

การตรวจสอบผลเฉลยจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มนกดตรงกันข้าม ตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางด้วยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นโดยแสงเชิงดิจิตอล

Validation of Theoretical Elastic Solution of Circular Ring under Diametral Compression by Digital Photoelasticity

ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิชเชษฐ์ พินิจ *

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140
โทร 0-2470-8522 โทรสาร 0-2470-8527 *อีเมลล์ pichet.pin@kmutt.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการตรวจสอบผลเฉลยจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มนกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางด้วยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสง ด้วยการประยุกต์ใช้สมการองค์ประกอบความเค้นในพิกัดเชิงขั้วซึ่งกำหนดหาได้จากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นกับสมการความเข้มแสงที่กำหนดโดยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงแบบฉากหลังมืดและแบบฉากหลังสว่างของอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงเชิงระนาบโดยมีแหล่งกำเนิดแสงสีขาว สามารถจำลองรูปแบบริ้วสนามความเค้นได้ จากการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพพบว่าภาพริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการจำลองแบบทั้งแบบฉากหลังมืดและสว่างมีความใกล้เคียงกับภาพที่ได้จากการทดลองเป็นอย่างมาก

Abstract

This paper is to present a validation test for a theoretical solution of a circular ring under diametral compression by photoelasticity. With the use of equations of the polar stress components derived from the theory of elasticity and the light intensity equation derived from photoelasticity based on the dark- and bright-field plane polariscope with the three primary wavelengths of the white light as the light source, the stress fringe field of the circular ring can be successfully simulated. On the basis of qualitative comparison, the results reveal that the simulated fringes show a very high degree of closeness to the experimentally obtained fringe patterns.

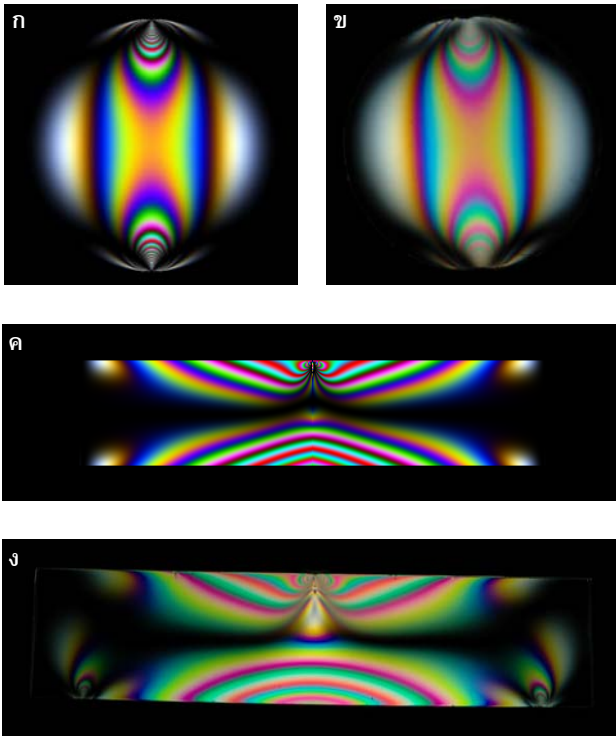
1. คำนำ

วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงนี้เป็นวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์กำหนดค่าขนาดและทิศทางของความเค้นซึ่งเกิดในชิ้นส่วน

ของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลต่างๆ หนึ่งในสมบัติที่โดดเด่นของวิธีนี้ก็คือน่าเชื่อถือ ผลลัพธ์ที่ได้ออกมาจะอยู่ในรูปของสนามความเค้น (Stress Field) แม้ว่าในปัจจุบันนี้จะมีวิธีการเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความเค้น เช่น วิธีส่วนย่อยจำกัด (Finite Element Method) วิธีวิเคราะห์ความเค้นนี้ก็ยังมีบทบาทสำคัญในการช่วยเหลือนหรือเป็นส่วนเติมเต็มวิธีเชิงตัวเลข เช่น ช่วยในการยืนยันผลของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนที่มีความซับซ้อนหรือช่วยในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตซึ่งไม่สามารถกระทำได้โดยง่ายในวิธีเชิงตัวเลข นอกจากนี้เนื่องมาจากการพัฒนาอุปกรณ์ทางด้านการบันทึกข้อมูลให้มีศักยภาพที่สูง วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงแผนเดิมจึงได้ถูกพัฒนาโดยรวมเข้ากับอุปกรณ์เหล่านั้นทำให้ได้วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงแผนใหม่หรือแบบดิจิตอล (Digital Photoelasticity) ซึ่งผลแห่งการรวมนี้ทำให้วิธีวิเคราะห์ความเค้นนี้มีศักยภาพสูงมากขึ้นทั้งในด้านความถูกต้องและความรวดเร็ว [1] ที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากว่าสนามความเค้นจะถูกบันทึกในรูปของข้อมูลเชิงดิจิตอล (รูปภาพของความเข้มแสง) ซึ่งการนำข้อมูลนี้ไปใช้งานจึงกระทำได้ง่ายและสะดวก

ในการศึกษาเกี่ยวกับวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงนั้นจะมีตัวแปร 2 ตัวแปรซึ่งสัมพันธ์กับความเค้นที่เกิดขึ้นในโครงสร้างหรือชิ้นส่วนหนึ่งๆ ตัวแปรทั้งสองนี้ก็คือ ตัวแปรไอโซโครมาติก (σ) และตัวแปรไอโซคลีนิก (ϕ) ตัวแปรไอโซโครมาติกนั้นจะเกี่ยวข้องกับค่าความแตกต่างของความเค้นหลัก ($\sigma_1 - \sigma_2$) ในขณะที่ตัวแปรไอโซคลีนิกจะบ่งบอกทิศทางของความเค้นหลัก σ_1 หรือ σ_2

