18-20 October 2006, Mandarin Golden Valley Hotel & Resort Khao Yai, Nakhon Ratchasima

AMM044

# การเปลี่ยนพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น

# Transition from Plate-Like to Beam-Like Behaviour of Cantilevered Plates and Beams

นิติพงศ์ โพธิ์ทอง<sup>1\*</sup> เกียรติฟ้า ดั้งใจจิต<sup>2</sup> ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อ.เมือง จ.ขอนแก่น 40002 โทร 0-43202845 โทรสาร 0-43202849 \*อีเมล์ s75099@hotmail.com

Nitipong Photong<sup>1\*</sup>, Kiatfa Tangchaichit<sup>2</sup>

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University,

Khon Kaen, 40002, Thailand

Tel: 0-43202845 Fax: 0-43202849 \*E-mail: s75099@hotmail.com

#### บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้ได้ทำการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของ แผ่นบางยื่นและคานยื่น ที่มีค่าความหนาเท่ากับ 5 มิลลิเมตร, ความยาว คงที่ 500 มิลลิเมตร และมีความกว้างของแผ่นบางยื่นและคานยื่นแปร ตามอัตราส่วนทางเรขาคณิตจาก 0.25 ถึง 20 โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์ เอลิเมนต์วิเคราะห์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ 40 ค่า แรกของค่าความถี่ธรรมชาติ ซึ่งรูปร่างโหมดนี้เป็นค่าที่จะสามารถบอก ถึงความแตกต่างของพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นบางยื่นและ คานยื่นได้ ในการศึกษาครั้งนี้ได้ทำการหาความสัมพันธ์ระหว่างสมการ ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ทำให้ได้เส้นโค้ง ของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้าย คานยื่น ที่มีความสัมพันธ์เป็นสมการโพลิโนเมียล

#### Abstract

The free vibration analysis of cantilevered plates and beams with thickness 5 mm. The lengthwise was fixed 500 mm and the breadthwise was varied with the geometric ratios of 0.25 up to 20 were analysed by means of the finite element analysis. The analysis was used to calculate the first 40 natural frequencies and mode shapes. The mode shape was used to identify the behaviour of cantilevered beam-like or plate-like. The transition curve from cantilevered plate-like to cantilevered beam-like behaviour was found in polynomial form.

#### 1. บทนำ

การสั่นสะเทือน (Vibration) คือการเคลื่อนที่ของวัตถุรอบ ๆจุดสม ดลในห้วงเวลาหนึ่งของการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนั้นไม่ว่าจะเกิดขึ้นใน แบบซ้ำตัวเองหรือไม่ก็ตาม ตัวอย่างเช่น การแกว่งตัวของลูกตุ้ม นาพิกา การโยกตัวของเสาสูง หรือการเคลื่อนที่ของมวลที่ติดอยู่บน สปริง การสั่นสะเทือนทางกล (Mechanical Vibration) ก็เป็นการ สั่นสะเทือนทางวิศวกรรมที่เกิดการสั่นมาจากระบบทางกล โดยเฉพาะ กับเครื่องจักรหรือโครงสร้างต่าง ๆ ซึ่งอาจเป็นการสั่นสะเทือนแบบ อิสระหรือการสั่นสะเทือนแบบบังคับ โดยผลของการสั่นสะเทือนแบบ อิสระนั้นทำให้เกิดการเคลื่อนที่ไป-มา ซึ่งเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ซึ่งอาจเป็นความถี่เดียวหรือหลายความถี่ก็ได้ โดยที่รูปแบบการเคลื่อนที่หรือดำแหน่งการเคลื่อนที่ซึ่งเรียกว่ารูปร่าง โหมด (Mode Shape) ของการสั่นสะเทือน

ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ของการสั่นสะเทือนนั้น สามารถหาได้ด้วยวิธีต่างๆเช่น การคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element), Rayleigh-Ritz method เป็นต้น ในปัจจุบันนี้การ วิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและ รูปร่างโหมด โดยระเบียบวิธีไฟ ในต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่นิยม ซึ่งจะสามารถทำการวิเคราะห์คำนวณหา ค่าความถี่ธรรมชาติลำดับสูงๆและ Mode Shape ซึ่งมีความชับซ้อน ได้ผลคำตอบอย่างรวดเร็วและแม่นยำ ซึ่ง Kobayashi.Y ได้ทำการ วิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยม โดยวิเคราะห์ เป็นแบบโมดอล (modal) แบบไม่เชิงเส้น (Non-linear) โดยใช้ระเบียบ วิธีไฟในต์เอลิเมนต์วิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อมี่การ เปลี่ยนแปลงจำนวนเอลิเมนต์ในแต่ละด้าน [9]

