

การออกแบบและวิเคราะห์ความถี่ของเสียงระนาดเอกด้วยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ Analysis and Design The Sound Frequency of a Treble Gamelan Using FEA

จุมพล บำรุงวงศ์, เสนีย์ ศิริไชย

แคด-ไอที คอนซัลแต้นส์ (เอเชีย) พีทีอี ลิมิเตด 159 ถ. ซินมิง อาคาร เอ็มเทค ซิงคโปร์ 575625

โทร 65-6454-3700 โทรสาร 65-6454-3766 อีเมลล์ support@cadit.com.sg

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

91 ถ.ปราชญ์ศึก แขวงบางมด เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

โทร 66(2)470-9339, 66(2)470-9129 โทรสาร 66(2)470-9111 อีเมลล์ seney.sir@kmutt.ac.th

Joompon Bamrungwong, Seney Sirichai

CAD-IT Consultants (ASIA) PTE LTD 195 Sin Ming Road Amtech Building Singapore 575625

Tel: 65-6454-3700, Fax: 65-6454-3766, E-mail: support@cadit.com.sg

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kingmongkut University of Technology,

91 Prachautid Rd., Bangmod, Tungkrui, Bangkok 10140, Thailand

Tel: 66(2)470-9339, 66(2)470-9129, Fax: 66(2)470-9111, E-mail: seney.sir@kmutt.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ทำขึ้นเพื่อวิเคราะห์ความถี่ของเสียงระนาดเอกเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างผืนระนาดของไทยให้เป็นมาตรฐานโดยมิต้องใช้ตะกั่วปรับเสียงและสามารถหาวัสดุทดแทนระนาดที่ทำจากไม้ได้ งานวิจัยใช้โปรแกรมวิเคราะห์ทางไฟไนท์เอลิเมนต์ (FEA) ในการวิเคราะห์วัดความถี่ของเสียงระนาดที่ได้จากผืนระนาดที่ไม่ติดตะกั่ว เพื่อปรับเสียงและเทียบกับความถี่ของเสียงที่ได้จากโปรแกรม ลูกระนาดที่ถูกจำลองเป็นของแข็งสามมิติ (3D solid models) ผืนของระนาดรวมถึงรูเจาะยึดยังคงรักษาไว้ตามแบบโบราณ เนื่องจากค่าความถี่ของเสียงของลูกระนาดหนึ่งลูกขึ้นอยู่กับตัวแปรที่สำคัญคือ ค่ายังโมดูลัส ความหนาแน่น และที่สำคัญที่สุดคือรูปร่างเรขาคณิตของลูกระนาด ผลวิเคราะห์ยังพบว่าความหนาได้ของลูกระนาดแปรผันตรงกับค่าความถี่ของเสียงของลูกระนาดและตำแหน่งเริ่มต้นที่ตัดของลูกระนาด ส่วนตะกั่วที่ติดอยู่ใต้ลูกระนาดแต่ละลูกจะช่วยให้การปรับความถี่ของเสียงให้ต่ำลงเมื่อความหนาได้ของลูกระนาดมากแต่ความยาวเท่าเดิม ในทำนองเดียวกันการเพิ่มความหนาได้ของลูกระนาดทำให้ความถี่ของเสียงของลูกระนาดสูงขึ้นเมื่อลูกระนาดมีความยาวเท่าเดิม

คำสำคัญ : ระนาด / ไฟไนท์เอลิเมนต์ / ความถี่ของเสียง

Abstract

This research paper aims to study the sound frequency of a treble gamelan which in Thai pronounce the *Ranat Eak*. This finite element method (FEA) is used for a guideline and standardization to make the Ranat with no adjusting the sound by attached mass and replace the wood Ranat by other material. FEA is used to calculate the sound frequency of a piece of Ranat with no attached mass attached and comparing with the actual sound frequency. A piece of Ranat is modeled with 3D solid modeling. The structure of the Ranat will be retained as in the ancient only cutting underside was allowed. Because of a piece of Ranat's sound frequency depended on the material properties and its geometry. The results revealed that the thicknesses under a piece of Ranat vary to the sound frequency and the started cut location. As for the attached mass attached to a piece of Ranat just adjust the sound frequency drop in the range once the long of Ranat not be changed. As the same manners increasing the thickness under a piece of Ranat will increase the sound frequency in the range once the long of Ranat not be changed.

