การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีสำหรับปัญหาที่มีการเคลื่อนตัวของขอบเขตด้วยวิธีแปรผันระยะกริด และวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ (กรณีศึกษา: กระบวนการฟรีซซิ่ง)

Theoretical Analysis of Moving Boundary Problem using Variable Space Grid Method and Boundary Fixed Method (Case Study : Freezing Process)

มณฑล ชูโชนาค และ ผดุงศักดิ์ รัตนเดโช*
หน่วยวิจัยเพื่อการใช้ประโยชน์จากไมโครเวฟในงานวิศวกรรม (R.C.M.E.)
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (ศูนย์รังสิต) อ.คลองหลวง จ. ปทุมธานี 12120
โทร 02-564-3001-9 โทรสาร 02-564-3010 *อีเมล์ ratphadu@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีสำหรับปัญหาของการฟรีซซิ่งวัสดุที่มีการเปลี่ยนเฟส(Phase change material) เมื่อมีการถ่ายเทความร้อนข้ามขอบเขตที่เคลื่อนที่โดยให้น้ำเป็นวัสดุที่มีการเปลี่ยนเฟส การศึกษาเริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อย ประกอบไปด้วย สมการการนำความร้อน (Heat conduction equation) ในแต่ละเฟส และสมการการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง(Moving boundary equation) หลังจากนั้นนำสมการเหล่านี้มาประยุกต์ใช้กับเทคนิควิธีการแปลงพิกัดแกน (Coordinate transformations) ที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีแปรผันระยะกริด (Variable space grid method) และวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ (Boundary fixing method) และใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลยของสมการทั้งหมด โดยอยู่บนพื้นฐานของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนซ์ (Finite-difference method) เพื่อทำนายการกระจายของอุณหภูมิภายในวัสดุและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง(Freezing front) ที่เวลาต่างๆ ในระบบหนึ่งมิติ และทำการเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่ได้จากการทำนายด้วยวิธีแปรผันระยะกริด วิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ และผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution)

จากการศึกษาพบว่าอัตราการเกิดผิวฟรีซซิ่งมีลักษณะเป็นแบบไม่เชิงเส้นสูงในช่วงแรกของกระบวนการ นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการทำนายกับค่าที่ได้จากสมการแม่นตรงพบว่ามีค่าที่สอดคล้องกัน องค์ความรู้ที่ได้จากการวิเคราะห์สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ทั้งเป็นความรู้พื้นฐานให้กับงานวิจัยในระดับที่สูงขึ้น และเป็นประโยชน์ต่องานทางวิศวกรรมที่หลากหลาย ซึ่งมีความสำคัญทั้งยังเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น การแข็งตัวในกระบวนการหล่อขึ้นรูปโลหะ กระบวนการถนอมอาหาร วิศวกรรมถนอมเนื้อเยื่อทางการแพทย์ เป็นต้น

คำสำคัญ : วัสดุที่มีการเปลี่ยนสถานะ ขอบเขตที่เคลื่อนที่ ผลเฉลยแม่นตรง วิธีแปรผันระยะกริด และ วิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่

Abstract

This paper focuses on the theoretical analysis of freezing process in phase change material which considers the moving boundary as the main parameter. In this study, water is considered as the phase change material. The formulation of partial differential equations is performed consisting heat conduction equation in each phase and moving boundary equation (Stefan equation). The variable space grid method and the boundary fixing method are then applied to these equations. The transient heat conduction equations and Stefan condition are solved by using the finite difference method. A one-dimensional freezing model is the then validated against the available analytical solution. The effect of constant temperature heat source on freezing rate and location of freezing front at various times is studied in detail.

It is found that the nonlinearity of freezing rate occurs for a short time. The successful comparison with numerical solution and analytical solution should give confidence in the proposed mathematical treatment, and encourage the acceptance of this method as useful tool for exploring practical problems such as solidification of alloys, food preservation process, cryopreservation of engineering tissues, and any others.

1. บทนำ

ปัญหาที่ทำการศึกษาจะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนเฟสของสาร (phase change) ลักษณะการเคลื่อนตัวของผิวฟรีซซิ่ง(Freezing front) การกระจายของอุณหภูมิภายในวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงเฟส (น้ำ) ของกระบวนการฟรีซซิ่ง(กระบวนการแข็งตัว) ในการศึกษาจะต้องอาศัยองค์ความรู้ในหลายสาขาเข้าด้วยกัน กล่าวคือ ความรู้ทางด้านการถ่ายเทความร้อนและมวลสาร กลศาสตร์ของไหล และวัสดุศาสตร์

รวมจนถึง คณิตศาสตร์ชั้นสูงควบคู่กับระเบียบวิธีเชิงคำนวณทางตัวเลขชั้นสูง เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง (Strongly non-linear problem) นอกเหนือจากนี้ยังคาบเกี่ยวกับปัญหาในลักษณะที่มีการเคลื่อนตัวของขอบเขต(Moving boundary problem) ซึ่งการวิเคราะห์ในเชิงทฤษฎีจะต้องอาศัยเทคนิคการแปลงพิกัด (Coordinate transformation) และการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีความแม่นยำและมีสมรรถนะสูง ปัญหาของการเปลี่ยนแปลงเฟสสามารถพบเห็นได้โดยทั่วไปในธรรมชาติและในระบบทางด้านวิศวกรรม เช่น การแข็งตัวในกระบวนการหล่อขึ้นรูปโลหะ กระบวนการถนอมอาหาร วิศวกรรมถนอมเนื้อเยื่อทางการแพทย์ เป็นต้น

เริ่มต้นจากปี ค.ศ. 1860 Neumann (H.S. Carslaw and J.C. Jaeger,1959), (J.C. Muehlbauer and J.E. Sunderland 1965) ได้ทำการศึกษาปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟส (กรณี 1-phase change problem) สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่มีอุณหภูมิคงที่จนสามารถหาคำตอบของปัญหาที่อยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นตรงในกรณี 1 มิติได้สำเร็จ ต่อมาในปี ค.ศ. 1889 Stefan (L.I. Rubinstein , 1971) ได้ศึกษาปัญหาเพิ่มเติมจนสามารถหาผลเฉลยในกรณี 2-phase-change problem ได้เช่นกัน กล่าวได้ว่านักวิจัยทั้งสองคนนี้ถือเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาปัญหาการของเปลี่ยนแปลงเฟสในยุคต่อมา ซึ่งทำให้สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้หลากหลายวิธี เช่น วิธี Neumann's Solution (John Crank, 1981), วิธี Similarity Transformation Method (H.S. Carslaw and J.C. Jaeger , 1959) , (A.B. Taylor , 1974) หรือวิธี Heat Balance Integral Methods (T.R. Goodman , 1961)