การวิเคราะห์จากทฤษฎี Rayleigh-Ritz method นั้นสามารถ นำไปคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นยื่นที่เกิดการสั่นแบบอิสระ ได้หลากหลายแบบ เช่น การศึกษาถึงผลของการเปลี่ยนแปลง คุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบ Isotropic และ Orthotropic [3], การศึกษา ถึงผลของการเพิ่มขึ้นของค่าอัตราส่วน (ความยาว/ความกว้าง) ของ แผ่นบาง [4], การศึกษาถึงผลการสั่นของรูปทรงที่มีทั้งแบบแผ่นบางยื่น

ME NETT 20<sup>th</sup> หน้าที่ 177 AMM044

และคานยื่นอยู่ในแบบจำลองเดียวกัน [5] สำหรับทฤษฎี Rayleigh-Ritz method ก็ได้ถูกนำไปใช้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติที่ 30 ค่าแรกของแผ่นบางที่ถูกยึดแน่นทั้งสี่ด้านที่เกิดการสั่นแบบอิสระ [6] และยังมีการศึกษาหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางโดยได้สมมติการ วิเคราะห์ของแผ่นบาง เป็นแบบการวิเคราะห์คานในช่วงสถิต [7] นอกจากนี้ยังสามารถนำทฤษฎี Rayleigh-Ritz method มาประยุกต์ใช้ ร่วมพฤติกรรมการสั่นของคานในลักษณะต่าง ๆ คำนวณหาค่าความถี่ ธรรมชาติของคานยื่น (Cantilevered Beam) [2])

ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ของการ สั้นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางยื่นและคานยื่นนั้น โดยทั่วไปการ สั้นสะเทือนแบบคานยื่นและแผ่นบางยื่นนั้น จะสามารถหาค่าความถึ ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ได้จากวิธีการต่างๆที่มีรูปแบบความสัมพันธ์ ของสมการที่ชัดเจน ซึ่งจะสามารถนำสมการมาใช้หาคำตอบได้อย่าง สะดวกและถูกต้อง ซึ่งความความแตกต่างกันของการสั้นสะเทือนทั้ง สองแบบนั้น จะไม่สามารถแบ่งแยกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่เป็น แบบคานยื่นหรือแบบแผ่นบางยื่นได้ ถ้าไม่ทราบรูปร่างโหมดในแต่ละ โหมด เมื่อรูปร่างโหมดที่ได้จากความสัมพันธ์ของสมการนั้นไม่สามารถ แสดงออกมาให้เห็นลักษณะรูปร่างได้อย่างชัดเจน ทำให้ต้องอาศัยการ วิเคราะห์ดำนวณจากระเบียบวิธีไฟในต์เอลิเมนต์เพื่อที่หาค่าความถึ่ ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ซึ่งสามารถแสดงรูปร่างโหมดให้เห็นได้อย่าง ชัดเจน และรูปร่างโหมดนี้เป็นค่าที่จะสามารถแบ่งแยกพฤติกรรมการ สั่นสะเทือนแบบอิสระระหว่างแผ่นบางยื่นกับคานยื่นได้ โดยพฤติกรรม ที่คล้ายแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate – Like) นั้นได้อาศัยทฤษฎี ของการสั้นสะเทือนของแผ่นบางยื่นเป็นสิ่งที่จะบ่งบอกถึงพฤติกรรมการ ้สั่นสะเทือน ซึ่งจะมีความแตกต่างจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่คล้าย ิ คานยื่น (Cantilevered Beam – Like) ที่จะใช้ทฤษฎีการสั่นของคาน เป็นตัวกำหนดพฤติกรรมการสั้นสะเทือน

## 2. ทฤษฎี

# 2.1 การสั่นตามแนวขวางของคาน

ในการศึกษาการสั่นของระบบต่อเนื่องของคานที่มีหน้าตัดคงที่นั้น จะสามารถหาสมการในการหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานได้ [1] คือ

$$\omega_n = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$
(1)

# 2.2 การสั่นของแผ่นบาง

เป็นการพิจารณาการสั่นของระบบที่มีมิติความยาวสองมิติหรือก็ คือ พิจารณาการสั่นของแผ่นบางนั่นเอง แผ่นบางที่จะกล่าวถึงในที่นี้ หมายถึง วัสดุที่มีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับมิติด้านอื่นๆ ทำให้แผ่น บางไม่สามารถที่จะรับภาระโมเมนต์บิดได้ ซึ่งจะคล้ายกับกรณีเส้นเชือก ไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้นั่นเองโดยสมการหาค่าความถี่ธรรมชาติ ของแผ่นบาง [8] คือ

$$\omega = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$
(2)