วิธีการเพื่อกำหนดหาตัวแปรทั้งสองตัวแปรนั้นมีหลายวิธี เช่น วิธีวิเคราะห์ค่าสเปกตรัม (Spectrum Content Analysis), วิธีการเลื่อนเฟส (Phase Shifting Method), วิธีการปรับค่าภาระ (Load-stepping Method) และวิธีวิเคราะห์ด้วยฟูเรียร์ (Fourier Analysis) [1] อย่างไรก็ตามในบรรดาวิธีเหล่านี้วิธีการเลื่อนเฟสเป็นวิธีการที่นิยมใช้มากที่สุดเนื่องมาจากว่าความไม่ยุ่งยากในการปฏิบัติการทดลองรวมทั้งสามารถวิเคราะห์ได้ทั้งสองตัวแปร ความถูกต้องเชิงตัวเลขของผลลัพธ์

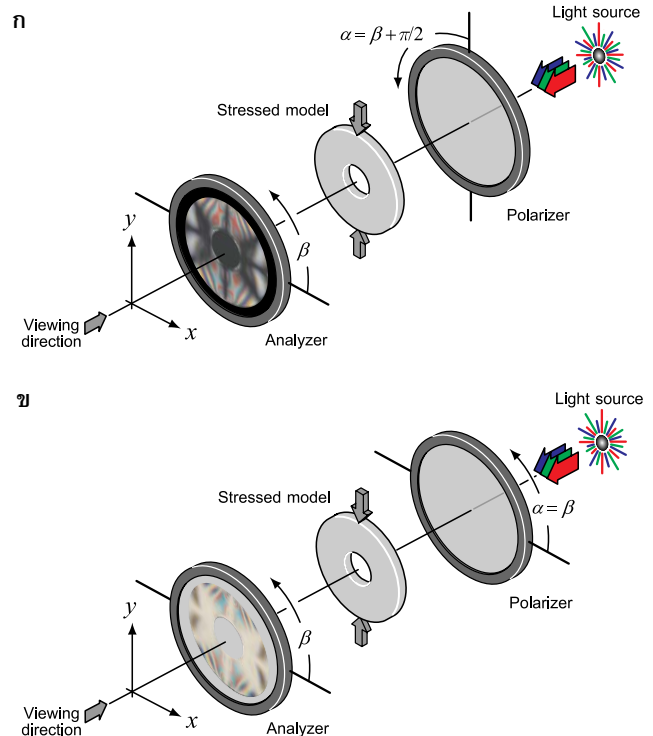


รูปที่ 1 ภาพสี (RGB) 24 บิต ของริ้วสนามความเค้นของแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางและคานสี่เหลี่ยมรับแรงเข้มกดที่กึ่งกลางโดยที่มุมแผ่นวิเคราะห์ที่ใช้ในการจำลองมีค่าเท่ากับ $\pi/4$ (ก) และ (ข) เป็นภาพแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางที่ได้จากการจำลองแบบและจากการทดลองตามลำดับ และ (ค) และ (ง) เป็นภาพคานสี่เหลี่ยมรับแรงเข้มกดที่กึ่งกลางที่ได้จากการจำลองแบบและจากการทดลองตามลำดับ [2]

ที่ได้จากวิธีการเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับสมการความเค้นแสงและอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงที่ใช้

เพื่อเป็นการตรวจสอบความสามารถของเทคนิคหรือวิธีการที่คิดค้นขึ้นใหม่นั้นนักวิจัยส่วนใหญ่จะใช้ตัวแบบมาตรฐาน กล่าวคือแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นตัวตรวจสอบ อย่างไรก็ตามตัวแบบนี้มีข้อจำกัดในการใช้เพื่อตรวจสอบเพราะว่าริ้วสนามความเค้นของตัวแบบนี้นอกจากไม่ค่อยมีความซับซ้อนแล้วยังไม่มีความต่อเนื่อง (Discontinuities) โดยที่ความไม่ต่อเนื่องนี้เป็นตัวแปรสำคัญในกระบวนการคืนรูป (Phase Unwrapping) ดังนั้นการใช้ตัวแบบอื่นที่มีริ้วสนามความเค้นตามที่ต้องการ [1] ก็จะทำให้สามารถพัฒนาวิธีการใหม่ๆ ที่ครอบคลุมปัญหาในหลายๆ ลักษณะและประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวางมากขึ้น

ไม่นานมานี้คณะผู้วิจัยในนำเสนอตัวแบบคานสี่เหลี่ยมรับแรงเข้มกดที่กึ่งกลางเพื่อใช้เป็นตัวแบบมาตรฐาน [2] ซึ่งภาพจำลองที่ได้มีความใกล้เคียงเป็นอย่างมากกับริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการทดลองรูปที่ 1 แสดงริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการจำลองแบบและจากการทดลองของตัวแบบแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางและคานสี่เหลี่ยมรับแรงเข้มกดที่กึ่งกลางอย่างไรก็ตามในริ้วสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยมจะเกิดจุดที่ไม่ต่อเนื่องที่



