

การคำนวณผลการตอบสนองของอุณหภูมิภายในทรงกระบอกสั้น  
ด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์  
Calculating Inside Temperature Response of a Short Cylinder  
By Finite Resistance-Capacitance Method

ประเสริฐ อินประเสริฐ  
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม  
235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163  
โทร. 457-0068 ต่อ 121, โทรสาร 457-3982, อีเมล Prasert\_Inp@yahoo.com

Prasert Inprasert  
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Siam University  
235 Petkasem Road, Phasicharoen, Bangkok 10163  
Tel: 457-0068 Ext 121, Fax: 457-3982, E-Mail: Prasert\_Inp@yahoo.com

#### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลตอบสนองของอุณหภูมิภายในทรงกระบอกสั้นที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นทรงกระบอกกลวงเปลือกบางซ้อนกันเป็นจำนวนมากในแนวรัศมีและแนวยาวแกนทรงกระบอก ซึ่งแต่ละชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมมัลติซิมคำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทฤษฎีซูเปอร์โพสิชันทางความร้อนของผนังและทรงกระบอกว่าอุณหภูมิที่ได้มีความแตกต่างกันเพียงใด เมื่อกำหนดให้ทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm ยาว 40 mm มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $200^{\circ}\text{C}$  มีค่าสภาพการนำความร้อน  $237\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ , ความหนาแน่น  $2702\text{ kg/m}^3$  และความร้อนจำเพาะ  $903\text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$  ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ  $50^{\circ}\text{C}$  ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $500\text{ W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$  เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่กึ่งกลางทรงกระบอกที่ตำแหน่งครึ่งหนึ่งของความยาว ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 120 วินาที ปรากฏว่ามีความแตกต่าง 0.0148 % จากค่าความแตกต่างแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความร้อนวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์นี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป

**คำสำคัญ:** วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การตอบสนองของอุณหภูมิ, กระบอกสั้น, ชั้นส่วนทรงกระบอกกลวง

#### Abstract

This paper presents the calculation of inside temperature response of a short cylinder by the finite resistance-capacitance method. By dividing a material to many thin shell hollow cylinder elements in radial and axle directions, each element can be changed to a conduction resistance and a heat capacitance. For convection heat transfer on a surface area to fluid, a convection resistance is used. MultiSim<sup>TM</sup> software is used to calculate this finite resistance-capacitance model and the results are compared with analytical method of wall-and-cylinder super position to find differences in temperature response. In the calculation, an aluminum cylinder is of, 50 mm radius and 40 mm long. This short cylinder, initially at  $200^{\circ}\text{C}$ , has thermal conductivity  $237\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ , density  $2702\text{ kg/m}^3$  and specific heat  $903\text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ . This object is placed suddenly in fluid at  $50^{\circ}\text{C}$  with the estimated convection heat transfer coefficient of  $500\text{ W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$ . Calculated temperature at the center of cylinder on the mid-side length at 120 sec by this software, differs from the analytical solution by 0.0148 %. From the difference of results, it is shown that this finite resistance-capacitance model can be calculated by electrical theory, such that it is easy to use electrical software to solve heat transfer response problems of complicated materials in the future.

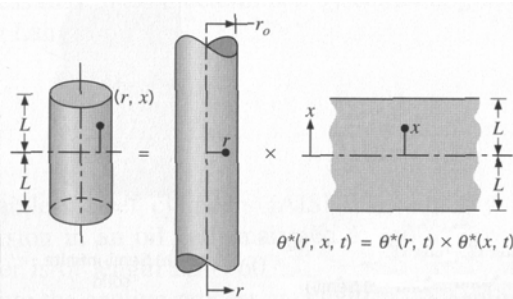
**Keywords:** finite resistance-capacitance method, temperature response, short cylinder, hollow cylindrical element

## 1. บทนำ

บทความนี้จะนำเสนอการคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอกสั้นที่เปลี่ยนไปตามเวลา ด้วยวิธีไฟไนต์รีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์[5,6,7] โดยเนื้อวัสดุที่แบ่งออกแต่ชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมมัลติซิมคำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีซูเปอร์โพสิชันทางความร้อนของผนังและทรงกระบอกว่าอุณหภูมิที่ได้มีความแตกต่างกันเพียงใด

สูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลได้โดยตรงเนื่องจากความซับซ้อนของตัวแปรในสมการ จึงมีการใช้อนุกรมของเบสเซลฟังก์ชันช่วยแก้สมการในส่วนที่เป็นผลลัพธ์ของสมการที่ได้เป็นอินทิกรัลซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น อย่างไรก็ตามก็ยังมีข้อจำกัดจำเป็นในการใช้เปรียบเทียบในเชิงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เนื่องจากการเปรียบเทียบกับผลการทดลองจริงนั้นจะพบกับปัญหาความแม่นยำของผลการตอบสนองของเครื่องมือวัดและความผิดพลาดจากระบบควบคุมเพื่อให้ได้ตามเงื่อนไขการทดลอง

การคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในผนังและทรงกระบอกได้มีการคำนวณเปรียบเทียบเพื่อหาค่าความถูกต้องแล้ว โดยนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์รีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์สำหรับผนังที่มีขนาดกว้างยาวไม่จำกัด[1]และทรงกระบอกที่มีความยาวไม่จำกัด[2] แต่สำหรับการคำนวณหาอุณหภูมิภายในทรงกระบอกสั้นนี้ไม่สามารถแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลได้โดยตรงเนื่องจากความซับซ้อนของตัวแปรในสมการมากยิ่งขึ้น ดังนั้นจึงต้องนำทฤษฎีซูเปอร์โพสิชันทางความร้อนของผนังที่มีขนาดยาวไม่จำกัดและทรงกระบอกที่มีความยาวไม่จำกัดมาทำการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายใน แสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การทำซูเปอร์โพสิชันทางความร้อนสำหรับการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกระบอกสั้นเมื่อเวลาผ่านไป[3]