และ

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \tag{3}$$

#### 3.วิธีการศึกษา

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่าง โหมดในระเบียบวิธีไฟไนด์เอลิเมนต์ จะมีลักษณะเป็นแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate) หรือคานยื่น (Cantilevered Beam) ซึ่งจะถูก ยึดแน่นในปลายด้านใดด้านหนึ่ง โดยมีขนาดความยาว (a) คงที่ 0.5 ม. ความกว้าง (b) และความหนาคงที่ (t) 0.005 ม. โดยที่ความกว้างของ คานจะแปรผันตามอัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric Ratio; r) โดย ที่ r = a/b ซึ่งในขั้นตอนแรกของการทดสอบนั้นได้กำหนดวัสดุให้ทำ จากเหล็กกล้า (Carbon Steel) มีคุณสมบัติทางกลเป็นแบบ Linear Isotropic ที่มีค่าคุณสมบัติดังนี้ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's modulus) E=210 x 10<sup>9</sup> N/m<sup>2</sup> ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (Density) *ρ* =7850 kg/m<sup>3</sup>และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio) *บ*=0.29 ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงรูปร่างแบบจำลอง

ในการวิเคราะห์คำนวณหารูปร่างโหมด (mode shape) และ ค่าความถี่ธรรมชาติ จะใช้โปรแกรม ANSYS (โปรแกรมคำนวณทาง finite element) โดยการวิเคราะห์ในโปรแกรม ANSYS นั้นได้ กำหนด ชนิดของเอลิเมนต์เป็นแบบ shell 93 โดยเรียกว่า 8 node structural shell ซึ่งแต่ละ node มี 6 องศาความเป็นอิสระ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบทับ เอลิเมนต์ที่เป็นแบบ shell 63 โดยมี 4 node structural shell พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติมีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย แต่ค่าความถี่ ธรรมชาติที่ได้จาก shell 63 นั้นมีความแตกต่างของค่าความถี่ธรรมชาติ ในแต่ละจำนวนเอลิเมนต์มีค่ามากกว่า ซึ่งเหตุผลนี้เองทำให้เลือกใช้ ชนิดเอลิเมนต์เป็นแบบ shell 93 ซึ่งมีความเหมาะสมมากกว่า โดยใน การหาค่าจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีค่าเหมาะสม นั้น ได้ทำการแบ่งเอลิเมนต์มีค่าเป็น 40, 50, 60, 80, 100, 120 และ 150 element และให้ด้านของความกว้าง (b) มีจำนวนเอลิเมนต์แปรตาม

ME NETT 20<sup>th</sup> หน้าที่ 178 AMM044

อัตราส่วนทางเรขาคณิต แล้วทำการทดสอบหาค่าความถี่ธรรมชาติและ รูปร่างโหมดเพื่อเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดทุก จำนวนเอลิเมนต์ ซึ่งพบว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมนั้นมีค่าเท่ากับ 100 โดยเหตุผลที่เลือกจำนวนเอลิเมนต์ 100 คือ เป็นจำนวนเอลิเมนต์ ที่ให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่มีค่าใกล้เคียงกับกรณีจำนวนเอลิเมนต์ที่ 120, 150 element และมีรูปร่างโหมดที่มีความละเอียด สามารถดูรูปร่าง โหมดได้ดีทุกโหมด และเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์น้อยกว่ากรณี 120, 150 element ส่วนในกรณี 40, 50, 60, 80 element รูปร่างโหมดที่ได้ นั้นไม่สามารถอ่านค่าได้ในบางโหมดที่สูง ๆ และมีรูปร่างโหมดที่ไม่มี ความละเอียดพอในด้านที่มีจำนวนเอลิเมนต์ด่ำ ๆ ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงรูปร่างโหมดที่มีจำนวนเอลิเมนต์ที่ 50 element ที่ อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 5

ในรูปที่ 2 นั้นแสดงถึงรูปร่างโหมดของการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ที่ 50 element ที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 5 โดยในโหมดนี้อาจจะ อ่านค่าโหมดได้ยากและสังเกตได้ว่าในด้านของความกว้างนั้น (b) ซึ่งมี จำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 10 element จะไม่มีความละเอียดและต่อเนื่อง ของเอลิเมนต์ในด้านนี้ ที่อาจเป็นผลจากโหมดการดัดหรือจากโหมดการ บิดก็ได้ ซึ่งทำให้มีปัญหาในการอ่านค่าโหมด