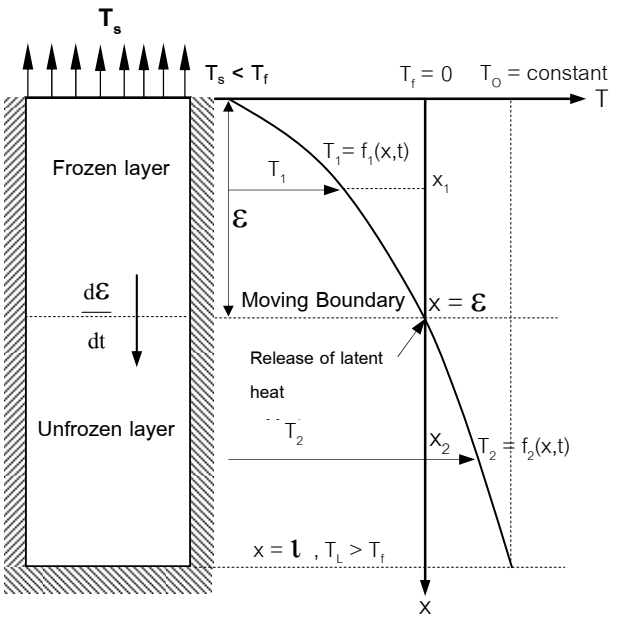
หลังจากนั้นต่อมาได้มีการพัฒนาเพื่อนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยแบบใหม่ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เช่น Murray และ Landis (Murray , 1959) ได้ทำการเปรียบเทียบระหว่างวิธีแปรผันระยะกริด (Variable space grid method) กับวิธีกำหนดระยะกริดแบบคงที่ (Fixed space grid method) พบว่าวิธีแรกจะมีความแม่นยำมากกว่าเนื่องจากมีค่าความคลาดเคลื่อนขณะเริ่มต้นน้อยกว่า Mastanaiah (1976) ได้ศึกษากระบวนการเปลี่ยนแปลงเฟสโดยใช้วิธี Taylor forward projection method และทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ผลเฉลยแม่นตรงพบว่ามีความสอดคล้องและใกล้เคียงกันของค่าทั้งสอง Rattanadecho (2004) ได้ศึกษาเชิงทฤษฎีและเชิงทดลองของกระบวนการทำแข็งในเกรนูลาร์แพคเบดที่ไม่อิ่มตัว ในระบบ 1 มิติ ซึ่งแบบจำลองของกระบวนการทำแข็งที่ทำศึกษาจะใช้เทคนิคการแปลงพิกัดแกนที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ (Boundary fixing method) ซึ่งพบว่าอัตราการดูดซึมของน้ำในโซนของแข็งในกระบวนการทำแข็งจะมีความสัมพันธ์กับฟลักซ์ความร้อนของการฟรีซซิ่งและค่าความอิ่มตัวของน้ำที่ผิวเชื่อมต่อระหว่างเฟส และค่าที่ได้จากการทำนายจะสอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลองเป็นอย่างดี ชยานนท์ เสริฐธิกุล และ ผดุงศักดิ์ รัตนเดโช (2550) ได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแก้ปัญหาการทำละลาย(กรณีวัสดุพรุนแบบอิ่มตัว) โดยใช้เทคนิควิธีแปรผันระยะกริด และทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ผลเฉลยแม่นตรงพบว่ามีความใกล้เคียงและสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกัน

ในงานวิจัยฉบับนี้ได้นำเทคนิควิธีการแปลงพิกัดแกน(Coordinate-transformations) ที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีแปรผันระยะกริด (Variable-space grid method) และวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ (Boundary fixing method) จากนั้นใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลยของสมการที่เกี่ยวข้องเพื่อทำนายการกระจายของอุณหภูมิภายในวัสดุและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง(Freezing front) ที่เวลาต่างๆ ในระบบ 1 มิติ และทำการเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่ได้จากการทำนายด้วยวิธีแปรผันระยะกริด วิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ และผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution)

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ลักษณะของแบบจำลองที่จะทำการศึกษาคือ จะทำการระบายความร้อนวัสดุที่เปลี่ยนแปลงเฟส(น้ำ) ที่อุณหภูมิต่างๆ ส่วนลักษณะการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งจะทำการพิจารณาในระบบ 1 มิติ ทิศทางแกน x และมีการถ่ายเทความร้อนเฉพาะแกนที่พิจารณาเท่านั้น ซึ่งวัสดุที่ใช้ในการศึกษามีความยาวทั้งหมดเท่ากับ 10 เซนติเมตร โดยในที่นี้เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์จะพิจารณาให้มีชั้นของโซนของแข็งเนื่องจากการฟรีซซิ่งเกิดขึ้นตั้งแต่ต้น

จากรูปที่ 1 แสดงให้เห็นถึงเส้นการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิทั้งในโซนของแข็งและโซนของเหลว โดยที่การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในโซนของแข็งจะอยู่ในรูปฟังก์ชัน T_1 และในโซนของเหลวจะอยู่ในรูปฟังก์ชัน T_2 โดยที่ T_o คือค่าอุณหภูมิที่จุดเริ่มต้นของวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงเฟส ซึ่งมีค่าเป็นบวกและคงที่ T_s คือค่าอุณหภูมิที่ป้อนให้แก่วัสดุด้านบน T_f คือค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่งผิวฟรีซซิ่ง และที่ตำแหน่ง $x = \varepsilon$ เป็นระยะที่บอกตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่ง ซึ่งจะค่อยๆ เคลื่อนที่ไปในแนวแกน x เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ในที่นี้กำหนดให้ 1 แทนโซนที่เป็นของแข็ง และ 2 แทนโซนที่เป็นของเหลว



รูปที่ 1. แสดงลักษณะแบบจำลองทางกายภาพของปัญหา

จากแบบจำลองทางกายภาพ (Physical model) ที่จะทำการศึกษาจะอยู่ภายใต้เงื่อนไขของสมมติฐานดังนี้