บทความนี้จะทำการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate) โดยแบ่งวัตถุเป็นชิ้นส่วนย่อยรูปทรงกระบอกกลวงและทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางมาตรวจสอบความถูกต้องกับทฤษฎีการคำนวณอุณหภูมิภายในเนื้อวัสดุรูปทรงกระบอกซึ่งจะสามารถลดเวลาในการคำนวณและแบ่งจำนวนชิ้นย่อยลงได้เป็นจำนวนมาก เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ชิ้นส่วนย่อยแบบลูกบาศก์ในพิกัดแกนตั้งฉาก (Rectangular coordinate)

## 2. การวิเคราะห์จากผลการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่กึ่งกลางทรงกระบอกที่ตำแหน่งครึ่งหนึ่งของความยาว โดยทรงกระบอกมีรัศมี  $r_0$  ยาว  $2L$  ดังรูปที่ 1

### 2.1 เงื่อนไขการคำนวณการกระจายอุณหภูมิภายในวัตถุ

พิจารณาถึงความเป็นไปได้ที่อุณหภูมิในทรงกระบอกสั้นจะมีค่าไม่เท่ากัน หลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่างจากผิวทรงกระบอกเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องมาจากสาเหตุเหล่านี้คือ สภาพการนำความร้อนวัสดุมีค่าต่ำมาก, สมบัติการพาความร้อนผิววัสดุสูงมาก หรือทรงกระบอกมีขนาดใหญ่มาก ซึ่งความสัมพันธ์ของเงื่อนไข 3 ประการนี้แสดงเป็นค่า Biot number (Bi) ถ้าผลการคำนวณค่า  $Bi > 0.1$  จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าการกระจายอุณหภูมิมีความแตกต่างกัน  $> 5\%$  [8] ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขบังคับให้ต้องคำนวณการกระจายอุณหภูมิภายในวัตถุ

$$Bi = \frac{hr_0}{k} \quad (1)$$

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad (2)$$

เมื่อ  $h$  - สมบัติการพาความร้อน ( $W/m^2 \cdot ^\circ C$ )

$r_0$  - รัศมีทรงกระบอก (m)

$L$  - ระยะครึ่งความยาวทรงกระบอก (m)

$k$  - สภาพการนำความร้อนวัสดุ ( $W/m \cdot ^\circ C$ )

### 2.2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใด ๆ ในทรงกระบอกยาวไม่จำกัด

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใด ๆ เป็นดังนี้[3]

$$\frac{(T_{r,t} - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} J_0(\xi_n \frac{r}{r_0}) \quad (3)$$

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} J_0(\xi_n r^*) \quad (4)$$

โดย

$$\xi_n \cdot \frac{J_1(\xi_n)}{J_0(\xi_n)} = Bi \quad (5)$$

$$C_n = \frac{2}{\xi_n} \cdot \frac{J_1(\xi_n)}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \quad (6)$$

$$Fo = \frac{kt}{\rho C_p r_0^2} = \frac{\alpha t}{r_0^2} \quad (7)$$

เมื่อ  $T_{r,t}$  - อุณหภูมิวัสดุที่ความลึกจากผิวหน้า  $r$  ณ เวลา  $t$  ( $^\circ C$ )

$T_\infty$  - อุณหภูมิของไหล ( $^\circ C$ )

$T_i$  - อุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ ( $^\circ C$ )

$t$  - เวลาที่ผ่านไป (s)

$\alpha$  - ค่าสมบัติการแพร่กระจายความร้อน ( $m^2/s$ )

$\rho$  - ความหนาแน่นของวัสดุ ( $kg/m^3$ )

$C_p$  - ความร้อนจำเพาะของวัสดุ ( $J/kg \cdot ^\circ C$ )

### 2.3 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใด ๆ ในผนังขนาดกว้างยาวไม่จำกัด

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใดๆเป็นดังนี้[3]

$$\frac{(T_{x,t} - T_{\infty})}{(T_i - T_{\infty})} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} \cos(\xi_n \frac{x}{L}) \quad (8)$$

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} \cos(\xi_n x^*) \quad (9)$$

โดย

$$C_n = \frac{4 \sin(\xi_n)}{2 \xi_n + \sin(2 \xi_n)} \quad (10)$$

$$\xi_n \tan(\xi_n) = Bi \quad (11)$$

$$Fo = \frac{kt}{\rho C_p L^2} = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (12)$$

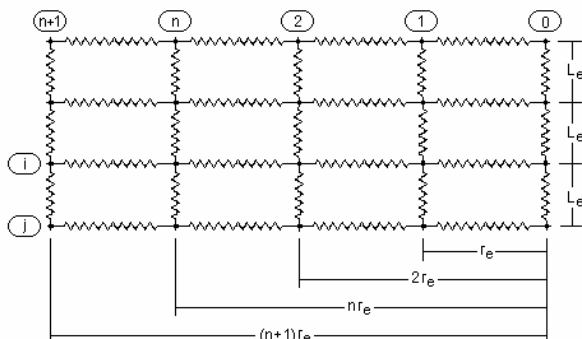
เมื่อ  $T_{x,t}$  - อุณหภูมิที่ระยะห่างจากกึ่งกลางความหนา  $x$  ณ เวลา  $t$  ( $^{\circ}C$ )

## 2.4 เงื่อนไขการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในวัตถุ

สำหรับการคำนวณโดยประมาณ (Approximate solution) นั้น จะใช้ค่า  $n=1$  เท่านั้น ซึ่งต้องตรวจสอบ Fourier number ( $Fo$ ) ทั้งในสูตรของทรงกระบอกยาวไม่จำกัดและผนังขนาดกว้างยาวไม่จำกัด ถ้าผลการคำนวณทั้งสองกรณีค่า  $Fo > 0.2$  จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ที่เวลาต่างๆมีความผิดพลาด  $< 2\%$ [8] แต่ถ้าค่า  $Fo < 0.2$  ต้องเพิ่มอันดับ  $n$  ให้มากขึ้น เช่น  $n = 1, 2$  หรือ  $n = 1, 2, 3$  เป็นต้น