# 3.1 ขั้นตอนการศึกษา

1. สร้างและวิเคราะห์แบบจำลองจากโปรแกรมทางไฟในต์เอลิ เมนต์เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เพื่อที่จะหาจำนวนเอ ิลิเมนต์ที่เหมาะสมในด้านความยาว (a) และความกว้าง (b) โดย แบบจำลองจะทำการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) ในด้านความยาวให้มี ้จำนวนเอลิเมนต์เป็น (N<sub>a</sub>) 40, 50, 60, 80, 100, 120, 150 element และให้จำนวน element ด้านความกว้างเป็น N<sub>b</sub> โดยที่จะแปรตามค่า อัตราส่วนทางเรขาคณิตของคาน (Geometric Ratio:r) ซึ่ง r=a/b=N<sub>a</sub>/N<sub>b</sub> มีค่าเป็น 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, โดยผลของการวิเคราะห์จาก ้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำให้ทราบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่าง ์ โหมด เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่จำนวนเอลิเมนต์ ้ต่างๆจะสามารถเลือกจำนวน element (N<sub>a</sub>) เท่ากับ 100 element เป็น จำนวนเอลิเมนต์ที่มีค่าเหมาะสมที่สุด ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงการแบ่งจำนวนที่ 100 element ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต เท่ากับ 5

2. ทดสอบแบบจำลองจากโปรแกรมทางไฟในต์เอลิเมนต์ที่มี ้จำนวน element เท่ากับ 100 element โดยทำการทดสอบแบบจำลองที่ มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต (r) 18 ค่าอัตราส่วน เป็น 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15,และ 20 เพื่อหาค่าความถึ ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ที่ 40 ค่าแรก ซึ่งจะทำการเลือกค่าความถึ่ ธรรมชาติที่มีรูปร่างโหมดที่มีจำนวนจุดตัดบนแกนความยาว (x) และ แกนความกว้าง (y) เมื่อเทียบกับสภาวะหยุดนิ่งของแผ่นยื่นและคานยื่น ให้เป็นจุดตัด (x,y) คือ โหมด (0,0) , (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0), (7,0), (8,0), (9,0), (10,0) เป็นต้น ดังรูปที่ 4 และรูปที่ 5 ซึ่งรูป ้ดังกล่าวนั้น คือรูปร่างโหมดที่แสดงลักษณะของแผ่นบางยื่นหรือคานยื่น ที่จะเกิดการสั้นขึ้น-ลงในแนวดิ่งหรือเรียกว่าโหมดดัดตัว (bending mode) โดยจะเกิดการดัดตัวผ่านบนแกนความยาว (x) ศูนย์และหนึ่ง ้ครั้ง ตามลำดับ เมื่อเทียบกับสภาวะหยุดนิ่ง เหตุผลที่ทำการเลือกโหมด เฉพาะโหมดที่มีจุดตัดบนแกนความกว้าง (y) เป็นศูนย์ คือ จะพิจารณา เฉพาะกรณีเกิดการดัดตัว ซึ่งในด้านอิสระของคาน (แนวแกน y) โดยที่ หากด้านดังกล่าวเป็นแนวตรงจะเป็นพถติกรรมการสั่นของคานยื่น (Cantilevered Beam) แต่ถ้าด้านดังกล่าวเกิดการดัดตัว แสดงว่าที่ โหมดนั้นเป็นพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plates)



รูปที่ 4 แสดงรูปร่างโหมด (0,0) ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 1.5



รูปที่ 5 แสดงรูปร่างโหมด (1,0) ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 1.5

 นำค่าความถื่ธรรมชาติในแต่ละโหมด ที่ทุกอัตราส่วนทาง เรขาคณิตมาพล็อตกราฟหาความสัมพันธ์กัน ดังแสดงในรูปที่ 6, 7 และ รูปที่ 8 ซึ่งในแต่ละโหมดจะมีความสัมพันธ์ที่แตกต่างกัน โดยในรูปที่ 6 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (0,0) เห็นว่ารูปดังกล่าวนั้น เมื่อค่าอัตราส่วนเพิ่มขึ้น ค่าความถี่ ธรรมชาติจะลดลงอย่างต่อเนื่อง ซึ่งเมื่อทำการเปรียบเทียบรูปร่างโหมด ทุกอัตราส่วนแล้ว จะเห็นว่าในด้านอิสระของคาน (แนวแกน y) เป็นแนว เส้นตรงทุกอัตราส่วนซึ่งจะเป็นลักษณะการสั่นของคานยื่น (Cantilevered Beam)



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (0,0)



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (1,0)



รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (2,0)