1) พิจารณาในระบบ 1 มิติ
2) หุ้มฉนวนบริเวณที่อยู่โดยรอบของชิ้นทดสอบยกเว้นด้านที่ให้โหลด
3) ไม่พิจารณาการพาความร้อนในโซนของเหลว
4) ไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเนื่องจากการฟรีซซิ่ง

ในส่วนของเงื่อนไขของระบบที่ใช้ในการวิเคราะห์ กำหนดให้ระบบที่พิจารณามีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น

ที่ตำแหน่ง $x > 0$, $t = 0$, $T_1 = T_O = \text{constant}$

เงื่อนไขขอบเขต

- ที่ตำแหน่ง $x = 0$, $t \geq 0$, $T_1 = T_s$
- ที่ตำแหน่ง $x = \iota = 0.1$ m , $t \geq 0$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- ที่ตำแหน่ง $x = \varepsilon(t)$, $t > 0$, $T_1 = T_2 = \text{constant} = T_f = 0$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงานเมื่อพิจารณาการนำความร้อนที่ผ่านปริมาตรควบคุมใดๆ ในกรณีการถ่ายเทความร้อนแบบหนึ่งมิติสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้อธิบายการถ่ายเทความร้อนทั้งบริเวณโซนของแข็งและโซนของเหลวในกรณี 1 มิติ ได้ดังนี้

1) สำหรับโซนของแข็ง (Frozen layer) $(0 < x < \varepsilon(t))$

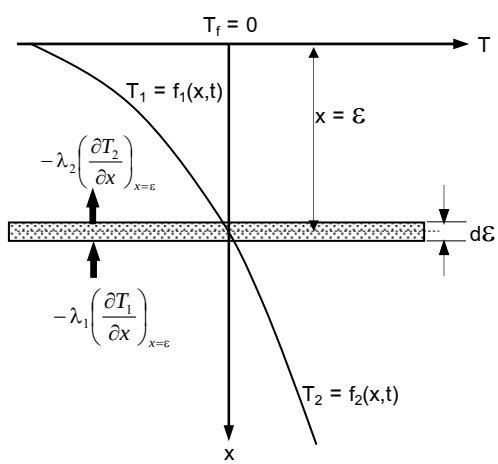
$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \tag{1}$$

2) สำหรับโซนของเหลว(Unfrozen layer) $(x > \varepsilon(t))$ (ไม่พิจารณาการพาความร้อน)

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \tag{2}$$

3) สำหรับที่ตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่ง $(x = \varepsilon)$

พิจารณาตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่ง $x = \varepsilon$ อุณหภูมิ 0 °C จากนั้นทำการสร้างสติปเล็กๆ มีความหนา $d\varepsilon$ ที่เวลา dt ดังรูปที่ 2 ที่ตำแหน่งนี้การถ่ายเทความร้อนเป็นไปแบบต่อเนื่อง ซึ่งความร้อนที่ถ่ายเทจากโซนของเหลวโดยการนำผ่านพื้นผิวที่มีอุณหภูมิคงที่ไปยังโซนของแข็งของวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงเฟส จากกฎของการอนุรักษ์พลังงาน จะได้



รูปที่ 2. แสดงการสมดุลพลังงานที่ผิวฟรีซซิ่ง

$$-\lambda_1\left[\left(\frac{\partial T_l}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon} dt\right] = -(L\rho)d\varepsilon - \lambda_2\left[\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon} dt\right] \tag{3}$$

อัตราการเคลื่อนที่ของขอบเขตของผิวฟรีซซิ่ง หาได้จาก

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L\rho}\left[\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon} - \lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon}\right] \tag{4}$$

3 การแปลงพิกัดแกน

เนื่องจากปัญหาที่ทำการศึกษาในครั้งนี้เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงเฟสและการเคลื่อนตัวของขอบเขต ดังนั้นในการวิเคราะห์จะเกี่ยวข้องกับการแปลงพิกัดแกน

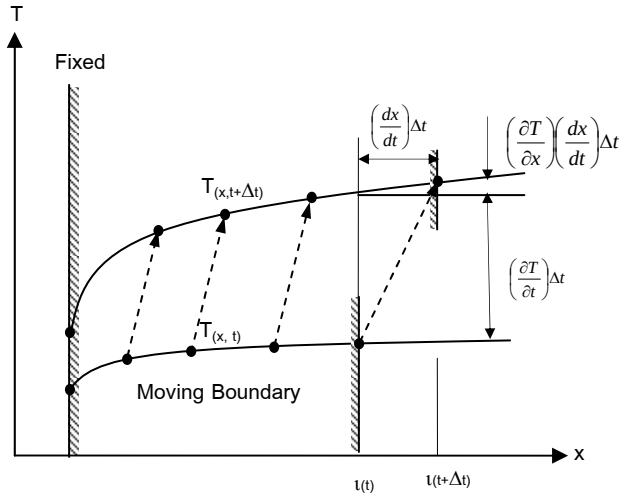
3.1 การแปลงพิกัดแกนที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีแปรผันระยะกริด

จากรูปที่ 3 จะเห็นว่าเมื่อเวลาผ่านไป ที่จุดหรือตำแหน่งใดๆ ที่พิจารณาจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นในขณะเดียวกันตำแหน่งก็จะเปลี่ยนไปจากตำแหน่งเดิม ซึ่งเมื่ออาศัยหลักการของการแปลงพิกัดแกนที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีแปรผันระยะกริดจะได้ผลต่างของอุณหภูมิ(ΔT) มีค่าดังนี้

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\Delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\Delta t \tag{5}$$

ดังนั้น

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{6}$$



รูปที่ 3. แสดงลักษณะแนวโน้มอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ณ ตำแหน่งใดๆ ในแนวแกน x ที่ เวลาต่างกัน

หลังจากนั้นพิจารณาหลักการของวิธีแปรผันระยะกริด ซึ่งถือเป็นวิธีการหนึ่งในการทำให้กริดที่สร้างขึ้นเคลื่อนที่ไปตามผิวรอยต่อที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟส ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้ ในขณะที่ผิวฟรีซซิ่งเกิดการเคลื่อนตัวระยะห่างของกริดภายในทั้งสองเฟสจะเกิดการเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน ซึ่งทั้งสองบริเวณอัตราการเคลื่อนที่ของระยะกริดจะไม่เท่ากันโดยที่ ณ เวลาใดๆจะกำหนดให้บริเวณเฟสของแข็ง$(x < \varepsilon(t))$ จะมีระยะห่างระหว่างกริดตามความสัมพันธ์ $\Delta x_1 = \varepsilon / n_1$ ซึ่งจะมี