## 3. การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์ริซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

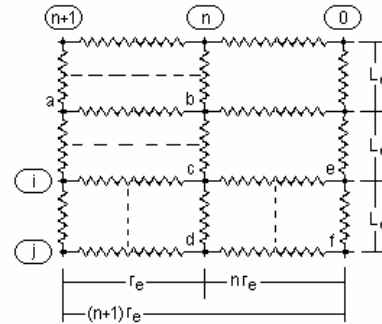
โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชั้นเล็กๆรูปทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางแล้วซ้อนด้วยทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมีจำนวนมาก แล้วแทนด้วยริซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ ดังรูปที่ 5 ซึ่งตัวต้านทานและตัวเก็บความร้อน หาค่าได้โดยการแบ่งทรงกระบอกกลวงและตันแต่ละชั้นมีความยาว  $L_e$  เท่ากันหมดซึ่งผลที่ได้จะเรียงตัวกันเป็นชั้นความหนา  $L_e$  นั้นเอง เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้รัศมีทรงกระบอกกลวงชั้นในสุดมีขนาดเท่ากับรัศมีทรงกระบอกตัน  $r_e$  และให้ความหนาทรงกระบอกกลวงทุกชั้นมีขนาด  $r_e$  เท่ากันหมด แสดงดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 ทรงกระบอกตันที่แบ่งออกเป็นชั้นย่อยทรงกระบอกกลวง 9 อัน โดยมีแกนกลางเป็นทรงกระบอกตัน 3 อัน ซ้อนกัน

## 3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อนในเนื้อวัสดุ

ค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 4 รูปแบบคือการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง, การนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน, การนำความร้อนในแนวแกนทรงกระบอกกลวง และการนำความร้อนในแนวแกนทรงกระบอกตัน ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุ ที่บริเวณต่างๆ

### 3.1.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกแนวที่  $n+1$  ที่จุด  $a$  และผิวทรงกระบอกแนวที่  $n$  ที่จุด  $b$  ในกรอบเส้นประของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้ [4]

$$R_{HCCond, inside radial} = \frac{\ln(r_{n+1}/r_n)}{2\pi k L_e} = \frac{\ln[(n+1)/n]}{2\pi k L_e} \quad (13)$$

เมื่อ  $R_{HCCond, inside radial}$  - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี ( $^{\circ}C/W$ )

$r_{n+1}, r_n$  - รัศมีด้านนอก และรัศมีด้านใน Element ( $m$ ) สำหรับทรงกระบอกกลวงที่  $n$

$n$  - หมายเลขทรงกระบอกกลวง รูปที่ 3

$k$  - สภาพการนำความร้อน ( $W/m \cdot ^{\circ}C$ )

$L_e$  - ความยาว Element ( $m$ )

### 3.1.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกตันแนวที่ 1 และแกนกลางทรงกระบอกตันแนวที่ 0 ของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน เนื่องจากพื้นที่ผิวของแกนกลางทรงกระบอกมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรการนำความร้อนของทรงกระบอกกลวงได้ เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหานี้จึงกำหนดให้อุณหภูมิเท่ากันตลอด (Uniform temperature) ทั้งผิวจนถึงแกนกลาง ซึ่งอุณหภูมิที่แกนกลางของทรงกระบอกจะเท่ากับอุณหภูมิที่ผิว นั่นคือต้องกำหนดให้ความต้านทานความร้อนมีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อให้อุณหภูมิเท่ากัน จึงได้ค่าดังนี้

$$R_{SCCond, inside radial} = 0 \quad (14)$$

เมื่อ  $R_{SCCond, inside radial}$  - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกตันในแนวรัศมี ( $^{\circ}C/W$ )

### 3.1.3 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวแกนทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนแนวที่  $n$  ระหว่างผิวทรงกระบอกด้านบนของชั้น  $i$  จุด  $c$  และผิวทรงกระบอกด้านล่างของชั้น  $j$  ที่จุด  $d$  ในกรอบเส้นประของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ดังนี้ [4]

$$\begin{aligned} R_{HCCond,inside\ length} &= \frac{L_e}{k A_n} \\ &= \frac{L_e}{k \pi (r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2)} \\ &= \frac{L_e}{2n\pi k r_e^2} \end{aligned} \quad (15)$$

เมื่อ  $R_{HCCond,inside\ length}$  – ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกกลวงในแนวแกน ( $^{\circ}C/W$ )

$A_n$  – พื้นที่ในแนวตั้งฉากการถ่ายเทความร้อน ( $m^2$ )

$r_e$  – รัศมีทรงกระบอกตัน ( $m$ )

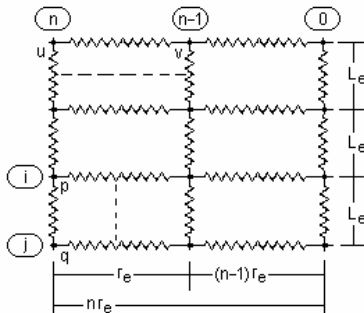
### 3.1.4 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวแกนทรงกระบอกตัน

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนแนวที่ 0 ระหว่างผิวทรงกระบอกตันด้านบนของชั้น  $i$  ที่จุด  $e$  และผิวทรงกระบอกด้านล่างของชั้น  $j$  ที่จุด  $f$  ในกรอบเส้นประของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ดังนี้ [4]

$$\begin{aligned} R_{SCCond,inside\ length} &= \frac{L_e}{k A_n} \\ &= \frac{4L_e}{\pi k r_e^2} \end{aligned} \quad (16)$$

เมื่อ  $R_{SCCond,inside\ length}$  – ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกตันในแนวแกน ( $^{\circ}C/W$ )

## 3.2 ตัวต้านทานการนำความร้อนบริเวณขอบวัสดุ



รูปที่ 4 การถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบเนื้อวัสดุที่บริเวณต่างๆ