รูปที่ 2 อุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงเชิงระนาบ (ก) การจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังมืด และ (ข) การจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังสว่าง อุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงเชิงระนาบนี้ประกอบไปด้วยอุปกรณ์สำคัญคือ แผ่นโพลาไรเซอร์, ตัวแบบและแผ่นนาไลเซอร์หรือแผ่นวิเคราะห์ มุม α , ϕ และ β คือมุมระหว่างแกนแสงของแผ่นโพลาไรซ์, ทิศทางความเค้นหลัก σ_1 และแกนแสงของแผ่นวิเคราะห์กับแนวแกนอ้างอิง (แกน x) ตามลำดับ

ใกล้เคียงกันตามทฤษฎีของ Wilson-Stokes [3] แต่ยังมีปัญหาอีกหลายๆ ปัญหาที่จุดที่ไม่ต่อเนื่องนั้นเกิดขึ้นเป็นเฉพาะจุดที่ไม่มีความเกี่ยวเนื่องกันหรือตำแหน่งไม่ใกล้เคียงกัน

ดังนั้นเพื่อให้ครอบคลุมลักษณะดังที่กล่าวข้างต้นบทความวิจัยนี้จะนำเสนอการจำลองแบบรูปแบบริ้วสนามความเค้นของตัวแบบแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (A Circular Ring under Diametral Compression) สำหรับในทางปฏิบัติ นั้นตัวแบบแผ่นวงแหวนนี้สามารถนำไปใช้ในการสร้างวงแหวนเปรียบเทียบเพื่อใช้ในการทำเซลล์ภาระ (Load Cell) [4]

2. สมการความเค้นแสงจากอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงเชิงระนาบ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นว่าวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงนั้นจะให้ผลลัพธ์ออกมาในรูปของแผนภาพความเค้นแสงดังนั้นสมการที่ใช้อธิบายรูปแบบริ้วสนามความเค้นนั้นจึงอยู่ในรูปของความเค้นแสง สำหรับแบบจำลองทั่วไปทางคณิตศาสตร์ของความเค้นแสงนั้นจะอยู่ในพจน์ของตัวแปรหลายตัวแปร [2] อย่างไรก็ตามจะไม่ขอกล่าวในที่นี้และจะมุ่งสนใจในกรณีของสมการความเค้นแสงอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงเชิงระนาบเท่านั้น รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถดูได้ใน [1]

รูปที่ 2 แสดงภาพจำลองของอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงเชิงระนาบที่ประกอบไปด้วย แหล่งกำเนิดแสง, แผ่นโพลาไรเซอร์, ตัวแบบและแผ่น

อนาไลเซอร์หรือแผ่นวิเคราะห์ จากภาพและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั่วไปจะเห็นว่า ค่าความเข้มแสงจะมีค่าขึ้นอยู่กับมุมของแผ่นโพลาไรเซอร์และแผ่นวิเคราะห์ ดังนั้นด้วยการหมุนหรือเปลี่ยนค่ามุมเหล่านี้ไปตามความเหมาะสมแล้วก็จะได้ผลการความเข้มแสงหลายๆ สมการที่เพียงพอและเมื่อนำมาประกอบกันตามหลักการทางคณิตศาสตร์และก็สามารถใช้กำหนดหาตัวแปร α และ ϕ ได้ หลักการดังกล่าวนี้คือวิธีการเลื่อนเฟส

2.1 วิศวกรรมความเค้นแบบฉากหลังมืด

สมการความเข้มแสง I ที่ผ่านออกมาจากแผ่นวิเคราะห์ ณ จุดพิกัด (x, y) ใดๆ เมื่อจัดตำแหน่งให้แกนแสงของแผ่นโพลาไรซ์และแผ่นวิเคราะห์ตั้งฉากกัน ($\alpha = \beta + \pi/2$) ซึ่งเรียกว่า การจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังมืด (Dark-field Setup) (รูปที่ 2ก) คือ [1]

$$I = I_p \sin^2(\pi N) \sin^2 2(\phi - \beta) + I_b \quad (1)$$

โดยที่ I_p คือความเข้มแสงที่ออกมาจากแผ่นโพลาไรเซอร์, N คืออันดับรี้วและ I_b คือความเข้มแสงฉากหลัง

จากสมการ (1) จะเห็นได้ว่า ค่าความเข้มแสง I จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ และ $\phi = \beta$ หรือ $\phi = \beta + \pi/2$ ซึ่งตำแหน่งใดๆ ที่ค่าของ N และ ϕ สอดคล้องกับเงื่อนไขเหล่านี้ก็จะเกิดแถบมืดขึ้นที่ตำแหน่งเหล่านั้น

2.2 วิศวกรรมความเค้นแบบฉากหลังสว่าง

สำหรับการจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังสว่าง (Bright-field Setup) นั้นสามารถกระทำได้เช่นกันโดยกำหนดให้ $\alpha = \beta$ (รูปที่ 2ข) ซึ่งก็จะได้สมการความเข้มแสง I คือ [1]

$$I = I_p [1 - \sin^2(\pi N) \sin^2 2(\phi - \beta)] + I_b \quad (2)$$

จากสมการ (2) จะเห็นได้ว่า ค่าความเข้มแสง I จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $N = 0, \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ และ $\phi = \beta$ หรือ $\phi = \beta + \pi/2$ ซึ่งตำแหน่งพิกัดใดๆ ที่ค่าของ N และ ϕ สอดคล้องกับเงื่อนไขเหล่านี้ก็จะเกิดแถบสว่างขึ้นที่ตำแหน่งเหล่านั้น ฟังก์ชันก่อดำเนินรี้ว N จะมีค่าเป็นสัดส่วนของ $1/2$ และรี้วสว่างที่เกิดขึ้นจะเป็นตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งที่เกิดแถบมืดในวิศวกรรมความเค้นที่ได้จากการจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังมืด

