

การคำนวณผลการตอบสนองของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางรัศมีทรงกลม ด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

Calculating Temperature Response at Mid-Radius of Sphere By Finite Resistance-Capacitance Method

ประเสริฐ อินประเสริฐ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม

235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163

โทร. 457-0068 ต่อ 121, โทรสาร 457-3982, อีเมล Prasert_Inp@yahoo.com

Prasert Inprasert

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Siam University

235 Petkasem Road, Phasicharoen, Bangkok 10163

Tel: 457-0068 Ext 121, Fax: 457-3982, E-Mail: Prasert_Inp@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลตอบสนองของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางรัศมีทรงกลมที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นทรงกลมกลวงเปลือกบางซ้อนกันเป็นจำนวนมาก ซึ่งแต่ละชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบ็นซ์คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด เมื่อกำหนดให้ทรงกลมอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน $237 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, ความหนาแน่น 2702 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ $903 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50°C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $500 \text{ W/m}^2^{\circ}\text{C}$ เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า 25 mm ด้วยโปรแกรมโดยใช้เวลาผ่านไป 240 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.57 % จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความร้อนวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์นี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าได้ ซึ่งการคำนวณการเปลี่ยนอุณหภูมิในพิกัดทรงกลมนี้ใช้คำนวณแก้ปัญหาการเก็บความร้อนของก้อนกลมที่บรรจุอยู่ในแพคเกจ

คำสำคัญ: วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การตอบสนองอุณหภูมิ, อุณหภูมิภายในทรงกลม

Abstract

This paper presents the calculation of temperature response at mid-radius of sphere by the finite resistance-capacitance method. By dividing a material to many thin shell hollow sphere elements, where each element is comprised of a conduction resistance and a heat capacitance. For convection heat transfer on a surface area to fluid, a convection resistance is used. ELECTRONIC WORKBENCH software is used to calculate this finite resistance-capacitance model and the results are compared with analytical method to find difference in temperature response. In the calculation, an aluminum sphere is of 50 mm radius. This sphere, initially at 200°C , has thermal conductivity $237 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, density 2702 kg/m^3 and specific heat $903 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$. This object is placed suddenly in fluid at 50°C with the estimated convection heat transfer coefficient of $500 \text{ W/m}^2^{\circ}\text{C}$. Calculated temperature depth from the surface at 25 mm to 240 sec by this software, differs from the analytical solution by 0.57 %. From the difference of results, it is shown that this finite resistance-capacitance model can be calculated by electrical theory which radial coordinate system use to solve problem on heat storage of a spherical particulate in packed bed.

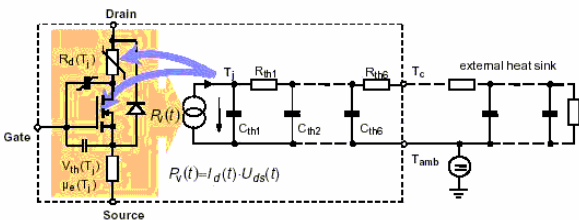
Keywords: finite resistance-capacitance method, temperature response, inside sphere temperature

1. บทนำ

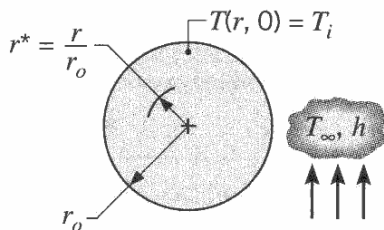
บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์[5,7] ในเนื้อวัสดุทรงกลม ซึ่งการถ่ายเทความร้อนจากจุดหนึ่งในเนื้อวัสดุไปยังอีกจุดหนึ่งนั้นขึ้นอยู่กับสภาพการนำความร้อนของวัสดุนั้นๆ กรณีเทียบเคียงกับค่าทางไฟฟ้าคือสภาพการนำไฟฟ้าของวัสดุเมื่อเทียบเคียงกับสัญลักษณ์อุปกรณ์ทางไฟฟ้าก็จะเป็นตัวต้านทานไฟฟ้าหรือรีซิสเตอร์นั่นเอง และจากความจริงที่ว่าวัสดุเมื่อได้รับพลังงานความร้อนเพิ่มขึ้นจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นและเมื่อสูญเสียความร้อนอุณหภูมิจะลดลง ซึ่งสามารถคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้โดยทราบค่าความร้อนจำเพาะหรือค่าความจุความร้อนของวัสดุนั้นๆ กรณีเทียบเคียงกับสัญลักษณ์และอุปกรณ์ทางไฟฟ้าก็จะเป็นตัวเก็บประจุไฟฟ้าหรือคาปาซิเตอร์นั่นเอง

ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสถานะแปรเปลี่ยนที่มีเพียงชั้นเดียวได้แสดงการคำนวณให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้[1] และเมื่อเพิ่มจำนวนชั้นมากขึ้นให้เป็นวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์โดยนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาอุณหภูมิในผนัง[2]และทรงกระบอก[3]ที่เวลาผ่านไปจะทำให้ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนชั้นที่มากขึ้น

นอกจากนี้ยังมีการใช้วงจรทางไฟฟ้าคำนวณร่วมกับวงจรทางความร้อนเพื่อศึกษาผลของความร้อนที่มีต่อชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ ดังรูปที่ 1 เนื่องจากการไหลของไฟฟ้ามีผลให้เกิดความร้อนในชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์และความร้อนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์มีผลต่อการไหลของกระแสไฟฟ้าเช่นกัน[6]



รูปที่ 1 วงจรไฟฟ้าด้านซ้ายเป็นวงจรไฟฟ้าของ DMOS ส่วนด้านขวาเป็นวงจรไฟฟ้าของ Heat sink [6]



รูปที่ 2 เงื่อนไขการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกลมเมื่อเวลาผ่านไป หลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า[4]

สำหรับบทความนี้วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์มาประยุกต์ใช้กับทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อไม่เท่ากันที่ระดับความลึกจากผิวต่างๆกัน โดยการแบ่งเนื้อวัสดุในพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate) ออกเป็นทรงกลมกลวงเปลือกบางซ้อนกันเป็น

จำนวนมาก สำหรับชั้นจุดศูนย์กลางเป็นทรงกลมตัน ซึ่งแต่ชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวอร์คเบ็นซ์คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด

2. การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกลมรัศมี r_0 ดังรูปที่ 2 จะได้ว่าอุณหภูมิที่ระดับความลึกเดียวกันจากผิวหน้ามีค่าเท่ากันตลอด

2.1 เงื่อนไขการคำนวณ

พิจารณาความเป็นไปได้เมื่ออุณหภูมิในทรงกลมจะมีค่าไม่เท่ากันหลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิแตกต่างจากผิวทรงกลมเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องมาจากสาเหตุเหล่านี้คือ สภาพการนำความร้อนวัสดุมีค่าต่ำมาก, สัมประสิทธิ์การพาความร้อนผิววัสดุสูงมาก หรือทรงกลมมีขนาดใหญ่มาก ซึ่งความสัมพันธ์ของเงื่อนไข 3 ประการนี้ แสดงเป็นค่า Biot number (Bi) ถ้าผลการคำนวณค่า $Bi > 0.1$ จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าการกระจายอุณหภูมิมีความแตกต่างกัน $> 5\%$ [8] ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขบังคับให้ต้องคำนวณการกระจายอุณหภูมิภายในวัตถุ ถ้าต้องการคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนให้ถูกต้องยิ่งขึ้น

$$Bi = \frac{hr_0}{k} \quad (1)$$

เมื่อ h - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ($W/m^2 \cdot ^\circ C$)

r_0 - รัศมีทรงกลม (m)

k - สภาพการนำความร้อนวัสดุ ($W/m \cdot ^\circ C$)

2.2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใด ๆ

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใด ๆ เป็นดังนี้[4]

$$\frac{(T_{x,t} - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} \sin(\xi_n \frac{r}{r_0}) / (\xi_n \frac{r}{r_0}) \quad (2)$$

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} \sin(\xi_n r^*) / (\xi_n r^*) \quad (3)$$

โดย

$$C_n = \frac{4[\sin(\xi_n) - \xi_n \cos(\xi_n)]}{2\xi_n - \sin(2\xi_n)} \quad (4)$$

$$1 - \xi_n \cot(\xi_n) = Bi \quad (5)$$

$$Fo = \frac{kt}{\rho C_p r_0^2} = \frac{\alpha t}{r_0^2} \quad (6)$$

เมื่อ $T_{x,t}$ - อุณหภูมิวัสดุที่ความลึกจากผิวหน้า x ณ เวลา t ($^\circ C$)