จากรูปที่ 4 ค่าความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุมีไว้สำหรับการถ่ายเทความร้อนที่ผิวเพื่อแลกเปลี่ยนความร้อนกับวัสดุหรือตัวกลางอื่นๆ มีได้ 3 รูปแบบคือการถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุด้านข้างทรงกระบอกกลวง, การถ่ายเทความร้อนปลายทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมีและการถ่ายเทความร้อนปลายทรงกระบอกตันในแนวรัศมี

### 3.2.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุด้านข้างทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนบริเวณด้านข้างทรงกระบอกกลวงแนวที่  $n$  ระหว่างผิวทรงกระบอกด้านบนของชั้น  $i$  ที่จุด  $p$  และผิว

ทรงกระบอกด้านล่างของชั้น  $j$  ที่จุด  $q$  ในกรอบเส้นประของรูปที่ 4 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ดังนี้ [4]

$$\begin{aligned} R_{HCCond,side\ length} &= \frac{L_e}{k A_n} \\ &= \frac{L_e}{k \pi (r_n^2 - r_{n-1/2}^2)} \\ &= \frac{L_e}{\pi k r_e^2 (n-1/4)} \end{aligned} \quad (17)$$

เมื่อ  $R_{HCCond,side\ length}$  – ความต้านทานความร้อนด้านข้างทรงกระบอกกลวงในแนวแกน ( $^{\circ}C/W$ )

### 3.2.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุปลายทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนขอบวัสดุระหว่างผิวทรงกระบอกแนวที่  $n$  ที่จุด  $u$  และผิวทรงกระบอกแนวที่  $n-1$  ที่จุด  $v$  ในกรอบเส้นประของรูปที่ 4 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน จะเห็นได้ว่าเนื้อวัสดุบริเวณขอบมีเพียงครึ่งหนึ่งเมื่อเทียบการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุ ดังนั้นค่าความต้านทานจึงเป็น 2 เท่าของความต้านทานภายในจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} R_{HCCond,end\ radial} &= 2 \cdot R_{HCCond,inside\ radial} \\ &= \frac{\ln[(n+1)/n]}{\pi k L_e} \end{aligned} \quad (18)$$

เมื่อ  $R_{HCCond,end\ radial}$  – ความต้านทานความร้อนปลายทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี ( $^{\circ}C/W$ )

### 3.2.3 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุปลายทรงกระบอกตันในแนวรัศมี

ให้พิจารณาความต้านทานความร้อนเช่นเดียวกับในเนื้อวัสดุแนวรัศมีทรงกระบอกตัน จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ได้ดังนี้

$$R_{SCCond,end\ radial} = 0 \quad (19)$$

เมื่อ  $R_{SCCond,end\ radial}$  – ความต้านทานความร้อนปลายทรงกระบอกตันในแนวรัศมี ( $^{\circ}C/W$ )

## 3.2 ตัวเก็บความร้อน

ตัวเก็บความร้อนมีค่าเท่ากับความจุความร้อนของวัสดุ ดังนี้[1]

$$C_t = m C_p = \rho V C_p \quad (20)$$

เมื่อ  $C_t$  – ความจุความร้อน ( $J/^{\circ}C$ )

$m$  – มวลวัสดุ ( $kg$ )

$C_p$  – ความร้อนจำเพาะ ( $J/kg \cdot ^{\circ}C$ )

$\rho$  – ความหนาแน่น ( $kg/m^3$ )

$V$  – ปริมาตร ( $m^3$ )

ตัวเก็บความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 แบบคือเนื้อทรงกระบอกตันและเนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวง แต่เนื่องจากการคำนวณนี้แบ่งออกเป็น Node ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างทรงกระบอก ดังนั้นจึงแยกตัวเก็บความร้อนออกเป็น 6 ประเภทดังนี้คือผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด, รอยต่อทรงกระบอกภายใน, แกนกลางทรงกระบอกตันภายใน,

ปลายรอยต่อทรงกระบอก, ปลายทรงกระบอกผิวด้านข้าง และที่ปลายแกนกลางทรงกระบอกตัน

### 3.2.1 ตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด

แบ่งเนื้อจำนวนครั้งความหนาแน่นของทรงกระบอกกลวงด้านนอกให้เป็นตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกระบอกด้านนอกสุด โดยสมมติให้ชั้นนอกสุดเป็นชั้นที่  $n$  จะได้

$$\begin{aligned} V_{HC,side} &= \pi(r_n^2 - r_{n-1/2}^2)L_e \\ &= \pi r_e^2 L_e (n-1/4) \\ C_{HC,side} &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (n-1/4) \end{aligned} \quad (21)$$

เมื่อ  $V_{HC,side}$  - ปริมาตรทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด ( $m^3$ )

$C_{HC,side}$  - ความจุความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด ( $J/^\circ C$ )

### 3.2.2 ตัวเก็บความร้อนที่รอยต่อทรงกระบอกภายใน

บริเวณรอยต่อทรงกระบอก ใช้เนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านในของชั้นที่  $n+1$  จำนวนครั้งความหนา และใช้เนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านนอกของชั้นที่  $n$  จำนวนครั้งความหนาจะได้

$$\begin{aligned} V_{HC,inside} &= \pi(r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2)L_e \\ &= \pi r_e^2 L_e (2n) \\ C_{HC,inside} &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (2n) \end{aligned} \quad (22)$$

เมื่อ  $V_{HC,side}$  - ปริมาตรที่รอยต่อทรงกระบอกภายใน ( $m^3$ )

$C_{HC,inside}$  - ความจุความร้อนที่รอยต่อทรงกระบอก ( $J/^\circ C$ )

### 3.2.3 ตัวเก็บความร้อนที่แกนกลางทรงกระบอกตัน

เนื่องจากได้แบ่งเนื้อที่ผิวทรงกระบอกตันแล้วไปครั้งหนึ่งให้กับรอยต่อที่  $n=1$  ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครั้งเดียวของรัศมีทรงกระบอกตัน

$$\begin{aligned} V_{SC,inside} &= \pi \left[ \frac{r_e}{2} \right]^2 L_e \\ C_{SC,inside} &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (1/4) \end{aligned} \quad (23)$$