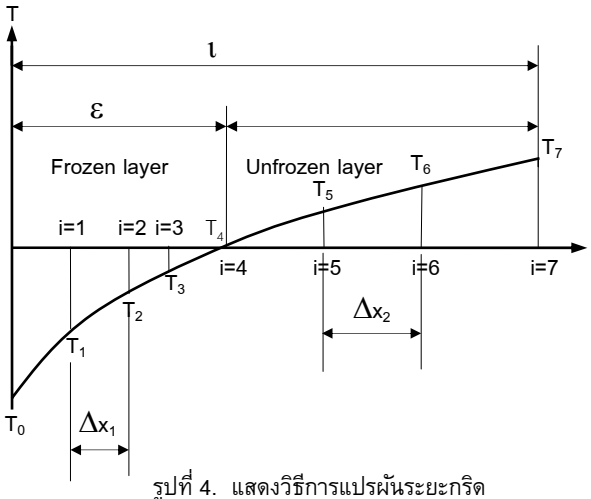
แนวโน้มที่ระยะห่างระหว่างจุดลดลงเมื่อเวลาผ่านไป เช่น เดียวกันกับบริเวณเฟสของเหลว ($x>\varepsilon(t)$) ความสัมพันธ์ของระยะห่างระหว่างกริด คือ $\Delta x_2 = (\iota-\varepsilon)/n_2$ ซึ่งจะมีแนวโน้มระยะห่างระหว่างจุดมากขึ้นโดยพิจารณาได้จากรูปที่ 4

จากรูปที่ 4 เมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ x = 0 ถึงระยะ $x=\varepsilon$ จะพบว่าอัตราการเคลื่อนที่ของแต่ละกริดภายในจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวรอยต่อระหว่างเฟส ดังนี้

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{i} = \frac{\frac{d\varepsilon}{dt}}{n}$$

กล่าวคือ อัตราการขยายตัวของผิวฟรีซซิ่งที่เคลื่อนที่ไปทางขวา ($d\varepsilon/dt$) หารด้วยระยะที่ fixed ด้านซ้ายไปจนถึงระยะของผิวฟรีซซิ่ง ($n_1\Delta x$) ย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ dx/dt ณ จุดใดๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือหารด้วยระยะจากด้านที่ fixed ด้านซ้ายไปจนถึงจุดที่พิจารณา ($i_1\Delta x$) ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{n}\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{7}$$



รูปที่ 4. แสดงวิธีการแปรผันระยะกริด

จากสมการที่ (1) (6) และ (7) จะได้สมการความร้อนในรูปทั่วไปสำหรับโซนของแข็ง (Frozen layer) ($0 < x < \varepsilon(t)$) ดังนี้

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{i_1}{n_1}\frac{\partial T_1}{\partial x}\frac{d\varepsilon}{dt} + \alpha_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \tag{8}$$

จากนั้นเมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ $x = \varepsilon$ ถึงระยะ $x = \iota$ จะพบว่าอัตราการเลื่อนที่ของแต่ละกริดภายในจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง ดังนี้

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{n_2 - i_2} = \frac{\frac{d\varepsilon}{dt}}{n_2}$$

กล่าวคืออัตราการขยายของผิวฟรีซซิ่งที่เคลื่อนที่ไปทางขวา ($d\varepsilon/dt$) หารด้วยระยะจากตำแหน่งผิวฟรีซซิ่งถึงปลายด้านที่ $x=\iota$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ ($\iota-\varepsilon$) และมีค่าเท่ากับ($n_2\Delta x$) ย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ dx/dt ของผิวฟรีซซิ่งใดๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือหารด้วยระยะตั้งแต่ผิวฟรีซซิ่งใดๆ ถึงปลาย $x=\iota$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ ($(n_2-i_2)\Delta x$) จากความสัมพันธ์ต่างๆ จะได้สมการดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n_2 - i_2}{n_2}\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{9}$$

จากสมการที่ (2) (6) และ (9) จะได้สมการความร้อนในรูปทั่วไปสำหรับโซนของเหลว (Unfrozen layer) ($x > \varepsilon(t)$) ดังนี้

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{n_2 - i_2}{n_2}\frac{\partial T_2}{\partial x}\frac{d\varepsilon}{dt} + \alpha_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \tag{10}$$

สมการการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง จากสมการที่ (4)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L\rho}\left[\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon} - \lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon}\right] \tag{11}$$

3.2 การแปลงพิกัดแกนที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีกำหนดขอบเขตแบบคงที่

การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีสำหรับปัญหาเกี่ยวกับการเคลื่อนตัวของขอบเขตโดยใช้เทคนิคการแปลงพิกัด (Coordinate transformation) ซึ่งเป็นการแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปของขอบเขตแบบคงที่ (Fixing boundary problem) ระหว่างขอบเขตและขอบเขตของการเคลื่อนตัว ผลของการแปลงพิกัดทำให้สมการพื้นฐานมีความซับซ้อนขึ้นแต่วิธีหาผลเฉลยของปัญหาได้ง่ายขึ้น รายละเอียดของเทคนิคการแปลงพิกัดแกนมีรายละเอียดดังนี้

สมการความร้อนสำหรับโซนของแข็ง (Frozen Layer) การแปลงพิกัดแกนในโซนของแข็งสามารถใช้ระบบพิกัดดังนี้

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon(t)}, \qquad 0 \le x \le \varepsilon(t) \tag{12}$$

เมื่อ $\varepsilon(t)$ เป็นระยะระหว่างผิวที่ได้รับโหลดความเย็นถึงผิวฟรีซซิ่ง เมื่อใช้เทคนิคการแปลงพิกัดแกนจะแปลงจากพิกัด (x,t) ไปเป็น $\eta((x,t),t)$ ดังนั้นจะได้ตัวดำเนินการอนุพันธ์ (Differential operators) ที่คาบเกี่ยวกับการแปลงพิกัดแกน ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{14}$$