Keywords : Ranat / Xylophone / Finite Element / Sound Frequency

1. บทนำ

ดนตรีไม่ว่าจะเป็นของชนชาติใดภาษาใดจะกำเนิดมาจากจังหวะก่อนสิ่งอื่นเสมอ เครื่องดนตรีกลุ่มแรกที่เกิดขึ้นในโลกสันนิษฐานว่าเป็นเครื่องตีจากนั้นก็เกิดการเป่าอันสืบเนื่องมาจากการหายใจ การผิวปาก เครื่องดนตรีของแต่ละชาติก็มีเสียงหรือสำเนียงเป็นเอกลักษณ์ประจำชาติ สำหรับดนตรีไทยแบ่งออกเป็น 4 ประเภทคือ เครื่องตี เครื่องสี เครื่องเป่า และเครื่องพม่า สำหรับเครื่องกำกับจังหวะก็อยู่ในเครื่องดนตรีประเภทเครื่องตี เครื่องดนตรีประเภทเครื่องตีเป็นเครื่องดนตรีที่เก่าแก่ที่สุด การตีเกราะเคาะไม้เป็นสัญญาณบอกเหตุต่างๆเป็นต้นกำเนิดของเครื่องตีจังหวะในวงดนตรีปัจจุบัน

ดนตรีไทยถือเป็นเอกลักษณ์ประจำชาติที่สืบทอดมาจากบรรพบุรุษนานหลายร้อยปี เป็นดนตรีที่มีความพิเศษ ความโดดเด่นและมีเอกลักษณ์เฉพาะตัว ทั้งลักษณะเครื่องดนตรี การผสมกันของเครื่องดนตรีแต่ละชิ้นเป็นวงแบบต่างๆ และแม้แต่การแบ่งระดับเสียง จึงถือเป็นสิ่งสำคัญที่เราควรรักษาไว้เพื่อสืบทอดวัฒนธรรมนี้เป็นมรดกของชาติสืบไป ซึ่งการจะสืบทอดวัฒนธรรมดนตรีไทยให้ยั่งยืนต่อไปได้นั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการมาตรฐานของระดับความถี่ของเสียงดนตรีไทย เพื่อให้ศิลปินได้ยึดถือเป็นแบบอย่างในการตั้งเสียงเครื่องดนตรีและเพื่อไม่ให้ผิดเพี้ยนไปตามการเปลี่ยนแปลงของสังคมเมื่อเวลาผ่านไป สิ่งสำคัญในการที่จะรักษามาตรฐานของระดับเสียงของเสียงที่เกิดมาจากลูกระนาดไทยต่อไป แต่ทว่ายังไม่ปรากฏการนำความรู้ทางวิศวกรรมศาสตร์มาประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์และออกแบบลูกระนาดของไทย

ระนาด(xylophone)เป็นเครื่องดนตรีไทยชนิดหนึ่งจัดเป็นเครื่องดนตรีประเภทเครื่องตี(percussion instruments) ซึ่งหมายถึงวัตถุที่สามารถเกิดคลื่นเสียงโดยการสั่นหลังจากมันถูกตี สาเหตุที่เรียกเครื่องดนตรีชนิดนี้ว่า "ระนาด" เพราะว่ามีเครื่องดนตรีจำนวนมากที่ถูกตั้งชื่อตามลักษณะเสียงของเครื่องดนตรีนั้นๆ เช่น ฉิ่ง กรับ ข้อง เป็นต้นแต่หน้าแปลกที่ ระนาด ไม่ได้ถูกเรียกชื่อตามลักษณะของเสียงที่ได้ยินเมื่อเคาะลูกระนาด ได้มีการสันนิษฐานตามหลักภาษาศาสตร์เป็น 2 กระแสคือ [11]

1) กระแสแรกมีความเห็นว่า คำว่าระนาดนั้นเป็นคำไทยที่แผลงหรือยืมเสียงมา จากคำว่า "ราด" เช่นคำว่า "เรียด" แผลงเป็น "ระเรียด" "ราบ" แผลงเป็น "ระนาบ" เป็นต้น ทั้งยังมีสำนวนที่ขบขันติดปากกันมาแต่โบราณว่า "ปีพาทย์ ราด ตะโพน" ซึ่งมีคำว่า ราด ปรากฏรวมอยู่ในประโยคดังกล่าวด้วยและอาจจะหมายถึงระนาดเอกก็ได้ คำว่า "ราด" นั้นมีความหมายว่า แผ่ออกไป กระจ่ายออกไป ซึ่งก็ดูจะพ้องกับวิธี การที่นำเอาไม้กรับหรือลูกระนาดมาวางเรียงตามขนาดลดหลั่นกันหรือการนำท่อนไม้มา วางเรียงขวางทางเดินแล้วเรียกท่อนไม้เหล่านั้นว่า "ลูกระนาด" อย่างไรก็ตามเรื่องนี้ยังไม่มี ข้อยุติที่แน่ชัดว่าเป็นการเรียกท่อนไม้ที่วางเรียงขวางทางเดินก่อนแล้วจึงนำมาเรียกเป็นชื่อ เครื่อง