เมื่อ  $V_{SC,inside}$  - ปริมาตรที่แกนกลางทรงกระบอกตัน ( $m^3$ )

$C_{SC,inside}$  - ความจุความร้อนที่แกนกลางทรงกระบอกตัน ( $J/^\circ C$ )

### 3.2.4 ตัวเก็บความร้อนที่ปลายรอยต่อทรงกระบอก

เนื่องจากมีเนื้อที่ปลายรอยต่อทรงกระบอกเพียงครั้งเดียวของภายใน ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครั้งเดียวของรัศมีทรงกระบอกตัน

$$\begin{aligned} C_{HC,end} &= C_{HC,inside} / 2 \\ &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p n \end{aligned} \quad (24)$$

เมื่อ  $C_{HC,end}$  - ความจุความร้อนที่ปลายรอยต่อทรงกระบอก ( $J/^\circ C$ )

### 3.2.5 ตัวเก็บความร้อนที่ปลายทรงกระบอกผิวด้านข้าง

เนื่องจากมีเนื้อที่ปลายทรงกระบอกเพียงครั้งเดียวของผิวด้านข้าง ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครั้งเดียวของผิวด้านข้าง

$$\begin{aligned} C_{HC,endside} &= C_{HC,side} / 2 \\ &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (n-1/4) / 2 \end{aligned} \quad (25)$$

เมื่อ  $C_{HC,endside}$  - ความจุความร้อนที่ปลายทรงกระบอกผิวด้านข้าง ( $J/^\circ C$ )

### 3.2.6 ตัวเก็บความร้อนที่ปลายแกนกลางทรงกระบอกตัน

เนื่องจากมีเนื้อที่ปลายทรงกระบอกเพียงครั้งเดียวของเนื้อที่อยู่ภายในทรงกระบอกตัน ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครั้งเดียวของทรงกระบอกตันภายใน

$$\begin{aligned} C_{SC,end} &= C_{SC,inside} / 2 \\ &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (1/8) \end{aligned} \quad (26)$$

เมื่อ  $C_{SC,end}$  - ความจุความร้อนที่ปลายแกนกลางทรงกระบอกตัน ( $J/^\circ C$ )

## 3.3 ตัวต้านทานการพาความร้อน

ตัวต้านทานการพาความร้อนเกิดขึ้นบริเวณผิวด้านข้างหรือปลายทรงกระบอก สามารถแยกตัวความต้านทานการพาความร้อนออกเป็น 6 ประเภทคือข้างทรงกระบอก, ด้านข้างปลายทรงกระบอก, ปลายทรงกระบอกตัน, ปลายรอยต่อทรงกระบอกกลวง และปลายทรงกระบอกกลวงด้านข้าง โดยการหาพื้นที่ผิวการพาความร้อน ( $A_s$ ) แล้วแทนค่าในตัวต้านทานการพาความร้อน[4]

### 3.3.1 ความต้านทานการพาความร้อนด้านข้างทรงกระบอก

$$\begin{aligned} A_s &= 2\pi r_o L_e \\ R_{CylConv,side} &= \frac{1}{h 2\pi r_o L_e} \end{aligned} \quad (27)$$

เมื่อ  $R_{CylConv,side}$  - ความต้านทานการพาความร้อนด้านข้างทรงกระบอก ( $^\circ C/W$ )

$h_{..}$  - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ( $W/m^2 \cdot ^\circ C$ )

$A_s$  - พื้นที่ผิววัสดุที่สัมผัสกับของไหล ( $m^2$ )

### 3.3.2 ความต้านทานการพาความร้อนด้านข้างปลายทรงกระบอก

$$\begin{aligned} R_{CylConv,endside} &= 2 * R_{CylConv,side} \\ &= \frac{1}{h \pi r_o L_e} \end{aligned} \quad (28)$$

เมื่อ  $R_{CylConv,endside}$  - ความต้านทานการพาความร้อนด้านข้างปลายทรงกระบอก ( $^\circ C/W$ )

### 3.3.3 ความต้านทานการพาความร้อนปลายทรงกระบอกตัน

$$\begin{aligned} A_s &= \pi \left[ \frac{r_e}{2} \right]^2 = \pi r_e^2 / 4 \\ R_{SCConv,end} &= \frac{4}{h \pi r_e^2} \end{aligned} \quad (29)$$

เมื่อ  $R_{SCConv,end}$  - ความต้านทานการพาความร้อนปลายทรงกระบอกตัน ( $^\circ C/W$ )

### 3.3.4 ความต้านทานการพาความร้อนปลายรอยต่อทรงกระบอกกลวง

$$\begin{aligned} A_s &= \pi (r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2) = \pi r_e^2 (2n) \\ R_{HCConv,end} &= \frac{1}{h \pi r_e^2 (2n)} \end{aligned} \quad (30)$$

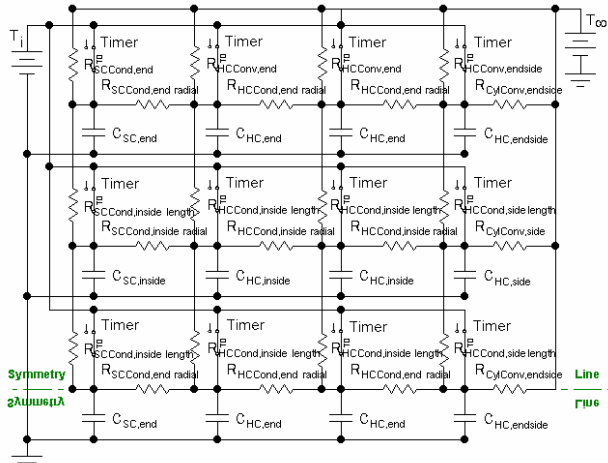
เมื่อ  $R_{HConv,end}$  – ความต้านทานการพาความร้อนปลายรอยต่อทรงกระบอกกลวง ( $^{\circ}C/W$ )

