การวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในปัญหาการสัมผัส

STRESS ANALYSIS OF CONTACT PROBLEMS.

บรรจง เดชาพานิชกุล[1*] วิโรจน์ ลิ่มตระการ[2] สุวัฒน์ จีรเธียรนาถ[3]
[1,2] สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล กองวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต
99 หมู่ 18 ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง ปทุมธานี 12120
โทร 0-2564-3001 ต่อ 3144 โทรสาร: 0-2564-3001 ต่อ 3049 *อีเมล์ limwiroj@engr.tu.ac.th
[3] ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ
114 ถนนพหลโยธิน ต. คลองหนึ่ง อ. คลองหลวง จ. ปทุมธานี 12120

Bunjong Dechapanichkul[1*], Wiroj Limtrakarn[2] , Suwat Jirathearanat[3]
[1,2] Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus,
99 Moo 18, Klong Luang, Pathumthani 12120 Thailand,
Tel: 0-2564-3001 Ext. 3144, Fax: 0-2564-3001 Ext. 3049 *Email: limwiroj@engr.tu.ac.th
[3] National Metal and Materials Technology Center
114 Paholyotin Road, Klong 1, Klong Luang, Pathumtani Province 12120 Thailand

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในปัญหาการสัมผัสด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาด เอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยปัญหาที่ทำการวิเคราะห์เป็นปัญหาความเครียดในระนาบ เนื้อหาของบทความนี้เริ่มจากทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็ง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทฤษฎีการสัมผัส จากนั้นประดิษฐ์โปรแกรมขึ้นมาเพื่อทำการวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในปัญหาการสัมผัส ที่มีผิวหน้าสัมผัสต่างๆกัน เทียบกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรงอยู่แล้ว โดยผลที่ได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง

Abstract

This paper presents stress analysis of contact problems by finite element method and adaptive meshes. Firstly, solid mechanics theory and finite element formulations for contact problem are described. The developed program is analyzed with contact surface proplems and validated by exact problems. The finite element solutions have a good agreement with the exact solution.

1. บทนำ

ในปัจจุบันภาคอุตสาหกรรม ได้มีการนำโปรแกรมคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการจำลองปัญหาต่างๆมากขึ้น เพื่อให้สามารถที่จะคาดเดาคำตอบของปัญหาก่อนทำการทดสอบจริง เพื่อลดระยะเวลาและค่าใช้จ่าย รวมถึงสามารถที่จะออกแบบได้หลากหลายมากขึ้น โดยโปรแกรมเหล่านี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผลลัพธ์ทางการคำนวณจะใกล้เคียงกับผลทางการปฏิบัติมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น สมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่กำหนด และประเภทของเอลิเมนต์ที่ใช้ทดแทนในปัญหา เป็นต้น โดยในบทความนี้จะเป็นการประดิษฐ์โปรแกรมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีการสัมผัสกัน โดยในเบื้องต้น จะทดสอบโปรแกรมที่เขียนขึ้นมากับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ โดยได้ทำการทดสอบกับปัญหาการสัมผัส ที่มีผิวหน้าของการสัมผัสต่างๆกัน 3 แบบ คือ 1. การสัมผัสแบบผิวเรียบสัมผัสกับผิวเรียบ 2. การสัมผัสแบบผิวโค้งสัมผัสกับผิวโค้ง 3. การสัมผัสแบบผิวเรียบสัมผัสกับผิวโค้ง ซึ่งผลการทดสอบโปรแกรมที่เขียนขึ้นมามีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง

2.ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ

สมการทดแทนความเป็นจริงของปัญหากลศาสตร์ของแข็งในระบบ 2 มิติ ประกอบด้วย 3 สมการดังนี้

2.1.1 สมการความสมดุล

เป็นสมการความสมดุลของของแข็งในทิศทาง x และ y สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \qquad ; \Sigma F_x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \qquad ; \Sigma F_y = 0 \tag{2}$$

โดย σ_{xx} และ σ_{yy} คือ ความเค้นในแนวแกน x และ y

τ_{xy} คือ ความเค้นเฉือนในระนาบ xy

2.1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว

เป็นสมการความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นจะรวมพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นเข้ามาด้วย

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i,i}u_{i,j} + u_{j,i}u_{j,j}\right) \tag{3}$$