ส่วนในรูปที่ 7 และ 8 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมด (1,0), (2,0) และ (3,0) ตามลำดับ เห็นว่าภาพดังกล่าวนั้น เมื่อค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิต เพิ่มขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติจะไม่ลดลงต่อเนื่องเหมือนกรณีโหมด (0,0) และมีบางอัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้น ซึ่งเมื่อ ทำการเปรียบเทียบรูปร่างโหมดทุกอัตราส่วนแล้ว จะเห็นว่าในด้าน อิสระของคาน (แนวแกน y) นั้นเกิดการดัดตัวเป็นแนวเส้นตรงที่บาง อัตราส่วนทางเรขาคณิตและก็เกิดการดัดตัวไม่เป็นแนวเส้นตรงที่บาง อัตราส่วนทางเรขาคณิตของคานยื่น

 โดยแต่ละโหมดจะพิจารณารูปร่างโหมดของทุกอัตราส่วนจาก ข้อ 3. ซึ่งทำการเลือกรูปร่างโหมด ที่ส่วนของด้านความกว้างที่ปล่อย อิสระของคาน (แนวแกน y) ที่เริ่มดัดดัวไม่เป็นแนวเส้นตรง โดย พิจารณาว่าเป็นอัตราส่วนของคานที่โหมดนั้นที่เริ่มมีพฤติกรรมเป็นการ สั่นแบบแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate) ทำการเปรียบเทียบกับ อัตราส่วนของด้านความกว้างที่ปล่อยอิสระของคาน (แนวแกน y) ที่ เกิดการดัดดัวที่เป็นแนวเส้นตรงซึ่งอัตราส่วนนี้จะเป็นพฤติกรรมการสั่น ของคานยื่น (Cantilevered Beam) โดยจะยกตัวอย่างในกรณีของโหมด (1,0) เป็นกรณีเปรียบเทียบรูปร่างโหมด ซึ่งจะแสดงได้จากรูปที่ 9,10,11 และรูปที่ 12



รูปที่ 9 รูปร่างโหมด (1,0) ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 1.5 รูปที่ 9 แสดงการสั่นของคานที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 1.5 ที่โหมด (1,0) ซึ่งจะพบว่าด้านอิสระในแนวแกน y เมื่อมีการสั่นจะมี ลักษณะเป็นเส้นโค้ง แสดงให้เห็นว่ามีพฤดิกรรมการสั่นของแผ่นบางยื่น

ME NETT 20<sup>th</sup> หน้าที่ 180 AMM044

ส่วนรูปที่ 10 แสดงการสั่นของคานที่อัตราส่วน 2.0 ที่โหมด (1,0) ซึ่ง ด้านอิสระในแนวแกน y เมื่อมีการสั่นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง แสดงให้ เห็นว่ามีพฤติกรรมการสั่นของคานยื่น



รูปที่ 10 รูปร่างโหมด (1,0) ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 2.0 ถ้าพิจารณาในอีกมุมมองจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าในด้านของความ กว้างที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 1.5 ที่รูปร่างโหมด (1,0) นั้นมี บริเวณตรงสันบนสุดของการดัดตัว จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งซึ่งแสดงว่า มีพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบางยื่น ดังแสดงในรูปที่ 11



รูปที่ 11 รูปร่างโหมด (1,0) ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ1.5

ส่วนในรูปที่ 12 จะแสดงรูปร่างโหมด (1,0) ที่อัตราส่วนทาง เรขาคณิตเท่ากับ 2.0 ในอีกมุมมอง จะเห็นได้ว่าบริเวณตรงสันบนสุด ของการดัดตัว จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงซึ่งแสดงว่ามีพฤติกรรมการสั่น ของคานยื่น



รูปที่ 12 รูปร่างโหมด (1,0) ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 2.0

# 3.2 การกำหนดค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุ

ในการศึกษางานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาผลของการแปรผัน ค่า คุณสมบัติทางกลของวัสดุโดยทำการแปรผันเฉพาะค่าความหนาแน่น (Density) ค่าโมดูลัสความยึดหยุ่น (Young's modulus) และค่า อัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio) เพื่อที่จะหาผลต่อสมการ ความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของ คาน โดยทำการเปรียบเทียบกับสมการที่มีค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุ ที่ทำจากเหล็กกล้า (Carbon Steel) ในกรณีเดียว โดยที่ค่าคุณสมบัติ ทางกลของวัสดุที่ใช้ในการทดสอบได้ใช้วัสดุดังแสดงไว้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ใช้ในการทดสอบ

Material	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Young's modulus (x10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Poisson's ratio
Carbon steel	7850	210	0.29
Cast iron steel	7150	179	0.22
Stainless steel	8030	193	0.27
Aluminum Alloy	2700	70	0.33

โดยในการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุจะสามารถแยกได้เป็น 3 กรณี ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ใช้ในการ ทดสอบ