T_∞ - อุณหภูมิของไหล ($^\circ C$)

T_i - อุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ ($^{\circ}\text{C}$)

θ^* - อัตราส่วนผลต่างอุณหภูมิจากของไหล (-)

t - เวลาที่ผ่านไป (s)

α - ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายความร้อน (m^2/s)

ρ - ความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)

C_p - ความร้อนจำเพาะของวัสดุ ($\text{J}/\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}$)

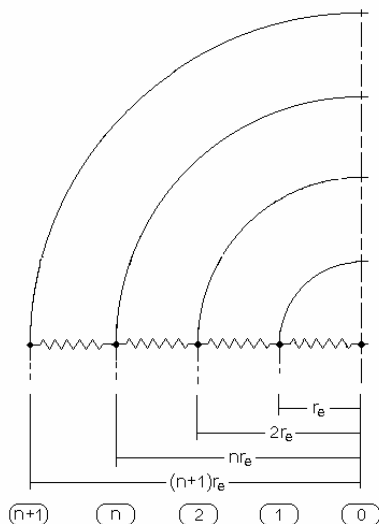
สำหรับการคำนวณโดยประมาณ (Approximate solution) นั้น จะใช้ค่า $n=1$ เท่านั้น ซึ่งต้องตรวจสอบ Fourier number (Fo) ถ้าผลการคำนวณค่า $Fo > 0.2$ จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าอุณหภูมิที่คำนวณได้เป็นเวลาต่างๆ มีความผิดพลาด $< 2\%$ [8] แต่ถ้าค่า $Fo < 0.2$ ต้องเพิ่มอันดับ n ให้มากขึ้น เช่น $n = 1, 2$ หรือ $n = 1, 2, 3$ เป็นต้น

3. การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์-คาปาซิแทนซ์

โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชิ้นเล็กๆ รูปทรงกลมตันเป็นแกนกลาง แล้วซ้อนด้วยทรงกลมกลวงจำนวนมาก แล้วนำมาประกอบกันดังรูปที่ 4 เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้รัศมีทรงกลมกลวงชั้นในสุดมีขนาดเท่ากับรัศมีทรงกลมตัน r_e และให้ความหนาทรงกลมกลวงทุกชั้นมีขนาด r_e เท่ากันหมด ซึ่งแต่ละชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว

3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อน

เนื่องจากการวิเคราะห์ถ่ายเทความร้อนแบบ 1 มิติ ในแนวรัศมี ค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 รูปแบบคือการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกลมกลวง และการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกลมตัน ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุระหว่างแต่ละชั้น

3.1.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุแนวรัศมีทรงกลมกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกลมแนวที่ $n+1$ และผิวทรงกลมแนวที่ n ในกรอบเส้นประ เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้ [4]

$$R_{HSCond, inside radial} = \frac{(1/r_n - 1/r_{n+1})}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k r_e n(n+1)} \quad (7)$$

เมื่อ $R_{HSCond, inside radial}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกลมกลวงในแนวรัศมี ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)

r_{n+1}, r_n - รัศมีด้านนอก และรัศมีด้านใน Element ชนิดทรงกลมกลวงที่ n

n - หมายเลขทรงกลมกลวง (ดูรูปที่ 3)

k - สภาพการนำความร้อน ($\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$)

3.1.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกลมตัน

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกลมตันแนวที่ 1 และจุดศูนย์กลางทรงกลมตันแนวที่ 0 ของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน จะเห็นได้ว่าพื้นที่ผิวของจุดศูนย์กลางทรงกลมมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรการนำความร้อนของทรงกลมกลวงได้ ด้วยเหตุนี้จึงกำหนดให้อุณหภูมิที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมเท่ากับอุณหภูมิที่ผิวทรงกลมตันแนวที่ 1 นั่นคือความต้านทานความร้อนมีค่าเท่ากับศูนย์ จึงได้ค่าดังนี้

$$R_{SSCond, inside radial} = 0 \quad (8)$$

เมื่อ $R_{SSCond, inside radial}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกลมตันในแนวรัศมี ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)