โดย ε_{ij} คือ องค์ประกอบค่าความเครียด

u_i, u_j คือ องค์ประกอบของค่าการเคลื่อนตัวในทิศทาง x และ y

2.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

เป็นสมการความสัมพันธ์ที่พิจารณาแบบความเครียดในระนาบ

$$\{\sigma\} = [C]\{e\} \tag{4}$$

โดย
$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

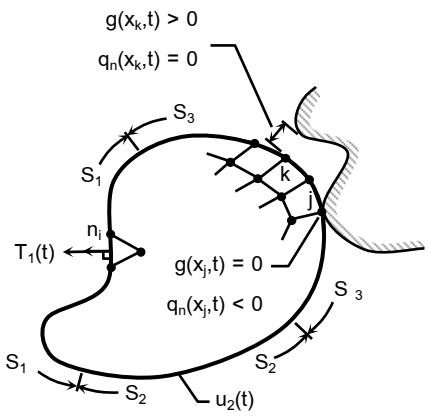
ซึ่ง [C] เป็นเมตริกซ์ความสัมพันธ์ของค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น

2.2 เงื่อนไขขอบเขต

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีด้วยกัน 3 รูปแบบ และ ในรูปที่ 1 เงื่อนไขขอบเขตแรกแสดงให้เห็นว่า ตลอดขอบเขต S_1 มีแรงดึง $T_1(t)$ มากระทำดังนี้

$$\sigma_{ij} n_i = T_1(t) \tag{5}$$

โดย n_i คือ เวกเตอร์หน่วยที่มีทิศตั้งฉากกับขอบเขต



รูปที่ 1 แสดงลักษณะเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

เงื่อนไขขอบเขตที่สอง แสดงถึงการกำหนดค่าการเคลื่อนตัว $u_i(x,t)$ ให้มีค่าคงที่ $u_2(t)$ ตลอดขอบเขต S_2 ดังนี้

$$u_i(x,t) = u_2(t) \tag{6}$$

เงื่อนไขขอบเขตที่สามแสดงถึงเงื่อนไขการสัมผัสกัน หากบริเวณใดในขอบเขต S_3 เกิดการสัมผัสกับวัตถุภายนอกหรือขอบเขตอื่น ก็จะทำให้เกิดความเค้นแบบอัดตัว (compressive stress) บนขอบเขต S_3 และไม่มีช่องว่างระหว่างขอบเขต S_3 กับวัตถุภายนอก $(g(x,t) = 0)$ ส่วนบริเวณอื่น ๆ ของขอบเขต S_3 ที่ไม่ได้สัมผัสกับวัตถุภายนอกก็จะเกิดช่องว่างขึ้น $(g(x,t) > 0)$ และจะไม่เกิดความเค้นเนื่องจากการสัมผัสกัน (contact stress) จากรายละเอียดดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนเงื่อนไขขอบเขตอยู่ในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$q_n(x,t) = q_C(x,t) n_i \le 0 \tag{7}$$

$$g(x,t) = g(x) - u(x,t) n_i \ge 0 \tag{8}$$

โดย $q_C(x_i,t)$ คือ แรงเนื่องจากการสัมผัสกัน

$q_n(x_i,t)$ คือ แรงสัมผัสในทิศทางที่ตั้งฉากกับขอบเขต

$g(x_i,t)$ คือ ช่องว่างระหว่างขอบเขต S_3 กับวัตถุภายนอก

2.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการพลังงานเสมือนจากการเสียรูปของวัตถุ ที่ได้จากสมการความสมดุล เมื่อประยุกต์เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[K_L + K_{NL} + K_C]\{\Delta U\} = \{R\} - \{F_{in}\} + \{F_C\} \tag{9}$$

โดย $[K_L]$ คือ เมตริกซ์แข็งเกร็งในปัญหาแบบเชิงเส้น

$[K_{NL}]$ คือ เมตริกซ์แข็งเกร็งในปัญหาแบบไม่เชิงเส้น

$[K_C]$ คือ เมตริกซ์แข็งเกร็งในปัญหาการสัมผัส

$\{\Delta U\}$ คือ เวคเตอร์การเคลื่อนตัว

$\{R\}$ คือ เวคเตอร์ของแรงภายนอก

$\{F_{in}\}$ คือ เวคเตอร์ของแรงภายใน

$\{F_C\}$ คือ เวคเตอร์ของแรงสัมผัส

3. การทดสอบกับปัญหาตัวอย่าง

ในที่นี้ จะตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมของปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมา ซึ่งได้ทำการทดสอบกับปัญหา 3 ปัญหาดังนี้