กรณีการ	ค่าคุณสมบัติวัสดุทางกล			
แปรผันค่า คุณสมบัติ ของวัสดุ	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Young's modulus (x 10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Poisson's ratio	
asalaas	7850	210	0.29	
มวรณาาร แปรผันค่า — Density —	8030	8030 210		
	7150 210		0.29	
	2700	210	0.29	
กรณีการ	7850	210	0.29	
แปรผันค่า	7850	193	0.29	
Young's	7850	179	0.29	
modulus	7850	70	0.29	
กรณีการ	7850	210	0.29	
แปรผันค่า	7850	210	0.33	
Poisson's	7850	210	0.27	
ratio	7850	210	0.22	

# 4.ผลการศึกษา

ค่าของความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วนทางเรขาคณิต ที่โหมด ต่างๆที่เริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นแบบแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate) สำหรับกรณีวัสดุเป็นเหล็กกล้า (Carbon Steel) ดังแสดงไว้ใน ตารางที่ 3

ME NETT 20<sup>th</sup> หน้าที่ 181 AMM044

## School of Mechanical Engineering , Suranaree University of Technology

#### 18-20 October 2006, Mandarin Golden Valley Hotel & Resort Khao Yai, Nakhon Ratchasima

# AMM044

ตารางที่ 3ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทาง เรขาคณิด ที่โหมดต่าง ๆที่เริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นแบบแผ่นบางยื่น สำหรับกรณีวัสดุเป็นเหล็กกล้า (Carbon Steel)

Mode	Natural Frequency (Hz)	Geometric Ratio	
(1,0)	106.56	2	
(2,0)	298.14	3	
(3,0)	584.8	3.5	
(4,0)	966.81	4	
(5,0)	1441.9	5	
(6,0)	2010	6	
(7,0)	2670	7	
(8,0)	3421.2	8	
(9,0)	4262	9	
(10,0)	5191.3	10	

จากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้ในตารางที่ 3 ด้วยวิธี Least – Square Method โดยใช้ MATLAB จะสามารถหาความสัมพันธ์ เป็น สมการของความถี่และอัตราส่วนทางเรขาคณิตของคานได้ ดังแสดงใน สมการที่ 4

$$f = 38.01r^2 + 185.54r - 477.67 \tag{4}$$

สมการที่ 4 นี้สามารถหาความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและ อัตราส่วนทางเรขาคณิต เพื่อใช้ในการหาความแตกต่างระหว่าง พฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางยื่นและคานยื่นได้ โดย ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเป็นค่าใดค่า หนึ่ง จะทำให้รู้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการที่ 4 ซึ่งเป็น ค่าความถี่ธรรมชาติที่สามารถจะแบ่งแยกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนทั้ง สองแบบได้

โดยความสัมพันธ์สมการของความถี่และอัตราส่วนทางเรขาคณิต สามารถแสดงได้ในรูปที่ 13



รูปที่ 13 แสดงพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและ อัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นบางยื่นและคานยื่นสำหรับกรณีวัสดุ เป็นเหล็กกล้า (Carbon Steel)

รูปที่ 13 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของคานของจุดที่เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นแบบแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate) และเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรม คล้ายคานยื่น (Cantilevered Beam-like behaviour) เป็นพฤติกรรม คล้ายแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate-like behaviour) ที่หาได้จาก การใช้วิธี Least – Square Method ซึ่งจุดต่างๆเหล่านี้เป็นจุดที่แสดง ตำแหน่งของโหมดการดัด (0,0) ไปจนถึงโหมดการดัด (10,0) ที่มีค่า อัตราส่วนทางเรขาคณิตจาก 0.25 ถึง 10 และมีค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่ม มากขึ้นไปตามในแต่ละโหมด ซึ่งความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วนทางเรขาคณิตของคาน จะเห็นว่ากราฟเป็นเส้นโค้งที่จะ แยกพื้นที่ระหว่างส่วนด้านบนและด้านล่าง โดยส่วนของด้านบนจะเป็น พฤติกรรมการสั้นสะเทือนแบบอิสระคล้ายแผ่นบางยื่น และส่วนของ ้ด้านล่างจะเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น ซึ่งทำให้ทราบได้ว่าที่โหมดของ การดัดตัวใด ๆจะมีอัตราส่วนทางเรขาคณิตค่าหนึ่งเป็นค่าที่จะสามารถ บอกได้ว่า ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตนั้นเป็นจุดที่จะเริ่มมีพฤติกรรมการ สั้นสะเทือนแบบอิสระเป็นแบบแผ่นบางยื่น หรืออาจกล่าวได้ว่าถ้าเกิด การสั้นสะเทือนแบบอิสระของคานยื่นที่โหมดการดัดตัวเดียวกันจะมีค่า อัตราส่วนทางเรขาคณิตหรือค่าความถี่ธรรมชาติ เป็นตัวที่จะบ่งบอกถึง การสั่นสะเทือนนั้นว่าจะมีพฤติกรรมการสั่นเป็นแบบไหน โดยค่าความถึ รรรมชาติที่ได้จากวิธีการต่างๆถ้ามีค่าต่ำกว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้ ้จากสมการที่ 4 นั้นก็จะเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน แต่ถ้า ้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีการทั่วไปมีค่าสูงกว่าความถี่ธรรมชาติ ้จากสมการที่ 4 ก็จะเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง หรือ อาจจะดูจากค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิต ว่าที่อัตราส่วนไหนเป็นค่าที่จะ เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง โหมดการดัดตัวนั้นๆ