### 3.3.5 ความต้านทานการพาความร้อนปลายทรงกระบอกกลวงด้านข้าง

$$A_s = \pi(r_o^2 - r_i^2 \cdot 1/2) = \pi r_o^2(n-1/4)$$

$$R_{HConv,endside} = \frac{1}{h \pi r_o^2(n-1/4)} \quad (31)$$

เมื่อ  $R_{HConv,endside}$  – ความต้านทานการพาความร้อนปลายทรงกระบอกกลวงด้านข้าง ( $^{\circ}C/W$ )



รูปที่ 5 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนจำนวน 2 ท่อน ประกอบด้วย ทรงกระบอกตัน 2 ชิ้น เป็นแกนกลาง และทรงกระบอกกลวง 4 ชิ้น

### 4.การคำนวณเปรียบเทียบ

กำหนดให้ทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. ยาว 40 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $200^{\circ}C$  มีค่าสภาพการนำความร้อน  $237 W/m.^{\circ}C$ , ความหนาแน่น  $2702 kg/m^3$  และความจุความร้อนจำเพาะ  $903 J/kg.^{\circ}C$  ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ  $50^{\circ}C$  ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $500 W/m^2.^{\circ}C$

#### 4.1 คำนวณด้วยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

เนื่องจากการเป็นกรคำนวณซูเปอร์โพสิชันทางความร้อนของ ทรงกระบอกและผนัง ซึ่งต้องคำนวณผลการตอบสนองแบบ ทรงกระบอกความยาวไม่จำกัดและผลการตอบสนองแบบผนังกว้างยาว ไม่จำกัด แล้วนำมาคูณกันภายหลัง ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

##### 4.1.1 คำนวณผลการตอบสนองแบบทรงกระบอกความยาวไม่จำกัด

มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

##### 1.ตรวจสอบค่า Biot number (Bi) สำหรับ จาก (1)

$$r_o(\text{รัศมีทรงกระบอก}) = 0.05 \text{ m}$$

$$Bi = 0.1054852320675$$

ค่า Bi มากกว่า 0.1 แสดงว่าอุณหภูมิที่กึ่งกลางเนื้อวัสดุแตกต่างจากบริเวณพื้นผิว

##### 2.ตรวจสอบค่า Fourier number (Fo) จาก (7)

$$\alpha(\text{การแพร่กระจายความร้อน}) = 9.71348896228(10^{-5}) m^2/s$$

$$Fo = 3.885395585(10^{-2})t$$

ดังนั้นจะสามารถคำนวณด้วย Approximate solution ( $n=1$ ) ได้ เมื่อ  $Fo > 0.2$  ที่  $t > 5.14748101254 \text{ s}$

##### 3.คำนวณค่าคงที่ $\zeta_n$ จากสมการ (6)

คำตอบสมการมีได้หลายค่า ค่าที่น้อยที่สุดคือ  $n=1$  หรือ  $\zeta_1$  ค่า มากถัดไปเป็น  $n=2$  หรือ  $\zeta_2$

จากสมการ Trial & error จะได้ค่าเดียวคือ

$$\zeta_1 = 0.4533746319 \text{ rad}$$

##### 4.คำนวณค่าคงที่ C จาก (5)

$$C_1 = 1.025893673$$

##### 5.หาสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางทรงกระบอก(r) 0 mm จาก (4)

$$r^* = 0/50 = 0$$

$$J_0(\zeta_1 r^*) = J_0(0.4533746319 \cdot 0) = 1.0$$

$$\theta_{cyl} = 1.025893673 \text{Exp}(-7.986374555(10^{-3})t)$$

#### 4.1.2 คำนวณผลการตอบสนองแบบผนังกว้างยาวไม่จำกัด

มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

##### 1.ตรวจสอบค่า Biot number (Bi) สำหรับ จาก (2)

$$L(\text{ครึ่งหนึ่งความยาวทรงกระบอก}) = 0.02 \text{ m}$$

$$Bi = 4.219409283(10^{-2})$$

ค่า Bi น้อยกว่า 0.1 แสดงว่าอุณหภูมิที่กึ่งกลางความยาว ทรงกระบอกแตกต่างจากผิวด้านปลายทรงกระบอกไม่เกิน 5 % แต่ อย่างไรก็ตามจะคำนวณค่าที่กึ่งกลางความยาวทรงกระบอก

##### 2.ตรวจสอบค่า Fourier number (Fo) จาก (12)

$$\alpha(\text{การแพร่กระจายความร้อน}) = 9.71348896228(10^{-5}) m^2/s$$

$$Fo = 0.2428372241t$$

ดังนั้นจะสามารถคำนวณด้วย Approximate solution ( $n=1$ ) ได้ เมื่อ  $Fo > 0.2$  ที่  $t > 0.82359696188 \text{ s}$

##### 3.คำนวณค่าคงที่ $\zeta_n$ จากสมการ (11)

คำตอบสมการมีได้หลายค่า ค่าที่น้อยที่สุดคือ  $n=1$  หรือ  $\zeta_1$  ค่า มากถัดไปเป็น  $n=2$  หรือ  $\zeta_2$

จากสมการ Trial & error จะได้

$$\zeta_1 = 0.2039786 \text{ rad} ; \zeta_2 = 3.1549657 \text{ rad}$$

$$\zeta_3 = 6.2898934 \text{ rad} ; \zeta_4 = 9.4292527 \text{ rad}$$

$$\zeta_5 = 12.5697274 \text{ rad} ; \zeta_6 = 15.710649 \text{ rad}$$

##### 4.คำนวณค่าคงที่ C จาก (10)

$$C_1 = 1.006929309 ; C_2 = -8.441429784(10^{-3})$$

$$C_3 = 2.130686756(10^{-3}) ; C_4 = -9.486651642(10^{-4})$$

$$C_5 = \text{error} ; C_6 = \text{error}$$

5.หาสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ครึ่งหนึ่งของความยาว ทรงกระบอก(x) 0 mm จะคำนวณด้วย Approximate solution ( $n=1$ ) เท่านั้น จาก (9)