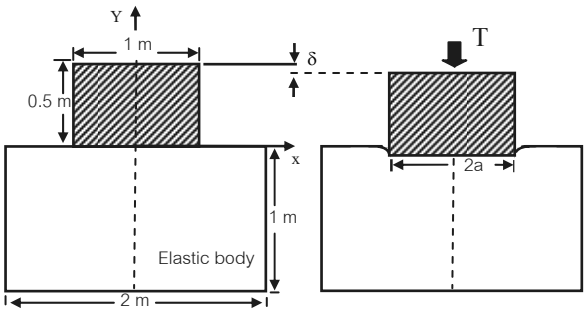
3.1 ปัญหาแท่งสี่เหลี่ยมแข็งเกร็งบนพื้นยืดหยุ่นเชิงเส้น

ลักษณะของปัญหาเป็นการนำแท่งแข็งยาวที่มีพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยมวางบนพื้นที่มีคุณสมบัติเป็นวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น จากนั้นทำการกดแท่งเหล็กด้วยแรง T นิวตันต่อความยาวแท่งแข็ง ลงมาเป็นระยะ δ เท่ากับ 2 มิลลิเมตรดังรูปที่ 2 โดยความกว้างหน้าสัมผัสที่เกิดขึ้นกับปัญหานี้มีค่าคงที่เท่ากับ 2a หลังจากนั้นทำการคำนวณผลจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น และหาค่าแรงปฏิกิริยารวมที่ผิวสัมผัสเพื่อหาแรง T ซึ่งนำไปหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ดังสมการที่ (10)

$$p(x) = \frac{T}{\sqrt{\pi(a^2 - x^2)}} \tag{10}$$

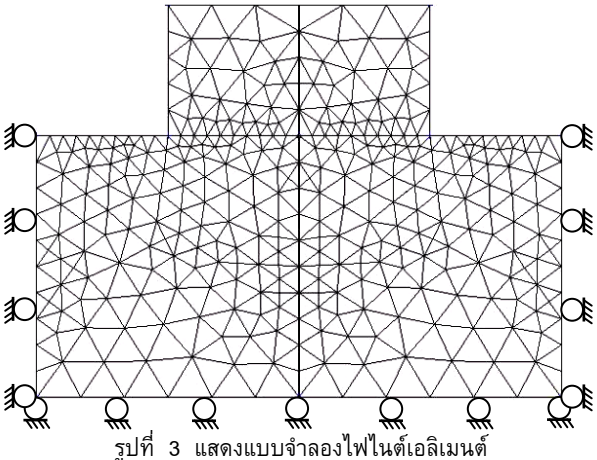
โดย a คือ ค่าครึ่งความกว้างของการสัมผัส

p(x) คือ ค่าความดันที่ตำแหน่ง x ใด ๆ บนผิวสัมผัส

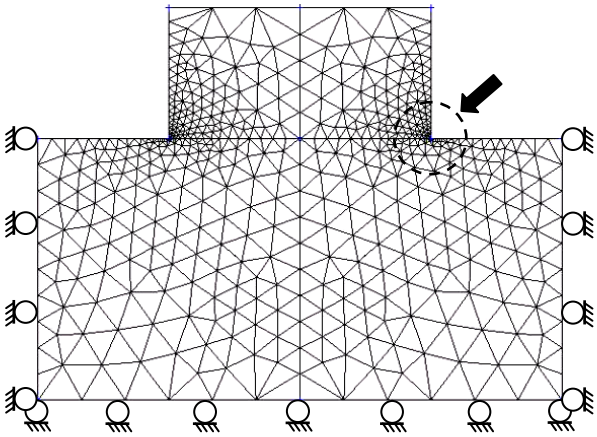


รูปที่ 2 แสดงรูปของปัญหากล่องสี่เหลี่ยมแข็งกดบนพื้นยืดหยุ่น

ในตอนแรกได้สร้างแบบจำลองเอลิเมนต์ขึ้นจำนวน 622 เอลิเมนต์ 368 จุดต่อดังรูปที่ 3 ซึ่งคำตอบที่ได้มีความคลาดเคลื่อนอยู่มาก เนื่องจากที่บริเวณที่มีค่าความเค้นสูง แต่เอลิเมนต์กลับมีขนาดใหญ่ จึงทำการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ โดยในบริเวณที่มีค่าความเค้นสูง จะให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กสำหรับการคำนวณปัญหานี้ดังรูปที่ 4