4.1 การแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าความ หนาแน่น

การแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าความหนาแน่น จะสามารถหาความสัมพันธ์สมการของความถี่และอัตราส่วนทาง เรขาคณิตของคานได้ ดังแสดงในสมการที่ 5, 6 และ 7 ซึ่งมีความ หนาแน่นเท่ากับ 8030, 7150 และ 2700 kg/m<sup>3</sup> ตามลำดับ

$f = 37.57r^2 + 183.52r - 472.43 \tag{6}$	(5)
---	-----

$$f = 39.83r^2 + 194.38r - 500.51 \tag{6}$$

$$f = 64.81r^2 + 316.35r - 814.43 \tag{7}$$

ในกรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าความ หนาแน่น สามารถเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วนทางเรขาคณิต ที่ค่าความหนาแน่นต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 14



School of Mechanical Engineering , Suranaree University of Technology

#### 18-20 October 2006, Mandarin Golden Valley Hotel & Resort Khao Yai, Nakhon Ratchasima



รูปที่ 14 แสดงการเปรียบเทียบพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ในกรณีการแปรผันเฉพาะค่า

#### ความหนาแน่น

# 4.2 กรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าโมดูลัส ความยืดหยุ่น

การแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าโมดูลัสความ ยึดหยุ่น จะสามารถหาความสัมพันธ์สมการของความถี่และอัตราส่วน ทางเรขาคณิตของคานได้ ดังแสดงในสมการที่ 8, 9 และ 10 ซึ่งมีค่า โมดูลัสความยืดหยุ่นเท่ากับ 193, 179 และ 70 GPa ตามลำดับ

$$f = 36.44r^2 + 177.9r - 458.03 \tag{8}$$

$$f = 35.09r^2 + 171.31r - 441.08\tag{9}$$

$$f = 21.94r^2 + 107.16r - 275.87 \tag{10}$$

ในกรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าโมดูลัส ความยืดหยุ่น สามารถเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างความถึ่ ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ที่ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 15



รูปที่ 15 แสดงการเปรียบเทียบพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ในกรณีการแปรผันเฉพาะค่า โมดูลัสความยืดหยุ่น

AMM044

 4.3 กรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตรา ส่วนพัวชอง

การแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตราส่วนพัว ซอง จะสามารถหาความสัมพันธ์สมการของความถี่และอัตราส่วนทาง เรขาคณิตของคานได้ ดังแสดงในสมการที่ 11, 12 และ 13 ซึ่งมี อัตราส่วนพัวซองเท่ากับ 0.33, 0.27 และ 0.22 ตามลำดับ

$$f = 38.09r^2 + 187.63r - 482.31 \tag{11}$$

$$f = 40.77r^2 + 156.89r - 452.30 \tag{12}$$

$$f = 40.67r^2 + 154.93r - 447.71 \tag{13}$$

ในกรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่า อัตราส่วนพัวซอง สามารถเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างความถึ ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ที่ค่าอัตราส่วนพัวซองต่างๆ ดัง แสดงในรูปที่ 16



รูปที่ 16 แสดงการเปรียบเทียบพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ในกรณีการแปรผันเฉพาะค่า อัตราส่วนพัวชอง

#### 5.สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้สามารถแยกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของ แผ่นบางยื่นและคานยื่นได้ จากการหาความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าความถี่ ธรรมชาติ รูปร่างโหมด และค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิต ซึ่งค่าทั้งสามนี้ จะนำมาวิเคราะห์โดยอาศัยวิธี Least – Square Method ทำให้ได้กราฟ เป็นเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายคานยื่น (Cantilevered Beam-like behaviour) เป็นพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate-like behaviour) ดังแสดงในรูปที่ 13 ที่มีสมการ ความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตดัง สมการที่ 4 ซึ่งมีความสัมพันธ์เป็นสมการโพลิโนเมียลและในงานวิจัยนี้ ได้ทำการศึกษาถึงผลของการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุจาก กรณีวัสดุเป็นเหล็กกล้า โดยจะทำการแปรผันใน 3 กรณี คือ การแปร ผันเฉพาะค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's modulus) ค่าความ หนาแน่น (Density) และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio) โดยจะ ใช้คุณสมบัติทางกลของเหล็กกล้าเป็นค่าคงที่เริ่มด้นที่จะใช้ทำการแปร