3. การจำลองแบบวิศวกรรมความเค้น

พิจารณาสมการ (1) และ (2) พบว่าค่าความเข้มแสงจะมีค่าแปรเปลี่ยนไปตามค่าอันดับรี้ว, ค่ามุม ϕ และค่ามุม β ของแผ่นวิเคราะห์ ดังนั้นส่วนสำคัญคือการกำหนดหาอันดับรี้วและทิศทางของความเค้นหลักซึ่งกำหนดหาได้จากองค์ประกอบความเค้น

3.1 องค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

องค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วของแผ่นวงแหวนรับแรงเค้นกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางนั้นเกิดจากการใช้สมการองค์ประกอบความเค้นของแผ่นวงกลมรับแรงเค้นกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (A Circular Disk under Diametral Compression) รวมกับพจน์ปรับแก้ไข ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ [5]

$$\sigma_{rr} = \frac{2P}{\pi b} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} \left(\frac{1-r^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{(1-r \cos \theta)(\cos \theta - r)^2}{(1+r^2-2r \cos \theta)^2} - \frac{(1+r \cos \theta)(\cos \theta + r)^2}{(1+r^2+2r \cos \theta)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)(n-2)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} + (n+2)(n-1)d'_n r^{-n}] \cos n\theta \right\}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P}{\pi b} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} \left(\frac{1+r^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{(1-r \cos \theta) \sin^2 \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^2} - \frac{(1+r \cos \theta) \sin^2 \theta}{(1+r^2+2r \cos \theta)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+2)(n+1)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} + (n-2)(n-1)d'_n r^{-n}] \cos n\theta \right\}, \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi b} \left\{ \frac{(1-r \cos \theta)(\cos \theta - r) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^2} + \frac{(1+r \cos \theta)(\cos \theta + r) \sin \theta}{(1+r^2+2r \cos \theta)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} n \sin n\theta [(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)d_n r^n - (n+1)c'_n r^{-n-2} - (n-1)d'_n r^{-n}] \right\}, \quad (5)$$

โดยที่ P คือแรงเค้นต่อหนึ่งหน่วยความหนา t ของตัวแบบ, a และ b คือรัศมีภายในและภายนอกตามลำดับ, $\rho = a/b$, $r = R/b$ (ดูรูปที่ 3) และ n คือจำนวนพจน์ที่ใช้ในการกำหนดผลรวม

สำหรับตัวแปรอื่นๆ สามารถกำหนดค่าได้ดังนี้

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left\{ n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) - n \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 \right\}, \quad (6)$$

$$d_n = \frac{1}{2(n+1)D} \left\{ n^2 \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 + n \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (\rho^{2n} - 1) \right\}, \quad (7)$$

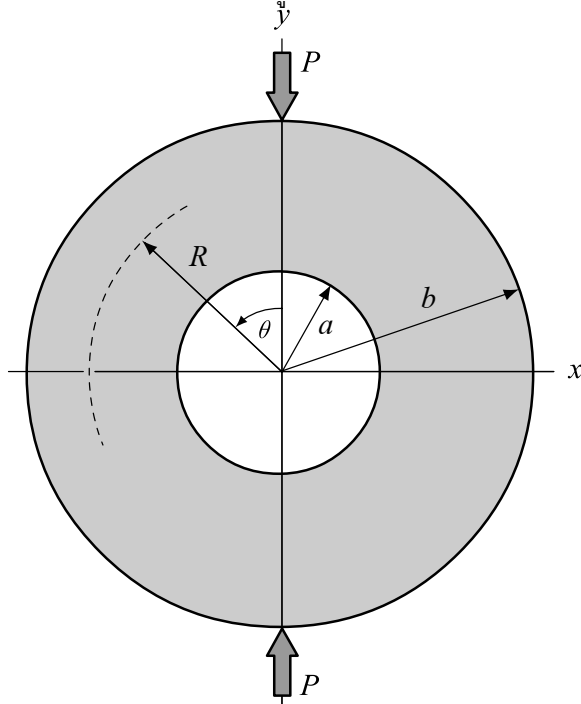
$$c'_n = \frac{1}{2(n+1)D} \{ n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) \}, \quad (8)$$

$$d'_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left\{ n \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (\rho^{2n} - 1) \right\}, \quad (9)$$

และ

$$D = n^2 \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 - \left(\rho^n - \frac{1}{\rho^n} \right)^2 \quad (10)$$

ในการคำนวณหาองค์ประกอบความเค้นทั้งสามนั้น ค่าของตัวแปร n ที่ใช้จะต้องเป็นเลขจำนวนคู่เท่านั้น



รูปที่ 3 ลักษณะทางกายภาพของตัวแบบแผ่นวงแหวนรับแรงเข้กดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางและทิศทางของแรงกระทำในแกนพิกัด x - y [5]

3.2 การกำหนดหาตัวแปรไอโซคลีนิกและไอโซโครมาติก

จากกฎแห่งแสงและความเค้น (Stress-optic Law) ความสัมพันธ์ระหว่างอันดับริ้วและความแตกต่างของความเค้นหลัก สามารถเขียนได้ว่า [1]

$$N = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{Ct}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (11)$$

หรือ

$$\frac{Nf_\sigma}{t} = (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (12)$$