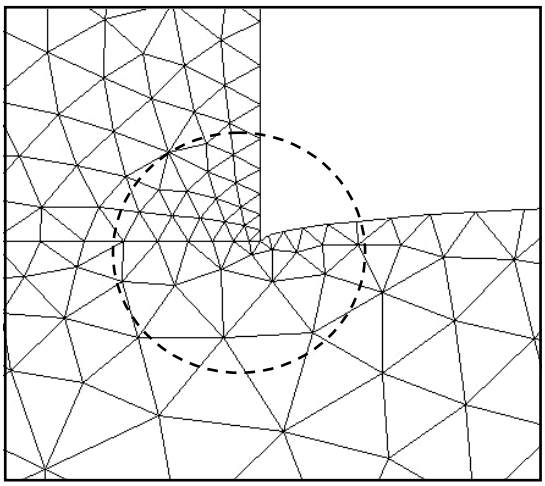


รูปที่ 3 แสดงแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ จำนวน 622 เอลิเมนต์ 368 จุดต่อ

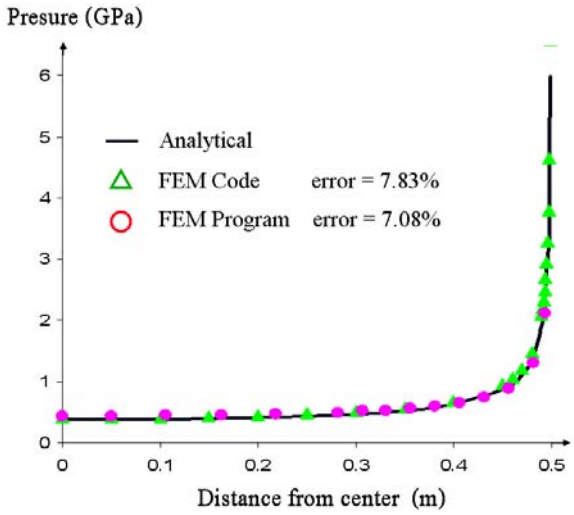


รูปที่ 4 แสดงแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการปรับขนาด จำนวน 1000 เอลิเมนต์ 590 จุดต่อ

จะเห็นว่าบริเวณมุมของแท่งแข็งยาวที่สัมผัสกับพื้นยืดหยุ่น จะมีค่าการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์คำตอบที่สูง จึงได้มีการปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง เพื่อให้คำตอบมีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อทำการคำนวณแล้ว ค่าแรงปฏิกิริยารวมที่เกิดขึ้นบนจุดต่อของพื้น เท่ากับ 671 เมกะนิวตัน นำค่าแรงปฏิกิริยารวมนี้ไปทำการคำนวณหาค่าความดันที่ผิวสัมผัสในสมการ (10) ซึ่งจากการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากโปรแกรมมีความสอดคล้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 5 แสดงบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์คำตอบสูง



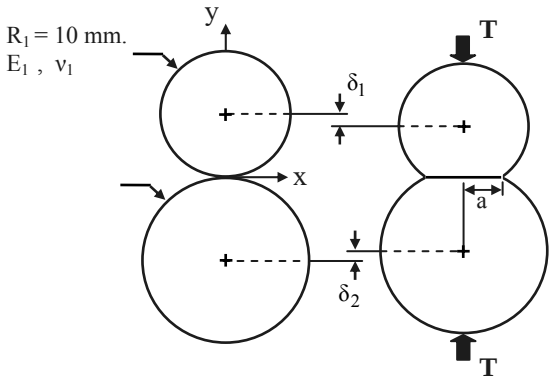
รูปที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบค่าของความดันที่ตำแหน่งจากจุดศูนย์กลางที่มีการปรับขนาดของเอลิเมนต์

3.2 ปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่งที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางไม่เท่ากัน

ลักษณะของปัญหา คือ ทรงกระบอกสองแท่งที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางไม่เท่ากันมาสัมผัสกัน ตามแนวแกนของทรงกระบอก ด้วยแรง T นิวตันต่อหน่วยความยาวที่กระทำอยู่บนจุดศูนย์กลางของ