ผันในแต่ละกรณี เพื่อที่จะหาสมการที่ค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเข้า มาเกี่ยวข้องต่อความสัมพันธ์ของสมการ ค่าความถี่ธรรมชาติและ อัตราส่วนทางเรขาคณิต ซึ่งอาศัยวิธี Response Surface Method ทำ การวิเคราะห์ โดยสามารถแสดงผลของสมการออกมาในรูปของ ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

กรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าโมดูลัส ความยืดหยุ่น ที่มีการแปรผันค่าค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นจาก 70 - 210 x 10<sup>9</sup> N/m<sup>2</sup> คือ

$$f = 41.519r^{2} - 9.481E^{2} \times 10^{-3} + 1.730rE$$

$$- 233.8r - 0.673E + 290.16$$
(14)

กรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าความ หนาแน่น ที่มีการแปรผันค่าความหนาแน่นจาก 2700 - 8030 kg/m<sup>3</sup> คือ

$$f = 56.906r^{2} + 2.893\rho^{2} \times 10^{-5} - 0.0776r\rho$$
  
+ 565.39r - 0.159\rho - 449.31 (15)

กรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตราส่วน พัวซอง ที่มีการแปรผันค่าอัตราส่วนพัวซองจาก 0.22 - 0.33 คือ

$$f = 47.91r^{2} + 788.28\upsilon^{2} + 63.756r\upsilon + 38.334r - 572.68\upsilon - 18.497$$
 (16)

## สัญลักษณ์

English Letters

4	a.	a	Ŷ	2		. 2.
A =	W1	ามห	นา	ตดา	เองคาน	(m)
						· ·

- *a* = ความยาวของแผ่นบางและคาน (m)
- *b* = ความกว้างของแผ่นบางและคาน (m)
- D = flexural rigidity of the plate
- E = โมดูลัสความยืดหยุ่น (N/m<sup>2</sup>)
- f = ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/sec)
- h = ความหนาของแผ่นบางและคาน (m)
- I = moment of inertia of a plane area (m<sup>4</sup>)
- *t* = ความหนาของแผ่นบางและคาน (m)

Greeks

 $\mathcal{O}_n$  = ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/sec)

$$\beta^2$$
 = ค่าจำเพาะ (rad)

- ho = ความหนาแน่น (kg/m<sup>3</sup>)
- $\alpha$  = a constant depending on the mode

U = ค่าอัตราส่วนพัวซอง

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] กนต์ธร ชำนิประศาสน์, 2545. การสั่นสะเทือนทางกล. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า.
- [2] เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต, 2548 การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของ คานยื่น. วิศวกรรมสาร มข. ปีที่ 32, ฉบับที่ 6, หน้า 755-763.
- [3] Ming-Hung Hsu. 2003. Vibration Analysis of Isotropic and Orthotropic Plates with Mixed Boundary Conditions. Tamkang Journal of Science and Engineering, Vol. 6,No.4, pp.217-226.
- [4] K.Hyde, J.Y.Chang, C.Bacca, J.A.Wickert. 2001. Parameter Studies for Plane Stress in-Plane Vibration of Rectangular Plates. Journal of Sound and Vibration, Vol.247, No.3, pp.471-487.
- [5] M.Chiba, I. Yoshida. 1996. Free Vibration of a Rectangular Plate–Beam Coupled System. Journal of sound and Vibration, Vol.194, No.1, pp 49-65.
- [6] C.Rajalingham, R.B. Bhat, G.D. Xistria. 1996. Vibration of Rectangular Plates using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Rayleigh–Ritz Method. Journal of Sound and Vibration, Vol.193, No.2, pp.497-509.
- [7] Zhou Ding. 1995. Natural Frequencies of Elastically Restrained Rectangular Plates using a set of Static Beam Functions in the Rayleigh - Ritz Method. Elsevier Science, Vol.57, No.4, pp.731-735.
- [8] W.Weaver, JR., S.P.Timoshenko, D.H.Young. 1990 Vibration
   Problems in Engineering. 5<sup>th</sup> ed. John Wiley& Sons Inc.
- [9] Y.Kobayashi. 2002. Reduced Order Nonlinear Modal Equations of Plates Based on the Finite Element Method. http://mech-me.eng.hokudai.ac.jp/~kiriki/Reduce.pdf(accessed on May 2005).