ดนตรีในภายหลังหรือว่าเป็นศัพท์ที่ถูกบัญญัติขึ้นเพื่อใช้เรียกเครื่องดนตรีก่อนแล้ว จึงใช้เรียกการเรียงท่อนไม้ลักษณะนั้นในภายหลัง

2) กระแสที่สอง เห็นว่าคำนี้น่าจะเป็นคำในภาษาเขมรดั้งปรากฏในบทความของ อาจารย์สังัด ภูเขาทอง เรื่อง "โปงลางในทัศนะของคนต่างถิ่น" จากหนังสือ "คำดนตรี" ของคณะศิลปกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่นได้ให้ข้อสันนิษฐานไว้ว่า ระนาดน่าจะไม่ใช่คำไทย ยิ่งไปพบคำเขมรที่เขียนว่า "ราด" คนเขมรออกเสียงว่า "เรียด" แต่ไทยออกเสียงว่า "ราด" เป็นคำกริยาแปลว่า "คราด" เขามีวิธีทำคำกริยาให้เป็นคำนามด้วยการเติมกลางคำ (INFIX) คือแทรกตัว "น" เข้าไปเป็น "รนาส" คนเขมรอ่านว่า "โรเนียดส์" แต่คนไทยอ่านว่า "ระนาด" แปลว่า "ลูกคราด" เวลาเขียนคำเขมรที่สะกดด้วยตัว "ส" เมื่อเป็นภาษาไทยมักจะแปลง ตัว "ส" ให้เป็น "ด" เช่น "โปรส" เป็น "โปรด" เป็นต้น ดังนั้นคำว่า "ระนาส" จึงกลายเป็น "ระนาด" ไป และพลอยให้น่าเชื่อว่า คำว่าระนาดนั้นน่าจะมิต้นกำเนิดมาจากภาษาเขมร

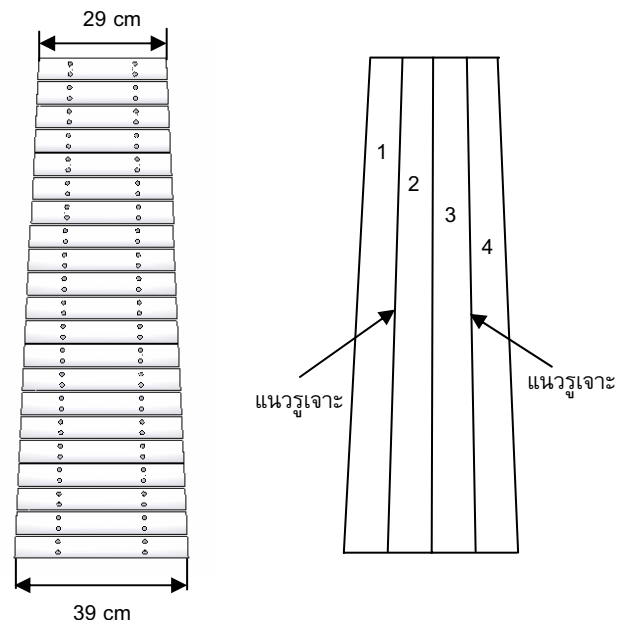
ระนาดแบ่งออกเป็นสองประเภทคือ ระนาดเอก และระนาดทุ้มสำหรับระนาดเอกปรมาจารย์ทางดนตรีไทยได้สันนิษฐานว่าวิวัฒนาการมาจากการซึ่งเกิดความคิดว่าถ้าไม่นำไม้กรับขนาดต่างๆมาวางเรียงกันก็จะเกิดเสียงสูงต่ำได้หลายเสียง[1] ต่อมาก็มีผู้คิดทำรางสำหรับวางลูกระนาดเพื่อให้เสียงมีคุณภาพและดีสะดวก เมื่อใช้เชือกร้อยลูกระนาดให้ติดกันเป็นผืนแขวนหัวท้ายบนรางใช้ไม้ตีก็เกิดเสียงดังกังวานยิ่งขึ้น ระนาดเอกได้ถูกปรับปรุงมาโดยลำดับจนในที่สุดก็มี 21 ลูกอย่างที่เราเห็นในปัจจุบัน ระนาดเอกเป็นเครื่องดนตรีที่มีความสำคัญมากสำหรับวงปี่พาทย์ทำหน้าที่นำวงและแปรเนื้อเพลงให้เป็นทำนองเต็มหรือเป็นทางระนาดเอกโดยเฉพาะ การบรรเลงระนาดเอกในปัจจุบันมีกลเม็ดสลับริบซับซ้อนมากมีทั้งเก็บ ขยี้ สะบัด และลูกพิเศษที่ใช้สำหรับทางเดี่ยวในสมัยรัชกาลที่4 ได้ประดิษฐ์ระนาดเอกเหล็กขึ้นเพื่อใช้ในวงปี่พาทย์เครื่องใหญ่โดยเลียนแบบระนาดไม้และใช้ไม้ตีลักษณะเดียวกันลูกระนาดทำด้วยเหล็กมี 21 ลูกเท่ากับระนาดเอกแต่เนื่องจากลูกระนาดมีน้ำหนักมากจึงใช้วางบนรางแทนการร้อยเชือกผูกแขวนอย่างระนาดไม้ รางระนาดทำเป็นรูปหีบสี่เหลี่ยมมีเท้ารอง 4 เท้า ระนาดทุ้มดัดแปลงมาจากระนาดเอกตั้งแต่สมัยรัชกาลที่ 3 ลูกระนาดมี 17 ลูกขนาดใหญ่กว่าเสียงทุ้มนุ่มนวลกว่า จึงเรียกว่าระนาดทุ้ม ระนาดทุ้มมีหน้าที่แปรเนื้อเพลงให้เป็นทางระนาดทุ้มแบบตลกคะนองและเป็นเครื่องดนตรีที่เล่นลูกล่อลูกขับได้สนุกสนาน ในระยะเวลาที่ใกล้เคียงกับการประดิษฐ์ระนาดเอกเหล็กพระบาทสมเด็จพระปิ่นเกล้าเจ้าอยู่หัว ได้ทรงดำริให้สร้างระนาดทุ้มเหล็กไว้ใช้คู่กับระนาดเอกเหล็ก ลูกระนาดมีขนาดโตกว่าเพราะต้องการให้มีเสียงอย่างระนาดทุ้ม รูปร่างของลูกระนาดมีหน้าตัดที่ไม่สม่ำเสมอ(ทั้งระนาดเหล็กและระนาดไม้)ด้านล่างของลูกระนาดจะถูกตัดให้มีส่วนโค้งโดยส่วนที่บางที่สุดจะอยู่ที่ตรงกลางของลูกระนาด จุดประสงค์การตัดนี้คือเพื่อทำให้เกิดเสียงที่นุ่มนวล ระนาดจะมีไม้สำหรับตีเป็น 2 ชุด คือไม้นวมและไม้แข็ง(soft padded mallets and hard rubber mallets)ไม้นวมทำให้เกิดเสียงทุ้มนุ่มนวลส่วนไม้แข็งทำให้เกิดเสียงแหลม