ทรงกระบอกทั้งสอง ดังแสดงในรูปที่ 7 โดยความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเคลื่อนตัวรวม กับค่าครึ่งความกว้างแสดงดังสมการที่ (11) ดังนี้

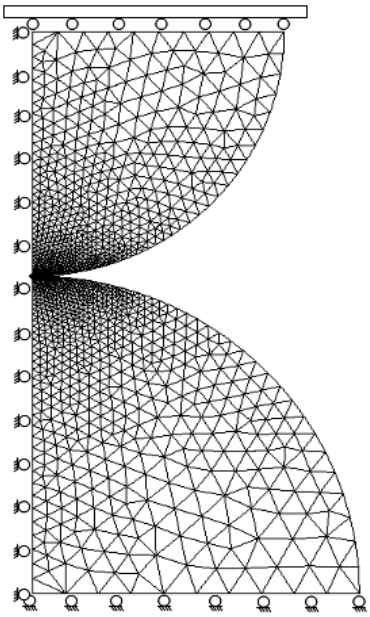
$$\delta = \frac{0.638 \cdot a^2}{2 \cdot (1.13)^2}\left(\frac{2}{3} + ln\frac{2R_1}{a} + ln\frac{2R_2}{a}\right)\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) \qquad (11)$$



(a) ก่อนให้ภาระ (b) หลังให้ภาระ

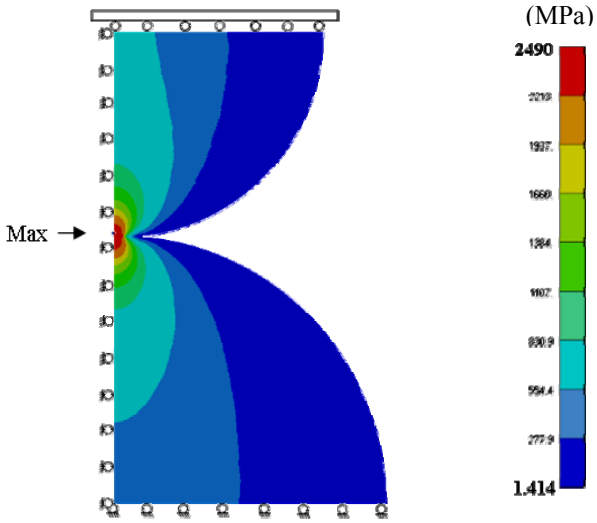
รูปที่ 7 แสดงปัญหาการสัมผัสระหว่างทรงกระบอกสองแท่ง ก่อนและหลังให้ภาระ

เพื่อเพิ่มความถูกต้องของปัญหา จึงได้ทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์ในบริเวณที่มีค่าเกรเดียน์ของคำตอบสูงดังแสดงในรูปที่ 8

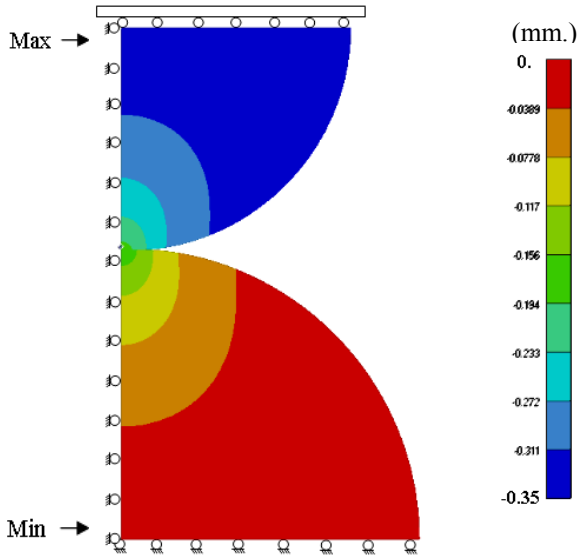


รูปที่ 8 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดของเอลิเมนต์ของทรงกระบอกสองแท่งจำนวน 2558 เอลิเมนต์ 1401 จุดต่อ

โดยผลจากการคำนวณ ค่าของการกระจายความเค้นวอนมิสและการเสียรูปของปัญหา สามารถแสดงผลการคำนวณจากโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาได้ดังรูปที่ 9 และ รูปที่ 10 ตามลำดับ



