation in residual human stenoses after coronary angioplasty, *ASME*, Vol.122, pp.310-320.

[5] Ben-Mansour, R., Badr, H.M., Qaiyum Shaik, A. and Maalej, N., (2008), Modeling of pulsatile blood flow in an axisymmetric tube with a moving indentation, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol.33, pp. 529-550.

[6] Tang, D., Yang, C., Kobayashi, S., Zheng, J., and Vito, R. P., (2003), Effect of stenosis asymmetry on blood flow and artery compression: A three-dimensional fluid-structure Interaction model, *Annals of biomedical engineering*, Vol.31, pp. 1182-1193.

[7] Amornsamankul S., Wiwatanapataphee B., Wu, Y. H. and Lenbury, Y., (2005), Effect of non-Newtonian behaviour of blood on pulsatile flows in stenotic arteries, *J. of Biological and life Sciences*, Vol.1, pp.42-46.

[8] Casson, N., (1959), A flow equation for pigment oil suspensions of the printing ink type, *Pergamon Press*, pp. 84–102.

[9] Kim, S., Cho, Y. I., Hogenauer, W. N. and Kensey, K. R., (2002), A method of isolating surface tension and yield stress effects in a U-shaped scanning capillary-tube viscometer using a Casson model, *J. Non –Newtonian fluid mechanics*, Vol.103, pp.205-219,

[10] Boyd, J. and Buick, J. M., (2007), Analysis of the Casson and Carreau-Yasuda non-Newtonian

blood models in steady and oscillatory flows using the lattice Boltzmann method, *J. Physics of fluid*, Vo.19,

[11] Johnston, B.M., Johnston, P.R., Corney, S. and Kilpatrick, D., (2004), Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries; steady state simulations, *J. of Biomechanics*, Vol.37, pp.709-720.

[12] Gijsen, F.J.H., Van de Vosse, F.N. and Janssen, J.D., (1999), The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model, *J. of Biomechanics*, Vol.32, pp.601-608.

[13] Ji, H. S., Lee, J. Y., and Lee, S. J., (2007), In vitro study on the hemorheological characteristics of chicken blood in microcirculation, *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol.19, pp.89-95.

[14] ปราโมทย์ เตชะอำไพ (2545). ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[15] วิเศษ ศักดิ์ศิริ . วิธีสร้างตาข่ายรูปสามเหลี่ยมบนโครงสร้างสองมิติสำหรับแบบวิธีไฟไนต์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.