3.2 ตัวเก็บความร้อน

ตัวเก็บความร้อนมีค่าเท่ากับความร้อนของวัสดุ ดังนี้ [1]

$$C_t = mC_p = \rho V C_p \quad (9)$$

เมื่อ C_t - ความจุความร้อน ($\text{J}/^{\circ}\text{C}$)

m - มวลวัสดุ (kg)

V - ปริมาตร (m^3)

ตัวเก็บความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 แบบคือในเนื้อทรงกลมตัน และในเนื้อทรงกลมกลวง แต่เนื่องจากการคำนวณนี้แบ่งออกเป็น Node ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างทรงกลมกลวง ดังนั้นจึงแยกตัวเก็บความร้อนออกเป็น 3 ประเภทคือผิวทรงกลมกลวงชั้นนอกสุด, รอยต่อทรงกลมกลวงที่วางซ้อนกันและจุดศูนย์กลางของทรงกลมตัน

3.2.1 ตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกลมกลวงชั้นนอกสุด

แบ่งเนื้อจำนวนครึ่งความหนาทรงกลมกลวงด้านนอกให้เป็นตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกลมด้านนอกสุด โดยสมมุติให้ชั้นนอกสุดเป็นชั้นที่ n จะได้

$$V_{HS, edge} = (4/3)\pi (r_n^3 - r_{n-1/2}^3) = (4/3)\pi r_e^3 [(3/2)n^2 - (3/4)n + 1/8] \\ C_{HS, edge} = \rho C_p (4/3)\pi r_e^3 [(3/2)n^2 - (3/4)n + 1/8] \quad (10)$$

เมื่อ $C_{HS, edge}$ - ความจุความร้อนที่ผิวทรงกลมกลวงชั้นนอกสุด ($\text{J}/^{\circ}\text{C}$)

3.2.2 ตัวเก็บความร้อนที่รอยต่อทรงกลม

บริเวณรอยต่อทรงกลม ใช้เนื้อทรงกลมกลวงด้านในของชั้นที่ $n+1$ จำนวนครึ่งความหนา และใช้เนื้อทรงกลมด้านนอกของชั้นที่ n จำนวนครึ่งความหนาจะได้

$$\begin{aligned} V_{HS,inside} &= (4/3) \pi (r_{n+1/2}^3 - r_{n-1/2}^3) \\ &= (4/3) \pi r_e^3 [3n+1/4] \\ C_{HS,inside} &= \rho C_p (4/3) \pi r_e^3 [3n+1/4] \end{aligned} \quad (11)$$

เมื่อ $C_{HS,inside}$ - ความจุความร้อนที่รอยต่อทรงกลม($J/^\circ C$)

3.2.3 ตัวเก็บความร้อนที่จุดศูนย์กลางทรงกลมตัน

เนื่องจากได้แบ่งเนื้อที่ผิวทรงกลมตันแล้วไปครึ่งหนึ่งให้กับรอยต่อที่ $n=1$ ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครึ่งเดียวของรัศมีทรงกลมตัน

$$\begin{aligned} V_{SS, cen} &= (4/3) \pi \left[\frac{r_e}{2} \right]^3 \\ C_{SS, cen} &= \rho C_p (4/3) \pi r_e^3 [1/8] \end{aligned} \quad (12)$$

เมื่อ $C_{SS, cen}$ - ความจุความร้อนที่แกนกลางทรงกลมตัน($J/^\circ C$)

3.3 ตัวต้านทานการพาความร้อน

ตัวต้านทานการพาความร้อนมีค่าดังนี้[4]

$$R_{Conv} = \frac{1}{h A_s} \quad (13)$$

เมื่อ R_{Conv} - ความต้านทานการพาความร้อน($^\circ C/W$)

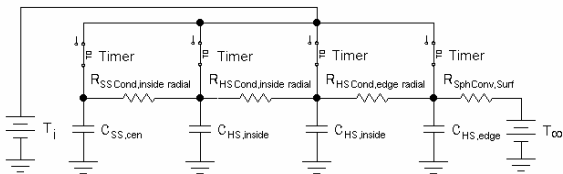
A_s - พื้นที่ผิววัสดุที่สัมผัสกับของไหล (m^2)

$$A_s = 4\pi r^2 \quad m^2$$

แทนค่า A_s ในสมการ(12)

$$R_{SphConv, Surf} = \frac{1}{h 4\pi r_o^2} \quad (14)$$

เมื่อ $R_{SphConv, Surf}$ - ความต้านทานการพาความร้อนที่ผิวทรงกลม ($^\circ C/W$)