รูปที่ 9 แสดงการกระจายความเค้นวอนมิสของปัญหาการสัมผัส



รูปที่ 10 แสดงการเสียรูปในทิศทาง Y ของปัญหาการสัมผัส

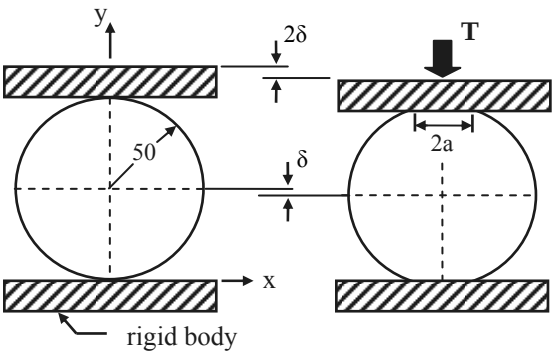
ผลการคำนวณจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมา ในแบบจำลองที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ได้ค่าครึ่งความกว้างของหน้าสัมผัสมีค่าเท่ากับ 1.01 มิลลิเมตร โดยค่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นประมาณ 7% ซึ่งให้ค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ซึ่งสามารถสรุปผลได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดครึ่งความกว้างของหน้า สัมผัสของปัญหาการสัมผัสของทรงกระบอกสองแท่ง

	ครึ่งความกว้างหน้าสัมผัส (a. mm)
ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	1.0820936
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดเอลิเมนต์	1.01

3.3 ปัญหาทรงกระบอกยืดหยุ่นระหว่างแผ่นแข็งเกร็งคู่ขนาน

ลักษณะของปัญหา คือ ทรงกระบอกยาวรัศมี 50 มิลลิเมตร วางอยู่บนพื้นแข็งแล้วใช้แผ่นเหล็กกดทรงกระบอกลงด้วยแรง T นิวตันต่อความยาวของทรงกระบอก หลังจากที่ออกแรงกดแล้ว ทรงกระบอกจะยุบตัวลงเป็นระยะ 2δ ทำให้เกิดหน้าสัมผัสระหว่างทรงกระบอกกับพื้นมีความกว้างเท่ากับ 2a ดังรูปที่ 11



รูปที่ 11 ปัญหาของทรงกระบอกยาวที่ถูกกดโดยแผ่นเหล็กแข็งบนพื้นแข็งเกร็ง

จากทฤษฎีของเฮิร์ตซ ตัวอย่างนี้เป็นการสัมผัสแบบเส้น (line contact) กล่าวคือการสัมผัสจะเริ่มสัมผัสที่จุดสัมผัสระหว่างขอบของทรงกระบอกกับพื้นแข็งเกร็ง ซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรงตามแนวยาวของทรงกระบอก เมื่อทรงกระบอกได้รับภาระทำให้เกิดการเสียรูป ความกว้างหน้าสัมผัสจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งภาระที่ให้มีค่าเท่ากับ T โดยสามารถหาค่าความดันและค่าความกว้างที่เกิดขึ้น ได้ดังนี้

$$a = \sqrt{\frac{4T.r.(1-v^2)}{\pi E}} \tag{12}$$

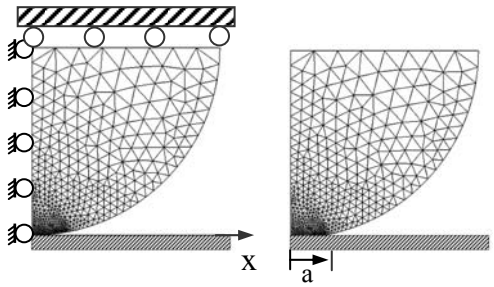
$$p_O = \frac{2T}{\pi a} = \sqrt{\frac{T.E}{\pi r.(1-v^2)}} \tag{13}$$