เมื่อ $\dot{\varepsilon}$ เป็นค่าอนุพันธ์ของตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่งเทียบกับเวลา จากสมการที่ (13) (14) และ สมการความร้อนในโซนของแข็งสมการที่ (1) สามารถเปลี่ยนรูปสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\eta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial T_1}{\partial \eta} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} \tag{15}$$

สมการความร้อนสำหรับโซนของเหลว (Unfrozen Layer)

การแปลงพิกัดแกนในโซนของเหลวใช้ระบบพิกัดดังนี้

$$\varsigma = \frac{x - \varepsilon(t)}{\iota - \varepsilon(t)}, \qquad \varepsilon(t) \le x \le \iota \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\dot{\varepsilon}(1-\varsigma)}{\iota-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varsigma} \quad (17)$$

จากสมการที่ (16) (17) และ สมการความร้อนในโซนของเหลว สมการที่ (2) สามารถเปลี่ยนรูปสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\dot{\varepsilon}(1-\varsigma)}{\iota-\varepsilon}\frac{\partial T_2}{\partial \varsigma}+\frac{\alpha_2}{(\iota-\varepsilon)^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varsigma^2} \quad (18)$$

สมการการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง จากสมการที่ (4) สามารถเปลี่ยนรูปของสมการได้ดังนี้

$$\rho L\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{\lambda_1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \eta}\bigg|_{x=\varepsilon}-\frac{\lambda_2}{\iota-\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \varsigma}\bigg|_{x=\varepsilon} \quad (19)$$

4. รูปแบบสมการในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข(Numerical Schemes)

ในการศึกษาครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่อยู่บนพื้นฐานวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite differences method) ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าของผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่ง เพื่อหาอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการนำความร้อนและลักษณะการเปลี่ยนแปลงหรือการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ดังนี้

4.1 จากการแปลงพิกัดแกนที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีแปรผันระยะกริด

1) สมการความร้อน สำหรับโซนของแข็ง จากสมการที่ (8)

$$\frac{dT_1}{dt}=\frac{i_1}{n_1}\frac{\partial T_1}{\partial x}\frac{d\varepsilon}{dt}+\alpha_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_{1,i}^{t+\Delta t,n+1}-T_{1,i}^{t}}{\Delta t}=\frac{i_1}{n_1}\frac{T_{1,i+1}^{t+\Delta t,n}-T_{1,i-1}^{t+\Delta t,n}}{2\Delta x_1^{t+\Delta t,n}}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^{t+\Delta t,n}+\alpha_1\left(\frac{T_{1,i+1}^{t+\Delta t,n}-2T_{1,i}^{t+\Delta t,n+1}+T_{1,i-1}^{t+\Delta t,n+1}}{\left(\Delta x_1^{t+\Delta t,n}\right)^2}\right) \quad (20)$$

2) สมการความร้อน สำหรับโซนของเหลว จากสมการที่ (10)

$$\frac{dT_2}{dt}=\frac{n_2-i_2}{n_2}\frac{\partial T_2}{\partial x}\frac{d\varepsilon}{dt}+\alpha_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_{2,i}^{t+\Delta t,n+1}-T_{2,i}^{t}}{\Delta t}=\frac{n_2-i_2}{n_2}\frac{T_{2,i+1}^{t+\Delta t,n}-T_{2,i-1}^{t+\Delta t,n}}{2\Delta x_2^{t+\Delta t,n}}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^{t+\Delta t,n}+\alpha_2\left(\frac{T_{2,i+1}^{t+\Delta t,n}-2T_{2,i}^{t+\Delta t,n+1}+T_{2,i-1}^{t+\Delta t,n+1}}{\left(\Delta x_2^{t+\Delta t,n}\right)^2}\right) \quad (21)$$

3) สมการการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง จากสมการที่ (11)

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{L\rho}\left[\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon}-\lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon}\right]$$

$$\frac{\varepsilon_1^{t+\Delta t,(n)}-\varepsilon_1^{t}}{\Delta t}=\frac{1}{L_1\rho_1}\left(\lambda_1\frac{-3T_{l2}+4T_{1(l)}^{t+\Delta t,(n)}-T_{1(2)}^{t+\Delta t}}{2\Delta x_1^{t+\Delta t,(n-1)}}-\lambda_2\frac{-3T_{l2}+4T_{2(n_2-1)}^{t+\Delta t,(n)}-T_{2(n_2-2)}^{t+\Delta t}}{2\Delta x_l^{t+\Delta t,(n-1)}}\right) \quad (22)$$

4.2 จากการแปลงพิกัดแกนที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีกำหนดขอบเขตแบบคงที่

1) สมการความร้อน สำหรับโซนของแข็ง(Frozen Layer) จากสมการที่ (15)

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\eta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial T_1}{\partial \eta}+\frac{\alpha_1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{T_{1,i}^{n+1}-T_{1,i}^{n}}{\Delta t}=\frac{\eta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{T_{1,i+1/2}^{n+1}-T_{1,i-1/2}^{n+1}}{\Delta\eta}+\alpha_1\left[\frac{T_{1,i+1}^{n+1}-2T_{1,i}^{n+1}+T_{1,i-1}^{n+1}}{\varepsilon^2\Delta\eta^2}\right] \quad (23)$$

2) สมการความร้อน สำหรับโซนของเหลว (Unfrozen layer) จากสมการที่ (18)

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\dot{\varepsilon}(1-\varsigma)}{\iota-\varepsilon}\frac{\partial T_2}{\partial \varsigma}+\frac{\alpha_2}{(\iota-\varepsilon)^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varsigma^2}$$

$$\frac{T_{2,i}^{n+1}-T_{2,i}^{n}}{\Delta t}=\frac{(1-\varsigma)\dot{\varepsilon}}{\iota-\varepsilon}\frac{T_{2,i+1/2}^{n+1}-T_{2,i-1/2}^{n+1}}{\Delta\varsigma}+\alpha_2\left[\frac{T_{2,i+1}^{n+1}-2T_{2,i}^{n+1}+T_{2,i-1}^{n+1}}{(\iota-\varepsilon)^2\Delta\varsigma^2}\right] \quad (24)$$

3) สมการการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่ง จากสมการที่ (19)

$$\rho L\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{\lambda_1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \eta}\bigg|_{x=\varepsilon}-\frac{\lambda_2}{\iota-\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \varsigma}\bigg|_{x=\varepsilon}$$

$$\rho L\frac{3\varepsilon^{n+1}-4\varepsilon^{n}+\varepsilon^{n-1}}{2\Delta t}=\lambda_1\frac{3T_{1,end}^{n+1}-4T_{1,end-1}^{n+1}+T_{1,end-2}^{n+1}}{2\varepsilon^{n+1}\Delta\eta}\bigg|_{x=\varepsilon}-\lambda_2\frac{-3T_{2,0}^{n+1}+4T_{2,1}^{n+1}-T_{2,2}^{n+1}}{2(\iota-\varepsilon^{n+1})\varsigma}\bigg|_{x=\varepsilon} \quad (25)$$

4.3 สำหรับเงื่อนไขในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีดังนี้

1) กำหนดค่าเริ่มต้นที่จำเป็นเพื่อใช้ในการคำนวณค่าต่างๆ เช่น คุณสมบัติต่างๆ ทางความร้อน ตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่งเริ่มต้น การกระจายตัวของอุณหภูมิเริ่มต้นเนื่องจากกำหนดให้มีบริเวณชั้นบางๆ ของโซนของแข็งขณะเริ่มต้นของกระบวนการเพื่อให้ง่ายต่อการเขียนโปรแกรม

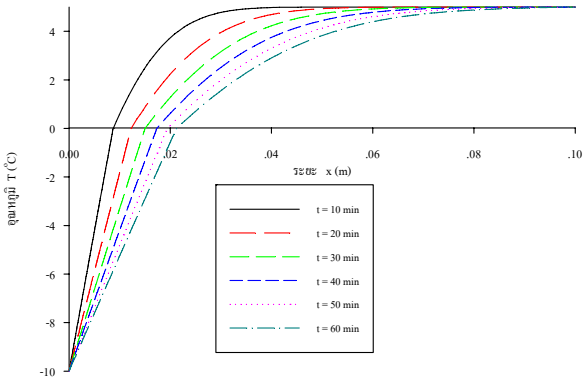
2) กำหนดช่วงเวลา Δt มีค่าเท่ากับ 1 วินาที สำหรับการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและตำแหน่งของผิวเชื่อมต่อระหว่างเฟสหรือผิวฟรีซซิ่ง

3) จำนวนกริดที่สร้างทั้งหมด จำนวน 150 จุด

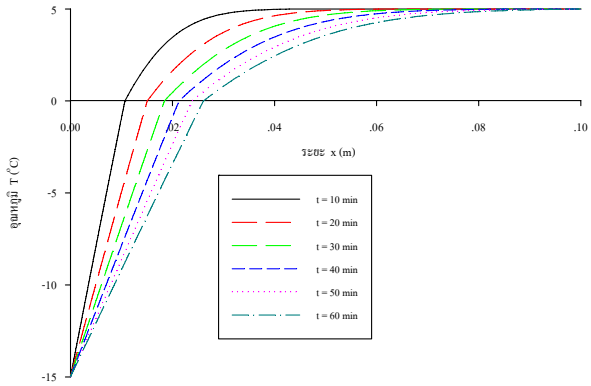
4) กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ 10^{-6} เพื่อหยุดการคำนวณซ้ำของอัลกอริทึมที่สร้างขึ้น

5. ผลการวิเคราะห์และวิจารณ์ผล

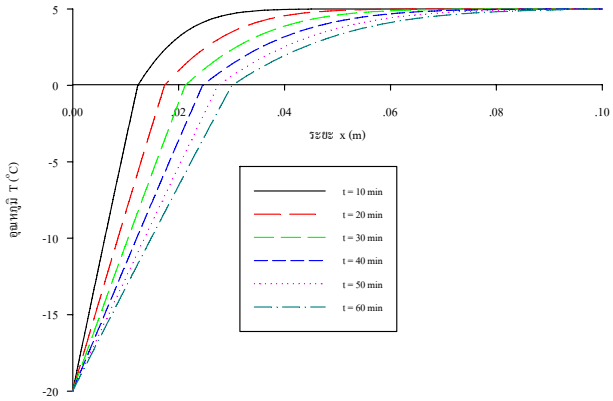
ผลที่ได้จากการทำนายโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งสองวิธีคือ วิธีแปรผันระยะกริด (Variable space grid method : VSGM) และ วิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่(Boundary fixing method : BFM) ทำให้ทราบถึงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ การเคลื่อนตัวของผิวฟรีซซิ่งและอิทธิพลของอุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่ง