รูปที่ 4 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยทรงกลมตันเป็นแกนกลางและทรงกลมกลวง 2 ชั้น อยู่ในของไหล

4. การคำนวณเปรียบเทียบ

เมื่อกำหนดให้อลูมิเนียมทรงกลมมีรัศมี(r_o) 50 mm มีอุณหภูมิเริ่มต้น(T_i) $200^\circ C$ มีค่าสภาพการนำความร้อน(k) $237 W/m \cdot ^\circ C$, ความหนาแน่น(ρ) $2702 kg/m^3$ และความจุความร้อนจำเพาะ(C_p) 903

$J/kg \cdot ^\circ C$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ(T_∞) $50^\circ C$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน(h) $500 W/m^2 \cdot ^\circ C$

4.1 คำนวณด้วยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1.คำนวณค่า Biot number จาก(1)

$$r_o = 0.05 \quad m$$

$$Bi = 0.1054852320675$$

ค่า Bi มากกว่า 0.1 แสดงว่าอุณหภูมิที่กึ่งกลางเนื้อวัสดุแตกต่างจากบริเวณพื้นผิว

2.ตรวจสอบค่า Fourier number (Fo) จาก (6)

$$\alpha (\text{การแพร่กระจายความร้อน}) = 9.71348896228(10^{-5}) m^2/s$$

$$Fo = 3.885395585(10^{-2})t$$

ดังนั้นจะสามารถคำนวณด้วย Approximate solution ($n=1$) ได้เมื่อ $Fo > 0.2$ ที่ $t > 5.14748101254 s$

3.คำนวณค่าคงที่ ξ จากสมการ Transcendental (5)

$$1 - \xi_n \cot(\xi_n) = 1 - \xi_n / \tan(\xi_n) = 0.1054852320675$$

คำตอบสมการนี้ได้หลายค่า ค่าที่น้อยที่สุดคือ $n=1$ หรือ ξ_1 ค่ามากถัดไปเป็น $n=2$ หรือ ξ_2 ค่าโดยประมาณสำหรับการเริ่มต้น

Trial&error ของ ξ ทั้ง 6 อันดับคือ 1,4,7,10,13,16

จากสมการ Trial&error จะได้

$$\xi_1 = 0.5566506 \quad ; \quad \xi_2 = 4.5168805$$

$$\xi_3 = 7.7389056 \quad ; \quad \xi_4 = 10.9137952$$

$$\xi_5 = 14.0736930 \quad ; \quad \xi_6 = 17.2268807$$

4.คำนวณค่าคงที่ C จาก(4)

$$C_1 = 1.0314419912 \quad ; \quad C_2 = -4.783544587(10^{-2})$$

$$C_3 = 2.748587461(10^{-2}) \quad ; \quad C_4 = -1.941073718(10^{-2})$$

$$C_5 = \text{error} \quad ; \quad C_6 = \text{error}$$

แสดงว่าใช้ค่า n ได้สูงสุดเพียง 4 อันดับเท่านั้น

5.หาสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า(x)

25 mm จาก(3)

$$\dot{r} = 25/50 = 0.5$$

$$\begin{aligned} \theta^* &= 1.018154909 \exp(-0.0120392825t) \\ &\quad - 1.636728482(10^{-2}) \exp(-0.7927065453t) \\ &\quad - 4.725635947(10^{-3}) \exp(-2.326989055t) \\ &\quad + 2.615966788(10^{-3}) \exp(-4.627930647t) \end{aligned}$$

6.คำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ผลดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 อุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางรัศมีตามทฤษฎี

เวลา(s)	θ^*	อุณหภูมิ($^\circ C$)
160	0.148333357	72.25000361
240	0.056617581	58.49263715
320	0.021610450	53.24156738

4.2 คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

สำหรับการคำนวณนี้ใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนครึ่งคำนวณ แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆ คำนวณได้ ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1.แบ่งทรงกลมในแนวรัศมีออกเป็น 16 ระดับความลึกเท่าๆกัน จากผิวหน้าถึงจุดศูนย์กลางทรงกลม ได้แกนกลางเป็นทรงกลมตัน 1 ชั้นและทรงกลมกลวงซ้อนกันจำนวน 15 ชั้น