$$p(x) = p_O\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{14}$$

โดย a คือ ครึ่งความกว้างของการสัมผัส

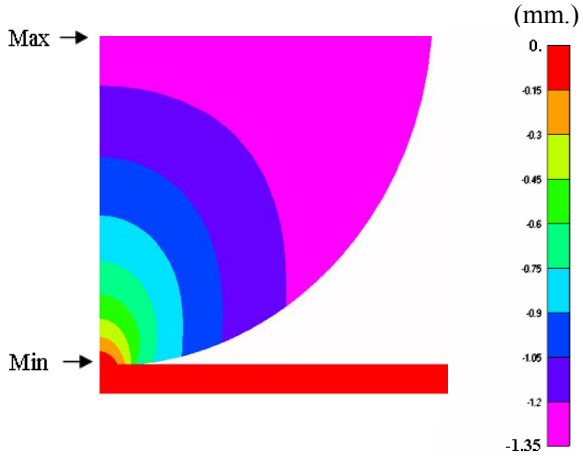
p_0 คือ ความดันสูงสุดของการสัมผัส

p(x) คือ ค่าความดันที่ตำแหน่ง x ใด ๆ บนผิวสัมผัส



รูปที่ 12 แสดงแบบจำลองที่มีการปรับขนาดของเอลิเมนต์ใหม่

ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นมี 780 เอลิเมนต์ 449 จุดต่อ และแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดมี 1071 เอลิเมนต์ 611 จุดต่อ ต่อจากนั้นทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาและเนื่องจากปัญหามีความสมมาตรจึงได้พิจารณาเพียง 1 ใน 4 ของหน้าตัดวงกลม ซึ่งจะต้องทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์คำตอบสูง เพื่อให้คำตอบมีความถูกต้องมากขึ้น ดังรูปที่ 12 ซึ่งผลจากการปรับขนาดของเอลิเมนต์ ทำให้บริเวณที่มีการสัมผัสกันมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กลง ค่า a และ p_0 จะคำนวณได้จากค่าภาระที่ให้ T แต่เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตที่ให้เป็นการกำหนดการเคลื่อนที่ของจุดต่อ ดังนั้นค่าภาระ T สามารถหาได้จากแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นบนจุดต่อ ที่มีการสัมผัสกับพื้นแข็ง จากนั้นทำการตรวจสอบโดยการนำค่าแรง T ที่ได้จากการคำนวณซึ่งมีค่าประมาณ 187 เมกะนิวตัน ไปคำนวณค่าครึ่งความกว้างของการสัมผัส a และค่าความดันสูงสุด p_0 ที่เกิดขึ้นกับทรงกระบอกซึ่งจะได้ค่าการเคลื่อนตัวของทรงกระบอกดังรูปที่ 13



รูปที่ 13 แสดงการเคลื่อนตัวในทิศทาง Y ที่เกิดขึ้น

จากการเปรียบเทียบมีค่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นประมาณ 3% ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรม

	ค่าครึ่งความกว้าง (mm.)	ความดันสูงสุด (GPa)
ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	7.376	16.594
ไฟไนต์เอลิเมนต์	7.175	17.13

4. สรุป

ผลงานวิจัยนี้ คือ การประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นมาเพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์ในปัญหาการสัมผัส โดยพิจารณาเป็นปัญหาแบบความเครียดในระนาบสองมิติ โดยเริ่มจากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อนำไปเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และใช้เทคนิคการปรับขนาดแบบอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรม สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการสัมผัสเพื่อเพิ่มความถูกต้องของคำตอบ จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยการ

เปรียบเทียบกับปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ ซึ่งได้คำตอบที่ใกล้เคียงกัน และ สามารถที่จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการสัมผัส และ พัฒนาโปรแกรมไปใช้กับปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (TGIST) ที่ให้ความสนับสนุนทุนในการวิจัย และ ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ (MTEC) ที่ให้ข้อมูลและความรู้ในการวิจัยเป็นอย่างดี

6. เอกสารอ้างอิง

[1] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2542, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, พิมพ์ครั้งที่ 2, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, หน้า 197–216.

[2] Limtrakarn, W., "Comparison in the stress analysis of 2D solid mechanics problems of finite element method and photoelasticity", KMUTT Research and Development Journal, Vol. 28, No.1, 2005.

[3] Zhong, Z. H., Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[4] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fourth Ed., Vol. I, McGraw-Hill Press, Singapore, 2004.

[5] Dally, J. W. and Riley, W. F., Experimental stress analysis, Third edition, Singapore, McGraw–Hill, 1991.

[6] Dechaumphai, P. Finite Element Method in Engineering, Third Ed.,Chulalongkorn University Press, Bangkok, Thailand, 2004.

[7] Wriggers, P., "Computational contact mechanics", John Wily & Sons, 2002.