$$x^* = 0/50 = 0$$

$$\cos(\zeta_1 x^*) = \cos(0.2039786 \cdot 0) = 1.0$$

$$\theta_{wall} = 1.006929309 \text{Exp}(-1.010379377(10^{-2})t)$$

#### 4.1.3 คำนวณซูเปอร์โพสิชันทางความร้อนของทรงกระบอกและผนัง

นำค่า  $\theta_{Cyl}^*$  และค่า  $\theta_{Wall}^*$  ที่คำนวณได้มาคูณกันผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่า  $\theta^*$  ของทรงกระบอกสันดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 อุนหภูมิที่กึ่งกลางทรงกระบอกที่ตำแหน่งครึ่งหนึ่งของความยาวตามทฤษฎี

| เวลา(s) | $\theta^* = \theta_{Cyl}^* \times \theta_{Wall}^*$ | $T_{0,0,t} (^{\circ}C)$ |
|---------|----------------------------------------------------|-------------------------|
| 0       | 1.0000000000                                       | 200.0000000             |
| 40      | 0.5010059945                                       | 125.1508992             |
| 80      | 0.2429878234                                       | 86.44817352             |
| 120     | 0.1178490537                                       | 67.67735806             |
| 160     | 0.0571567713                                       | 58.57351570             |
| 200     | 0.0277210245                                       | 54.15815368             |

## 4.2 คำนวณด้วยวิธีวิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1.แบ่งทรงกระบอกออกเป็นท่อนๆ ยาวท่อนละ 1 mm ได้จำนวน 40 ท่อน แต่จะคำนวณถึงกึ่งกลางความยาวทรงกระบอกที่ 20 ท่อน ในแนวสมมาตรตามความยาว

2.แต่ละท่อนแบ่งออกเป็น 16 ระดับความลึกจากผิวหน้าถึงจุดศูนย์กลางทรงกระบอก แต่ละชั้นจะแบ่งเป็นชั้นวงแหวน เริ่มต้นแบ่งชั้นแรกที่มีรัศมี( $r_e=r_i$ ) 3.125 mm. ที่บริเวณผิวทรงกระบอกตันพอดี เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดการเพิ่มรัศมีวงแหวนคงที่ตลอดโดยมีความหนาทรงกระบอก( $r_i=r_r=r_o$ ) 3.125 mm.ทุกชั้น แบ่งไปจนได้จำนวน 16 ชั้น  $r_2=r_1+r_i=6.25$  mm.,  $r_3=r_1+2r_i=9.375$  mm.,...,  $r_{16}=r_1+15*r_i=50$  mm. ในแต่ละชั้นเหมือนกันหมด โดยชั้นวงแหวนที่แบ่งได้แต่ละวงของแต่ละชั้นจะมีค่ายาว 1 mm. เมื่อมองเป็นชั้นทรงกระบอกกลวงจะได้ชั้นทรงกระบอกกลวงที่มีรัศมีนอกมากกว่ารัศมีใน( $r_i=r_r=r_o$ ) 3.125 mm.ทุกชั้น และมีความยาวทรงกระบอก( $L_o$ ) 1 mm. ดังนั้นจะได้ชั้นย่อยแบบทรงกระบอกกลวงจำนวน  $15*20=300$  ชั้น นอกจากนี้ยังมีชั้นย่อยรูปทรงกระบอกตันที่มีรัศมี( $r_e=r_i$ ) 3.125 mm. อีกจำนวน 20 ชั้น รวมทั้งสิ้น 320 ชั้น

3.คำนวณค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีของแต่ละชั้นย่อย จาก(14)  $R_{SCCond0-1,inside\ radial}=0^{\circ}C/W$  จาก(13) เช่น  $R_{HCCCond1-2,inside\ radial}=0.4654759497^{\circ}C/W$ ,  $R_{HCCCond15-16,inside\ radial}=4.334018843(10^{-2})^{\circ}C/W$

4.คำนวณความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุในแนวรัศมี จาก(19)  $R_{SCCond0-1,end\ radial}=0^{\circ}C/W$  จาก(18) เช่น  $R_{HCCCond1-2,end\ radial}=0.9309518994^{\circ}C/W$ ,  $R_{HCCCond15-16,end\ radial}=8.668037686(10^{-2})^{\circ}C/W$

5.คำนวณความต้านทานความร้อนในแนวแกนทรงกระบอกซึ่งเป็นความต้านทานความร้อนในแต่ละชั้นวัสดุ จาก(16)  $R_{SCCond0-0j,inside\ length}=0.5501254404^{\circ}C/W$  จาก(15) เช่น  $R_{HCCCond11-1j,inside\ length}=6.876568005(10^{-2})^{\circ}C/W$ ,  $R_{HCCCond15i-15j,inside\ length}=4.58437867(10^{-3})^{\circ}C/W$

6.คำนวณความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุในแนวแกนทรงกระบอก จาก(17)  $R_{HCCCond16i-16j,side\ length}=8.732149848(10^{-3})^{\circ}C/W$

7.คำนวณค่าความจุความร้อนภายในทรงกระบอก ที่แกนกลางทรงกระบอกตัน(23)  $C_{SC0,inside}=0.01871384464^{\circ}C/W$  ที่รอยต่อทรงกระบอกกลวง(22)  $C_{HC1,inside}=0.1497107571^{\circ}C/W$ ,  $C_{HC2,inside}=0.2994215143^{\circ}C/W$

8.คำนวณค่าความจุความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุดจาก(21)  $C_{HC16,side}=1.178972212^{\circ}C/W$

9.คำนวณค่าความจุความร้อนปลายทรงกระบอก ที่แกนทรงกระบอกตัน(26)  $C_{SC0,end}=0.00935690^{\circ}C/W$  ที่รอยต่อทรงกระบอก จาก(24)  $C_{HC1,end}=0.07485537857^{\circ}C/W$ ,  $C_{HC2,end}=0.1497107571^{\circ}C/W$

10.คำนวณค่าความจุความร้อนบริเวณปลายทรงกระบอกผิวด้านข้าง จาก(25)  $C_{HC16,endside}=0.589486106^{\circ}C/W$