2.เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้ความหนาเปลือกทรงกลมกลวงมีค่าเท่ากันหมดทุกชั้นย่อย และค่าความหนาเปลือกทรงกลมกลวงจะมีค่าเท่ากับรัศมีทรงกลมตันที่อยู่ชั้นในสุด ซึ่งคำนวณได้ค่ารัศมีทรงกลมตัน(r_0) $50/16=3.125$ mm การเพิ่มความหนาทรงกลมกลวงให้คงที่ตลอด($r_i=r_1=r_0$) 3.125 mm ทุกชั้น

3.คำนวณรัศมีผิวทรงกลมทุกๆชั้น จะได้

$$r_2=r_1+r_i=2r_0=6.25\text{mm},$$

$$r_3=r_1+2r_i=3r_0=9.375\text{mm},\dots,$$

$$r_{16}=r_1+15*r_i=16r_0=50\text{ mm}$$

5.การคำนวณหาค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีของแต่ละชั้นย่อย จาก(8) $R_{SSCond0-1,inside\ radial}=0$ °C/W จาก(7) เช่น $R_{HSCond1-2,inside\ radial}=5.372318754(10^{-2})$ °C/W, $R_{HSCond15-16,inside\ radial}=4.476932295(10^{-4})$ °C/W

6.คำนวณหาค่าความต้านทานการพาความร้อนจาก(14) จะได้

$$R_{SphConv,Surr}=6.366197724(10^{-2})$$
 °C/W

7.คำนวณค่าตัวเก็บประจุของแต่ละชั้นย่อยที่ได้แบ่งไว้ จาก(12)

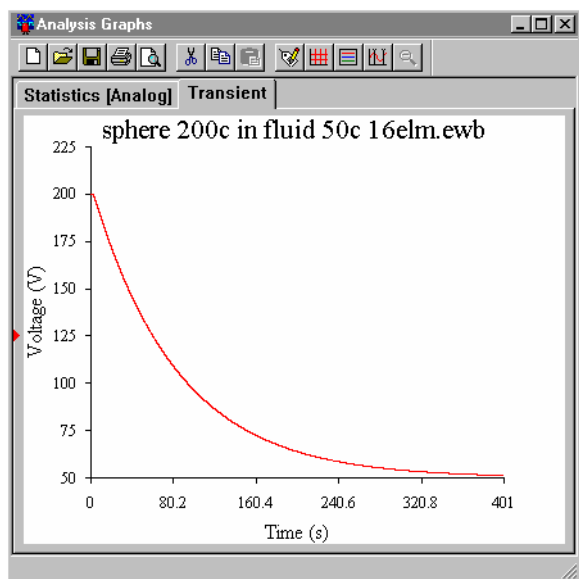
$$C_{SS0, cen}=3.898717632(10^{-2})$$
 J/°C

จาก(11) เช่น

$$C_{HS1, inside}=1.013666584$$
 J/°C, $C_{HS15, inside}=210.6087265$ J/°C

$$\text{จาก (10) } C_{HS16, edge}=116.0648239$$
 J/°C

8.เขียนตัวต้านทานและตัวเก็บประจุลงใน Work sheet ของโปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนครึ่ง จากรูปที่ 4 ในรูปได้ใส่ตัว Timer switch 1 วินาทีไว้ เพื่อดึงค่าอุณหภูมิเริ่มต้น(T_i) หลังจาก 1 วินาทีแล้ว การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื้อวัสดุจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของไหล(T_∞)



รูปที่ 5 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนครึ่ง จากเวลา 0 ถึง 401 วินาที

9.ใช้โปรแกรมคำนวณการเปลี่ยนแปลงค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า(V) โดยเลือกการวิเคราะห์แบบ Transient ซึ่งค่าที่ได้คือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ(T)เมื่อเวลาผ่านไปนั่นเอง โดยกำหนดจุดที่จะหาการเปลี่ยนแปลงอยู่ที่ความลึกจากผิวหน้า 25 mm คือที่รอยต่อระหว่างตัวต้านทานที่ 8 กับ 9 ($n=8$) ตั้งเวลาสิ้นสุดการวิเคราะห์ถึงวินาทีที่ 401 ในระหว่างการคำนวณ โปรแกรมจะเขียนกราฟแสดงการการเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้า(V)หรืออุณหภูมิ(T) แสดงดังรูปที่ 5 ซึ่งจะอ่านค่าอุณหภูมิจากกราฟได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 อุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm จากโปรแกรม