ก. อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่ง T_s = -10 °C

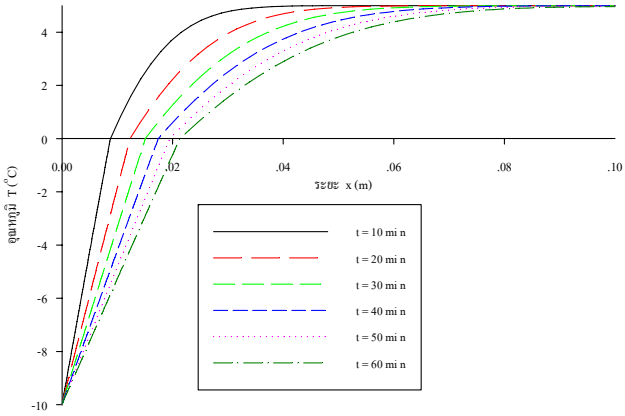


ข. อุณหภูมิที่ใช้ในฟรีซซิ่ง T_s = -15 °C

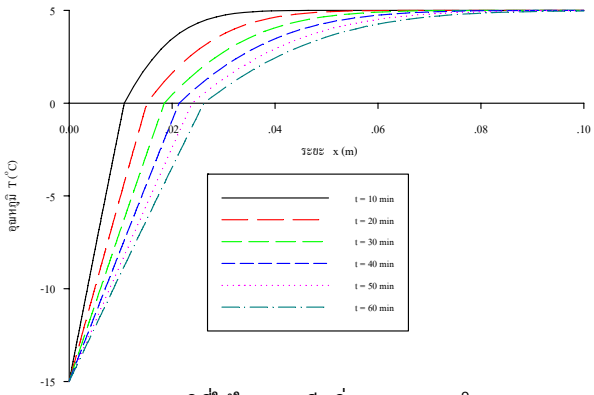


ค. อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่ง T_s = -20 °C

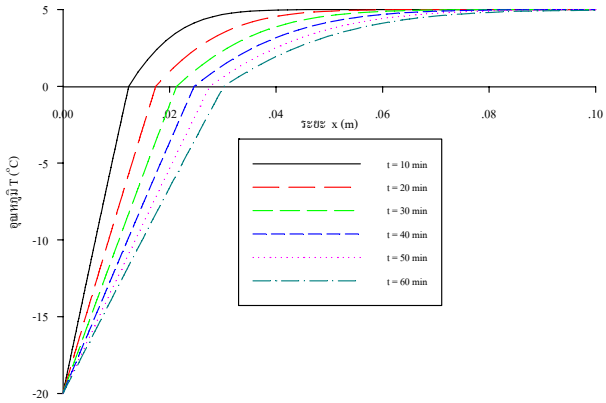
รูปที่ 5. ลักษณะการกระจายอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่เวลาต่างๆ จากวิธีแปรผันระยะกริด (Variable space grid method : VSGM)



ก. อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่ง T_s = -10 °C



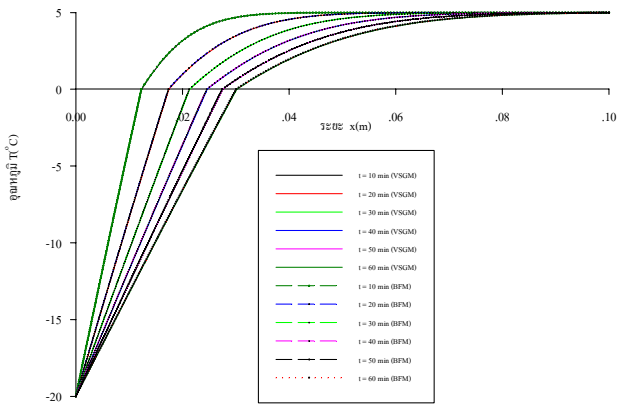
ข. อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่ง T_s = -15 °C



ค. อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่ง T_s = -20 °C

รูปที่ 6. ลักษณะการกระจายอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่เวลาต่างๆ จากวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่(Boundary Fixed Method : BFM)

พิจารณาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่ได้จากการทำนายโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทั้งสองวิธีคือวิธีแปรผันระยะกริดและวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ดังแสดงในรูปที่ 5 และรูปที่ 6 ตามลำดับ พบว่าที่อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่งใดๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นระยะของผิวฟรีซซิ่งก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น และอัตราการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่ระยะเวลาฟรีซซิ่งน้อยๆ จะมีค่าสูงกว่าที่เวลามากๆ ซึ่งอาจเกิดจากการที่โซนของแข็งเพิ่มขึ้นเป็นผลให้เกิดความต้านทานของความร้อนที่ต้องระบายออกจากโซนของเหลวจะมีค่าลดลงทำให้อัตราการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งลดลง และที่อุณหภูมิฟรีซซิ่งมีค่าสูงๆ อัตราการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งจะเพิ่มขึ้นด้วย



รูปที่ 7. เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซิ่งที่เวลาต่างๆ ระหว่างวิธีแปรผันระยะกริด (VSGM) และ วิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่(BFM)

ในรูปที่ 7 แสดงการเปรียบเทียบกระจายอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของขอบเขตผิวรอยต่อระหว่างเฟสที่เวลาต่างๆ ระหว่างวิธีแปรผันระยะกริด(VSGM) และวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่(BFM) พบว่าผลที่ได้จากการทำนายทั้งสองวิธีการนั้นมีค่าที่สอดคล้องกัน

นอกจากนี้เพื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีที่ทำการนำเสนอ จะทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทำนายจากวิธีการทั้งสองและผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution) โดยในที่นี้จะใช้ผลเฉลยแม่นตรง วิธี Neumann's Solution

ผลเฉลยของสมการสำหรับการหาตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่งหาได้จาก (Crank, J. 1984)

$$\varepsilon = m\sqrt{t} \qquad (25)$$

เมื่อ

$$m = \sqrt{\frac{2(T_f - T_s)\lambda_1}{L\rho}} \qquad (26)$$

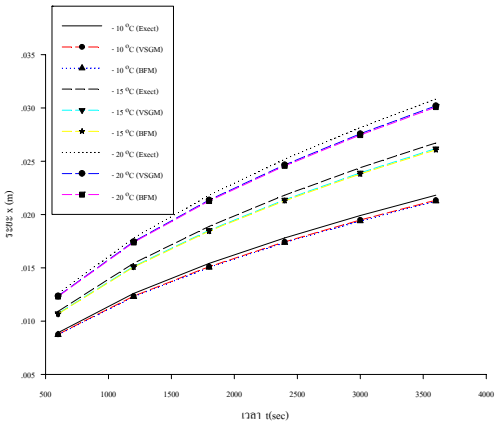
จากการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นถึงลักษณะการเคลื่อนตัวของผิวฟรีซซิ่ง และอิทธิพลของระดับอุณหภูมิที่ฟรีซซิ่ง ซึ่งผลเฉลยทั้งสามกรณี ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1. เปรียบเทียบตำแหน่งของผิวฟรีซซิ่งสำหรับผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นตรง

t(sec)	T_s = -10 °C			T_s = -15 °C			T_s = -20 °C		
	Exact	VSGM	BFM	Exact	VSGM	BFM	Exact	VSGM	BFM
600	0.0089038912	0.0087500000	0.0087107100	0.0109049951	0.0107100000	0.0106706200	0.0125920038	0.0123500000	0.0123015900
1200	0.0125920038	0.0123400000	0.0122874800	0.0154219920	0.0151300000	0.0150651400	0.0178077825	0.0174500000	0.0173754900
1800	0.0154219920	0.0151000000	0.0150364000	0.0188880056	0.0185200000	0.0184407200	0.0218099903	0.0213600000	0.0212718500
2400	0.0178077825	0.0174300000	0.0173553000	0.0218099903	0.0213800000	0.0212876500	0.0251840075	0.0246600000	0.0245576500
3000	0.0199097061	0.0194800000	0.0193989900	0.0243843104	0.0239000000	0.0237964100	0.0281565764	0.0275700000	0.0274529800
3600	0.0218099903	0.0213400000	0.0212470100	0.0267116737	0.0261800000	0.0260648200	0.0308439840	0.0302000000	0.0300708400