โดยที่ $f_\sigma = \lambda / C$, λ คือความยาวคลื่นแสงของแหล่งกำเนิดแสง และ C คือค่าสัมประสิทธิ์สัมพัทธ์ทางแสงและความเค้นซึ่งหาค่าได้จากการเปรียบเทียบ (Calibration) และ t คือความหนา

ความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างของค่าความเค้นหลัก ($\sigma_1 - \sigma_2$) กับองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดฉาก สามารถแสดงได้ดังนี้คือ

$$N = \frac{t}{f_\sigma} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 \}^{1/2} \quad (13)$$

สำหรับทิศทางของความเค้นหลักนั้นสามารถกำหนดหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ทางทฤษฎี ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} \quad (14)$$

3.3 เงื่อนไขการจำลองแบบและวิธีการ

พิจารณาสมการ (1) และ (2) พบว่า ตัวแปรที่จะต้องมีการกำหนดค่าก่อนการจำลองแบบคือ ค่าความเค้นแสง I_p และ I_b ดังนั้น เพื่อให้การจำลองแบบมีความสมบูรณ์ จึงกำหนดเงื่อนไขการจำลองแบบดังต่อไปนี้

- ตัวแบบทำจากแผ่นอีพอกซีเรซิน ขนาดความหนา $t = 6$ มิลลิเมตร และในรูปที่ 3 แรงกระทำ $P = 274$ นิวตัน, $a = 5$ มิลลิเมตร และ $b = 15$ มิลลิเมตร
- I_p จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 255 (8 บิต) สำหรับแต่ละสีหรือความยาวคลื่น ในที่นี้จะทำการจำลองทั้งหมดสามสีที่ ซึ่งเป็นสีองค์ประกอบมูลฐานของสีขาว กล่าวคือ สีแดง (612 นาโนเมตร), สีเขียว (547 นาโนเมตร) และสีน้ำเงิน (437 นาโนเมตร) สำหรับค่าสัมประสิทธิ์รีฟlection ของวัสดุ ที่ความยาวคลื่นทั้งสามค่ากำหนดหาโดยการปรับเทียบนั้นคือ $f_{\sigma,R} = 11.20$, $f_{\sigma,G} = 10.01$ และ $f_{\sigma,B} = 8.000$ นิวตันต่อมิลลิเมตรต่อรีฟlection ค่าทั้งสามนี้จะถูกใช้ในสมการที่ (13) ซึ่งรีฟlection ที่เกิดขึ้นก็จะมีลักษณะคล้ายคลึงหรือเสมือนกับการใช้แหล่งกำเนิดที่เป็นแสงสีขาว
- I_b จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 เนื่องจากว่าค่าความเค้นแสงฉากหลังนี้เป็นเพียงค่าที่ทำให้รูปคลื่นของความเค้นแสงเลื่อนขึ้นไปตามแนวตั้งเท่านั้น (ดูสมการ (1) และ (2)) อย่างไรก็ตามผลของความเค้นแสงฉากหลังนี้จะไม่สามารถเห็นได้ในแผนภาพรีฟlection ที่ได้จากการจำลองอันเนื่องมาจากการปรับเปลี่ยน (Mapping) ค่าความเค้นแสงของรีฟlection มาเป็นรูปภาพ

สำหรับวิธีการจำลองแบบนั้นจะเริ่มจาก 1.) คำนวณหาองค์ประกอบความเค้นทั้งสามโดยสมการ (3) ถึง (5) และแปลงให้อยู่ระบบพิกัดอ้างอิงฉากโดยสมการการแปลงความเค้น 2.) คำนวณหาอันดับริ้วและทิศทางความเค้นหลักโดยอาศัยสมการ (13) และ (14) 3.) แทนค่าอันดับริ้วและทิศทางความเค้นหลักที่ได้ในสมการ (1) และ (2) ก็จะได้ลักษณะของส่วนใดส่วนหนึ่งของรีฟlection จุดที่พิจารณา และ 4.) ทำซ้ำเช่นนี้สำหรับทุกๆ จุดที่อยู่ในขอบเขตของตัวแบบ (รูปที่ 3)

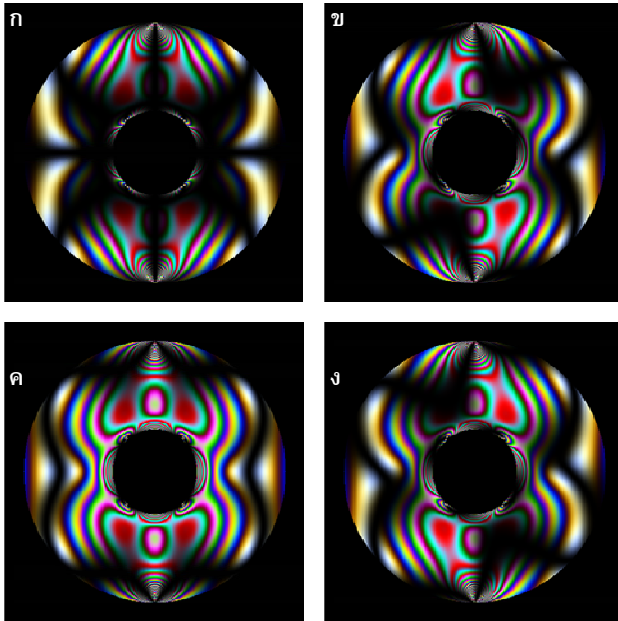
4. ผลลัพธ์และการอภิปรายผล

ในส่วนนี้จะได้นำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองแบบและการทดลองเพื่อเปรียบเทียบกันเชิงคุณภาพและการอภิปรายผล