เวลา(s)	อุณหภูมิ(°C)
1+160	72.39819005
1+240	58.82352941
1+320	53.39366516

5. วิเคราะห์ผล

หาค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	Error(%)
160	0.205102322
240	0.565698997
320	0.285674870

จะเห็นได้ว่าเป็นค่าความผิดพลาดที่น้อยมาก สำหรับเวลาที่มากกว่า 401 s นั้น อุณหภูมิจะเข้าใกล้ T_∞ มากยิ่งขึ้น

แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็ไม่ได้ค่า Exact Value เป็นเพียงค่า Accept Value เท่านั้น ถึงแม้ว่าจะเป็น Exact Solution ที่ได้จาก Analytical ก็ตาม สาเหตุเนื่องจากไม่สามารถแก้ Differential Equation นี้ได้โดยตรง จึงมีการใช้อุนุกรมกำลัง[4]มาช่วยแก้สมการ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นอนุกรมอันดับอนันต์ ดังนั้นจึงไม่สามารถแทนค่า n ลงในสมการ (3)(4)(5) ที่อันดับอนันต์ได้ เพราะจะมีค่ามากถัดไปเสมอไม่สิ้นสุด(อนันต์) ค่าที่ได้จึงเป็นค่าโดยประมาณที่ยอมรับได้เท่านั้น เป็นค่า Accept Value ที่ยอมให้เกิดความผิดพลาดทศนิยมตำแหน่งที่เท่าใดเป็นต้นไปแล้วจะกำหนดอันดับสูงสุดของ n เช่น Approximate Solution ใช้ $n=1$ เท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามบทความที่นำเสนอนี้ ใช้ $n=1,2,3,4$ เพื่อเพิ่มความละเอียดของตัวเลขสำหรับไว้ในการเปรียบเทียบ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าค่าที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นค่าโดยประมาณที่ยอมรับได้เท่านั้น ถ้าต้องการความถูกต้องมากกว่านี้ต้องเพิ่มอันดับ $n \rightarrow \infty$

6. สรุป

เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกลมอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน 237 W/m.°C, ความหนาแน่น 2702 kg/m³ และค่าความจุความร้อนจำเพาะ 903 J/kg.°C ทำให้

เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50 °C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 500 W/m².°C เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm ตรงจุดกึ่งกลางรัศมี ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 240 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.57 % จากทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการ Differential ได้โดยตรง

จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ชิ้นส่วนทรงกลมที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุเป็นจำนวนมากนี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าที่ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] ประเสริฐ อินประเสริฐ, 2547, การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิของวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ ด้วยวิธีวิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 18, หน้า 953-956.
- [2] ประเสริฐ อินประเสริฐ, 2548, การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในผนังด้วยวิธีไฟไนต์วิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 19, หน้า 1169-1173.
- [3] ประเสริฐ อินประเสริฐ, 2549, การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอกด้วยวิธีไฟไนต์วิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 20, หน้า 412-417.
- [4] Frank P. Incropera, David P. DeWitt, 2002, Introduction to Heat Transfer, 4nd ed., Purdue University, John Wiley & Sons, Inc, U.S.A., pp. 111,254-257,260-261.
- [5] Jan F. Kreider, Ari Rabl, 1994, Heating and Cooling of Buildings, University of Colorado at Boulder, McGraw-Hill, Inc, New York, U.S.A., pp. 370-381.
- [6] Martin Marz, Paul Nance, 2000, Thermal Modeling of Power-electronic Systems, Fraunhofer Institute for Integrated Circuit, http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb_geb/pub_les/02_00.pdf, (accessed on Oct 2005)
- [7] Satish P. Ketkar, 1999, Numerical thermal analysis, The MacNeal-Schwendler Corporation, ASME Press, New York, pp. 59-70.
- [8] Yunus A. Cengel, 1998, Heat Transfer a Practical Approach, University of Nevada, Reno, McGraw-Hill, Inc, U.S.A., pp. 228-229,233-234.