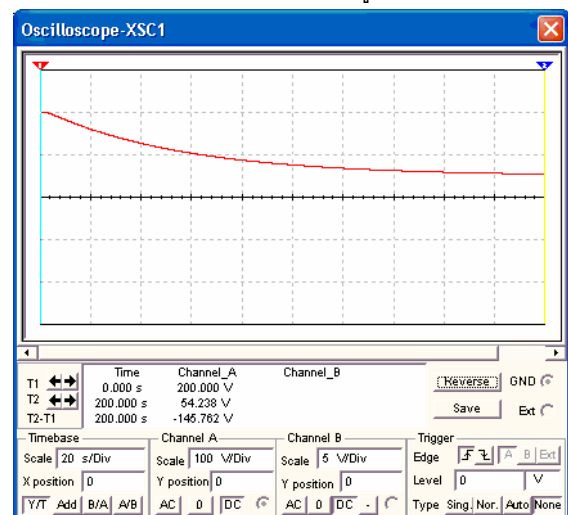
11.คำนวณค่าความต้านทานการพาความร้อนด้านข้างทรงกระบอก จาก(27)  $R_{CylConv16,side}=6.366197724^{\circ}C/W$  ที่บริเวณด้านข้างตอนปลาย จาก(28)  $R_{CylConv16,endside}=12.73239545^{\circ}C/W$

12.คำนวณความต้านทานการพาความร้อนด้านปลายที่ทรงกระบอกตัน จาก(29)  $R_{SCConv0,end}=260.7594588^{\circ}C/W$  ที่รอยต่อทรงกระบอกกลวง จาก(30) เช่น  $R_{HCCConv1,end}=32.59493234^{\circ}C/W$ ,  $R_{HCCConv2,end}=16.29746617^{\circ}C/W$ ,  $R_{HCCConv15,end}=2.17299549^{\circ}C/W$

13.คำนวณค่าความต้านทานการพาความร้อนด้านปลายขอบทรงกระบอก จาก(31)  $R_{HCylConv16,endside}=4.139039028^{\circ}C/W$

14.เขียนตัวต้านทานและตัวหน่วงเวลาตัดไฟ (Delay off Timer) 1 วินาที ลงใน Electronic work sheet ในโปรแกรมมัลติซิม แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆได้เช่นกัน ดังรูปที่ 5

15.คำนวณศักย์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลง ซึ่งค่าที่ได้คืออุนหภูมินั่นเอง ผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรม ช่วงเวลา 0 ถึง 200 วินาที

ซึ่งจะอ่านค่าอุนหภูมิจากกราฟได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 อุณหภูมิที่อุณหภูมิที่กึ่งกลางทรงกระบอกที่ตำแหน่งครึ่งหนึ่งของความยาวจากโปรแกรม โดย 1 วินาทีแรกเป็นการกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้น

| เวลา(s) | อุณหภูมิ( $^{\circ}\text{C}$ ) |
|---------|--------------------------------|
| 1+0     | 200.0000                       |
| 1+40    | 125.1849                       |
| 1+80    | 86.46675                       |
| 1+120   | 67.68737                       |
| 1+160   | 58.57886                       |
| 1+200   | 54.16098                       |

## 5. วิเคราะห์ผล

หาค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

| เวลา(s) | Error(%)   |
|---------|------------|
| 40      | 0.02716784 |
| 80      | 0.02148857 |
| 120     | 0.01479363 |
| 160     | 0.00912409 |
| 200     | 0.00521864 |

จะเห็นได้ว่าเป็นค่าความผิดพลาดที่น้อยมาก สำหรับเวลาที่ยาวนานกว่า 201 s นั้น อุณหภูมิจะเข้าใกล้  $T_{\infty}$  มากยิ่งขึ้น

## 6. สรุป

เมื่อกำหนดให้ทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. ยาว 40 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $200^{\circ}\text{C}$  มีค่าสภาพการนำความร้อน  $237 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ , ความหนาแน่น  $2702 \text{ kg/m}^3$  และความความร้อนจำเพาะ  $903 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$  ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ  $50^{\circ}\text{C}$  ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $500 \text{ W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$  เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่กึ่งกลางทรงกระบอกที่ตำแหน่งครึ่งหนึ่งของความยาว ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 120 วินาที ปรากฏว่ามีความแตกต่าง 0.0148 %

จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ชิ้นส่วนทรงกระบอกสั้นที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุเป็นจำนวนมากนี้ สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าที่ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของรูปร่างและเนื้อวัสดุต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1] ประเสริฐ อินประเสริฐ, 2548, การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในผนังด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 19, หน้า 1169-1173.
- [2] ประเสริฐ อินประเสริฐ, 2549, การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 20, หน้า 412-417.
- [3] Frank P. Incropera, David P. DeWitt, 2002, Introduction to Heat Transfer, 4<sup>th</sup> ed., Purdue University, John Wiley & Sons, Inc, U.S.A., pp 254-257, 260-261, 275, 849.
- [4] Frank W. Schmidt, Robert E. Henderson, Carl H Wolgemuth, 1993, Introduction to Thermal Sciences, 2<sup>nd</sup> ed., The Pennsylvania State University, U.S.A. John Wiley & Sons, Inc, Singapore, pp. 388, 430.
- [5] Jan F. Kreider, Ari Rabl, 1994, Heating and Cooling of Buildings, University of Colorado at Boulder, McGraw-Hill, inc, New York, U.S.A., pp. 370-381.
- [6] Martin Marz, Paul Nance, 2000, Thermal Modeling of Power-Electronic Systems, Fraunhofer Institute for Integrated Circuit, [http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb\\_geb/pub\\_les/02\\_00.pdf](http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb_geb/pub_les/02_00.pdf), (accessed on Oct 2005)
- [7] Satish P. Ketkar, Ph.D, 1999, Numerical thermal analysis, The MacNeal-Schwendler Corporation, ASME Press, New York, pp. 59-70.
- [8] Yunus A. Cengel, 1998, Heat Transfer a Practical Approach, University of Nevada, Reno, McGraw-Hill, Inc, U.S.A., pp. 228-229, 233-234.