4.1 รีฟlection ความเค้นแบบฉากหลังมืด

รูปที่ 4 แสดงภาพรีฟlection ความเค้นที่ได้จากการจำลองแบบด้วยเงื่อนไขดังที่ได้กล่าวในหัวข้อที่ 3.3 ที่มุมแผ่นวิเคราะห์ต่างๆ กันโดยที่ค่าของมุมที่เปลี่ยนไปนั้นจะเป็นไปตามหลักการของวิธีการเลื่อนเฟส [6] สำหรับรูปที่ 5 นั้น แสดงภาพรีฟlection ความเค้นที่ได้จากการทดลอง

จากการทดลองโดยเงื่อนไขทั้งหมดจะเหมือนกับรูปที่ 4 พึงสังเกตว่าแถบสีดำนั่นคือแถบของรั้วไอโซคลินิก ส่วนแถบสีนั้นจะเป็นแถบของรั้ว



รูปที่ 4 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด 400×400 พิกเซล ของแผ่นวงแหวนที่ได้จากการจำลองแบบตามค่ามุมที่เปลี่ยนไปของแผ่นวิเคราะห์ (ก) $\beta = 0$, (ข) $\beta = \pi/8$, (ค) $\beta = \pi/4$ และ (ง) $\beta = 3\pi/8$ โดยที่ภาพทั้งหมดได้จากการใช้สมการ (1) โดยที่ $n = 10$

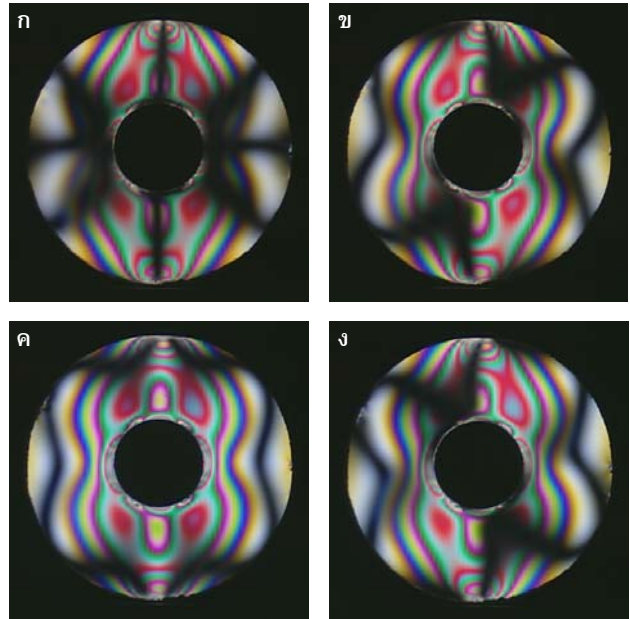
ไอโซโครมาติก ในการจำลองแบบสำหรับรูปที่ 4 นั้นจะใช้ $n = 10$

จากการเปรียบเทียบพบว่าลักษณะของรั้วสนามความเค้นในรูปที่ (4) และ (5) นั้นมีความคล้ายคลึงกันมาก แต่มีความแตกต่างกันในส่วนของความคมชัด ทั้งนี้เนื่องมาจากผลของความเข้มแสงฉากหลังที่ไม่สามารถขจัดออกไปได้ในกระบวนการทดลอง

ความแตกต่างอีกส่วนหนึ่งที่ได้สังเกตเห็นคือว่า บริเวณที่มีค่าความเค้นสูง กล่าวคือ ตรงบริเวณที่แถบของรั้วไอโซโครมาติกมีความถี่มาก (พิจารณาบริเวณขอบด้านในของตัวแบบในรูปที่ 4ค) เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 5 และจะเห็นได้ว่าภาพที่ได้จากการทดลองนั้นมีความไม่ชัดเจนของแถบทำให้การนับจำนวนแถบหรือรั้วอันดับกระทำได้ยากมากและสิ่งนี้จะส่งผลต่อการคำนวณหาค่าอันดับรั้วด้วยวิธีการเชิงดิจิทัล ดังนั้นค่าอันดับรั้วสูงสุดที่สามารถคำนวณได้จึงมีค่าประมาณ 3 ถึง 4 อันดับ เท่านั้น [1]

สำหรับสาเหตุที่แท้จริงนั้นเป็นเพราะการกระเจิงของแสงในขณะที่เคลื่อนที่ผ่านตัวแบบ (พิจารณาค่า f_0 ซึ่งเป็นเป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่นแสง) ซึ่งเป็นผลให้ค่าขนาด (Amplitude) ของรูปคลื่นของแสงลดลงและที่บริเวณที่ความเค้นมีค่าสูงมากๆ อัตราการลดลงนี้จะมีค่ามากซึ่งทำให้รูปคลื่นของทั้งสามสีมีลักษณะคล้ายกันกล่าวคือ รูปคลื่นจะค่อยๆ กลายเป็นเส้นตรง ซึ่งเมื่อแสดงออกมาในรูปของภาพก็จะเกิดการมัวและมีลักษณะของสีเทา อย่างไรก็ตามปัญหานี้จะไม่เกิดกับภาพที่ได้จากการจำลองแบบเพราะว่าค่าขนาดของรูปคลื่นจะมีค่าคงตัว (พิจารณาค่าความเข้มแสง I_p)