รูปที่ 8 แสดงการเปรียบเทียบระยะการเคลื่อนตัวของผิวฟรีซซิ่งสำหรับผลที่ได้จากวิธีทางตัวเลขทั้งสองวิธีและผลเฉลยแม่นตรง ณ อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่งต่างๆ ซึ่งพบว่าอัตราการเคลื่อนตัวของผิวฟรีซซิ่งที่อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซิ่งต่างๆ ทั้งสามวิธีจะมีค่าใกล้เคียงและสอดคล้องกันซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีการที่นำเสนอนั้นมีความแม่นยำและเชื่อถือได้

สำหรับค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอาจเป็นผลมาจากข้อจำกัดของวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าดังนั้นย่อมมีคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเสมอและอาจเนื่องมาจากการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น โดยกำหนดให้ที่เวลาเริ่มต้น(t=0) นั้นมีเฟสของแข็งที่เป็นลักษณะแผ่นบางๆ ที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิที่จุดฟรีซซิ่งเกิดขึ้นอยู่ก่อนแล้ว ซึ่งเงื่อนไขนี้จำเป็นต้องกำหนดเพื่อให้กระบวนการคำนวณเชิงตัวเลขสามารถเริ่มดำเนินต่อไปได้ และอาจมีสาเหตุมาจากผลของค่าคุณสมบัติเชิงความร้อนของวัสดุ ที่กำหนดให้มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามอุณหภูมิหรือเฟสที่เปลี่ยนแปลงไปสำหรับการคำนวณหาผลเฉลยแม่นตรง ส่วนผลเฉลยที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นค่าคุณสมบัติเชิงความร้อนจะเปลี่ยนไปตามลักษณะเฟสที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการฟรีซซิ่ง นอกจากนี้ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอาจเกิดจากการพาความร้อนแบบอิสระในโซนของของเหลวซึ่งในการศึกษาในครั้งนี้ไม่ได้ทำการพิจารณาถึงผลกระทบดังกล่าว



รูปที่ 8. เปรียบเทียบระยะการเคลื่อนตัวของผิวฟรีซซึ่งสำหรับผลที่ได้จากวิธีทางตัวเลขและค่าผลเฉลยแม่นตรง ณ อุณหภูมิที่ใช้ในการฟรีซซึ่งต่างๆ

6. สรุปผล

จากผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าการทำนายการกระจายของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซึ่งโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีวิธีแปรผันระยะกริด(VSGM) และวิธีการกำหนดขอบเขตแบบคงที่ (BFM) นั้นมีความแม่นยำค่อนข้างสูงสำหรับปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสในระบบ 1 มิติ ซึ่งผลที่ได้จากทั้งสองวิธีการจะมีค่าใกล้เคียงกันและเป็นไปในทิศทางเดียวกันและยังพบว่าผลที่ได้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง

องค์ความรู้ที่ได้จากการวิเคราะห์สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ทั้งเป็นความรู้พื้นฐานให้กับงานวิจัยในระดับที่สูงขึ้น และเป็นประโยชน์ต่องานทางวิศวกรรมที่หลากหลายต่อไป

กิติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนงานวิจัย (สกว.) และคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ศูนย์รังสิต ที่ให้การสนับสนุนงานวิจัยในครั้งนี้

รายการสัญลักษณ์

ρ ความหนาแน่น (kg/m^3)

α สัมประสิทธิ์การแผ่กระจายของความร้อน (m^2/s)

λ ประสิทธิผลของการนำความร้อน (W/mK)

t เวลา (s)

T อุณหภูมิ ($^\circ$C)

ε ระยะการเคลื่อนที่ของผิวฟรีซซึ่ง (m)

x ตำแหน่งบนพิกัดแกน x

L ความร้อนแฝงของการฟรีซซึ่ง (J/kg)

n จำนวนโหนดทั้งหมด(the total of node that consider)

i จำนวนของโหนดที่พิจารณา (number of node that consider)

η, ς การแปลงพิกัดแกน (coordinate transformation)

ตัวห้อย

o ที่สภาวะเริ่มต้น(initial)

s ผิวที่ได้รับโหลดความเย็น

1 โซนของแข็ง

2 โซนของเหลว

ตัวยก

n จำนวนครั้งในการกระทำซ้ำ

เอกสารอ้างอิง

1. Carslaw,H.S. and Jaeger, J.C., 1959. " Conduction of Heat in Solid " 2nd Ed ., p. 283,353. Oxford University. Press, London and New York.
2. Muehlbauer, J.C. and Sunderland, J.E., 1965. Heat Conduction with a freezing or melting. Appl. Mech. Rev. p.18, 951.
3. Rubinstein,L.I., 1971. The Stefan problem, Am. Math. Soc. Transl.Math.Monogr. 27.
4. Crank,J., 1981. Numerical Methods in Heat Transfer, chap, 9, John Wiley & Sons Ltd.
5. Crank,J., 1984. Free and Boundary Problem, Clarendon Press Oxford.
6. Taylor, A.B., 1974. The mathematical formulation of Stefan problems, " Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion. " Proc. Univ. Oxford, March p.25-27.
7. Goodman, T.R., 1961. J. Heat Transfer , Trans. ASME (C), P. 83-86.
8. Murray, W.D. and landis, F., 1959. Numerical and Machine Solution of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing, J. Heat transfer, Trans. ASME, May p. 106-112.
9. Rubinstein, L.I., 1971. The Stefan Problem. Am. Math. Soc. Transl. Math. Mpnogr. 27.
10. Rattanadecho, P. 2004. Experimental and Numerical Study of Solidification Process in Unsaturated Granular Packed Bed, J. Thermophysics and Heat Transfer, January-March p.87-93.
11. ชยานนท์ เสริฐธิกุล และ ผดุงศักดิ์ รัตนเดโช, 2550. การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแก้ปัญหาการทำละลาย (กรณีวัสดุพรุนแบบอิ่มตัว) โดยเทคนิควิธีการแปรผันระยะกริด, วารสารสงขลานครินทร์ ฉบับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, ปีที่ 29 ฉบับที่ 5 ก.ย.- ต.ค. p. 1393-1405.