นอกจากนี้หากพิจารณาที่จุดที่แรงกระทำจะพบว่าภาพที่ได้จากการจำลองจะมีความแตกต่างจากภาพที่ได้จากการทดลองเช่นกัน กล่าวคือรั้วสนามความเค้นของภาพในรูปที่ 4 อันดับรั้วสูงสุดจะอยู่ที่จุด



รูปที่ 5 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด 400×400 พิกเซล ของแผ่นวงแหวนที่ได้จากการทดลองตามค่ามุมที่เปลี่ยนไปของแผ่นวิเคราะห์ (ก) $\beta = 0$, (ข) $\beta = \pi/8$, (ค) $\beta = \pi/4$ และ (ง) $\beta = 3\pi/8$ โดยที่ภาพทั้งหมดได้จากการใช้สมการ (1) โดยที่ $n = 10$

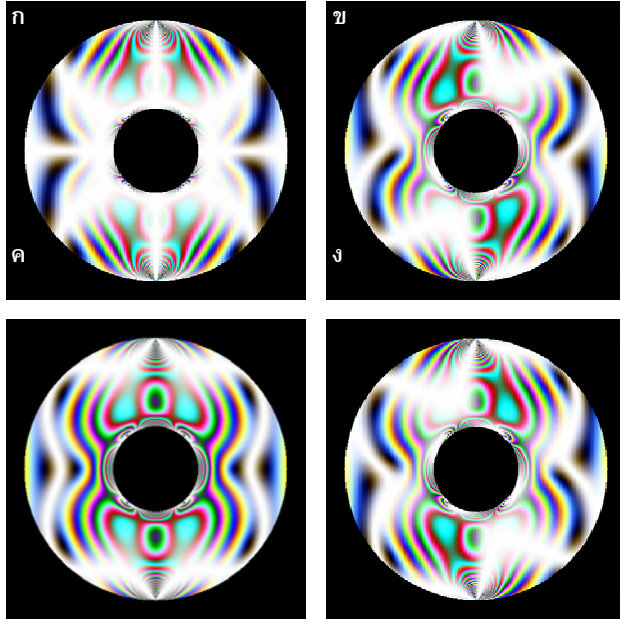
ที่แรงกระทำ ในขณะที่ในรูปที่ 5 นั้นอันดับรั้วสูงสุดจะอยู่ที่ตำแหน่งใกล้กับจุดที่แรงกระทำโดยเลื่อนเข้ามาด้านในตัวแบบเล็กน้อย (สังเกตรูปวงรีที่ปรากฏบริเวณใกล้เคียงกับจุดที่แรงกระทำ) ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นไปตามหลักการของ Saint Venant ที่กล่าวไว้ว่า หากแรงหนึ่งที่กระทำต่อพื้นที่ ขนาดเล็กๆ ถูกแทนด้วยระบบของแรงอื่นที่สมมูลกันและกระทำต่อพื้นที่เดียวกันแล้ว ระบบแรงใหม่นี้จะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของรูปแบบรั้วในบริเวณใกล้ๆ กับจุดที่ระบบแรงกระทำเท่านั้น โดยที่ไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงใดๆ ในบริเวณที่ห่างออกไปจากพื้นที่นี้เป็นระยะทางหนึ่งๆ ที่ยาวกว่ามิติเชิงเส้นของพื้นที่นั้น [3] ในส่วนของลักษณะวงรีที่เกิดขึ้นในรูปที่ 5 นั้นสอดคล้องกับคำอธิบายของ Frocht [3] ว่า ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นบริเวณใกล้กับจุดที่แรงกระทำนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันตามลักษณะของโครงภาระ (Load Frame) ที่ทำให้เกิดแรงกระทำต่อตัวแบบ กล่าวคือแบบสลัก (Pin) หรือแบบแท่งแบนราบ (Flat Bar) โดยที่หากใช้แท่งแบนราบแล้วก็จะเกิดรูปรั้ววงรีซึ่งสอดคล้องกับการได้มาของภาพในรูปที่ 5

4.2 รั้วสนามความเค้นแบบฉากหลังสว่าง

รูปที่ 6 และ 7 แสดงภาพรั้วสนามความเค้นที่ได้จากการจำลองโดยใช้ $n = 10$ และจากการทดลองแบบฉากหลังสว่าง อย่างไรก็ตามเพื่อความสะดวกในการสังเกตภาพจึงได้เปลี่ยนฉากหลังเป็นสีดำ

จากรูปจะเห็นได้ชัดเจนว่าแถบสีดำนั่นแสดงถึงรั้วไอโซคลินิกในรูปที่ 4 หรือ 5 ได้กลายเป็นสีขาว นอกจากนี้แถบสีซึ่งแสดงถึงรั้วไอโซโคร-

มาตานั้นก็มีการเปลี่ยนแปลงไปทั้งนี้เนื่องมาจากสมการ (2) กล่าวคือ ความแตกต่างของอันดับรั้วที่สามารถวัดได้นั้นคือ $1/2$ ในส่วนของ ความแตกต่างในลักษณะอื่นๆ ก็จะมีเหมือนกับภาพริ้วสนามความเค้น



รูปที่ 6 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด 400×400 พิกเซล ของ แผ่นวงแหวนที่ได้จากการจำลองแบบตามค่ามุมที่เปลี่ยนไปของแผ่น วิเคราะห์ (ก) $\beta = 0$, (ข) $\beta = \pi/8$, (ค) $\beta = \pi/4$ และ (ง) $\beta = 3\pi/8$ โดยที่ภาพทั้งหมดได้จากการใช้สมการ (2) โดยที่ $n = 10$

แบบฉากหลังมืดซึ่งสาเหตุต่างๆ ได้อธิบายแล้วในหัวข้อที่ 4.1

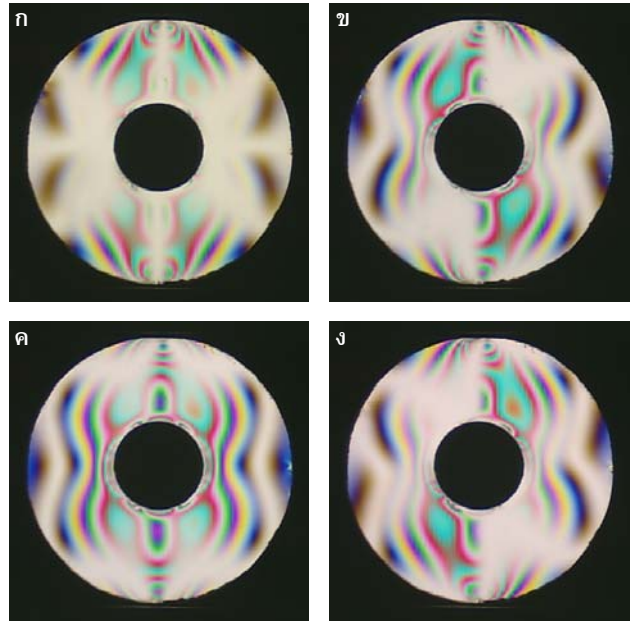
สำหรับภาพแบบฉากหลังสว่างนั้นจะไม่ค่อยนิยมใช้ในการ คำนวณหาค่าตัวแปรไอโซคลินิกและไอโซโครมาติก [1] ทั้งนี้เพราะค่า ความเข้มแสงจะมีค่าค่อนข้างสูงซึ่งเมื่อรวมกับค่าความเข้มแสงฉากหลัง แล้วจะทำให้ที่จุดหนึ่งๆ มีค่าความเข้มแสงที่สูงมากซึ่งส่งผลทำให้เกิด ค่าความเข้มแสงสุทธิที่เป็นตัวแปรในฟังก์ชันทางตรีโกณมิติมีค่าอยู่นอก ย่านของฟังก์ชันดังกล่าวซึ่งในท้ายสุดเป็นผลให้หาค่าตัวแปรไอโซ คลินิกหรือไอโซโครมาติกไม่ได้และเกิดลักษณะที่เรียกว่า หลังคาเรียบ (Flat Roof) ของการกระจายตัวของความเข้มแสงของตัวแปรนั้นๆ

5. บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอการจำลองแบบริ้วสนามความเค้นของ แผ่นวงแหวนรับแรงเค้นกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางโดย อาศัยสมการองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดอ้างอิงเชิงขั้วซึ่งอยู่ใน พจน์ของอนุกรม จากการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพของภาพริ้วสนาม ความเค้นที่ได้จากการจำลองแบบและที่ได้จากการทดลองพบว่ามีความ สอดคล้องกันทั้งแบบฉากหลังมืดและแบบฉากหลังสว่าง ส่วนที่มี ความแตกต่างกันนั้นก็จะเป็นไปตามหลักการของ Saint Venant

จากการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพระหว่างภาพริ้วสนามความเค้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่า ภาพริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการจำลองแบบ นี้สามารถใช้เป็นปัญหาที่ยากขึ้นสำหรับการประดิษฐ์วิธีการใหม่ใน การกำหนดค่าตัวแปรไอโซคลินิกและไอโซโครมาติก ซึ่งจะได้

ทำการศึกษาและวิจัยต่อไป



รูปที่ 7 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด 400×400 พิกเซล ของ แผ่นวงแหวนที่ได้จากการจำลองแบบตามค่ามุมที่เปลี่ยนไปของแผ่น วิเคราะห์ (ก) $\beta = 0$, (ข) $\beta = \pi/8$, (ค) $\beta = \pi/4$ และ (ง) $\beta = 3\pi/8$ โดยที่ภาพทั้งหมดได้จากการใช้สมการ (2)

เอกสารอ้างอิง

1. Ramesh, K. 2000. Digital Photoelasticity: Advanced Technique and Applications. Springer, Berlin Germany.
2. พิเชษฐ พินิจ, ณัฐวัฒน์ พลอยทับทิม และ ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์, 2551. การจำลองแบบริ้วสนามความเค้นเพื่อวิเคราะห์ความเค้น ในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสง, ในการสัมมนาวิชาการทาง วิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ครั้งที่ 6, หาดใหญ่, สงขลา, 8-9 พฤษภาคม 2551, บณชีตรอม บทความเลขที่ PEC6OR110, หน้า 659-664
3. Frocht, M.M., 1948. Photoelasticity, Vol. II, John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
4. ภาคภูมิ เอมทรัพย์ และ อภิวัฒน์ พลชัย, 2550. การออกแบบวง แหวนปรับเทียบบนพื้นฐานทฤษฎีความยืดหยุ่น. วิศวกรรมสาร มข., ปีที่ 34, ฉบับที่ 6, หน้า 657-670.
5. Chianese, R. B., and Erdlac, R. J., 1988. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 41, No. 2, pp. 239-247.
6. Pinit, P. and Umezaki, E., 2007. Digitally Whole-field Analysis of Isoclinic Parameter in Photoelasticity by Four-step Color Phase-shifting Technique. Optics and Laser in Engineering, Vol. 45, No. 7, pp. 795-807.