ระนาดเอกถ้าต้องการเสียงไพเราะนุ่มนวลมักนิยมทำด้วยไม้ไผ่บง ถ้าต้องการให้เสียงเกรียวกราวมักนิยมทำด้วยไม้แก่นเช่น ไม้มะค่า ไม้ชิงชัน ลูกระนาดมีจำนวน 21 ลูก ลูกต้น (อยู่ซ้ายมือของผู้ตี) ขนาดยาวประมาณ 39 ซม. กว้างประมาณ 5 ซม.หนา 1.5 ซม. ลูกต่อมาก็ลดหลั่นกันลงไปจนถึงลูกที่ 21 หรือลูกยอด (ขวามือของผู้ตี) มีขนาดยาว 29 ซม. ลูกระนาดเหล่านี้น้อยเชือกติดกันเป็นผืนแขวนบนรางซึ่งทำด้วยไม้เนื้อแข็งมีรูปร่างคล้ายลำเรือ ด้านหัวและท้ายโค้งขึ้นเพื่อให้อุ้มเสียงมีแผ่นไม้ปิดหัวและท้ายรางระนาดเรียกว่า"โชน" วัดจากโชนหัวรางข้างหนึ่งถึงโชนอีกข้างหนึ่งยาวประมาณ 120 ซม. มีฐานรูปทรงสี่เหลี่ยมรองรับตรงส่วนโค้งตรงกลางเรียกว่า "เท้า" [11]

เป้าหมายของงานวิจัยนี้คือการศึกษารูปแบบและวิเคราะห์เสียงของระนาดเอกที่ทำจากไม้โดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์(finite element method) เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างระนาดของไทยให้เป็นมาตรฐาน และสามารถหาวัสดุที่จะนำมาทดแทนระนาดที่ทำจากไม้ได้ เนื่องจากไม้ที่ใช้ทำระนาดคือไม้ชิงชันในปัจจุบันเป็นไม้ที่หายากและมีราคาสูง ก่อนนำมาใช้งานต้องทำให้ไม้มีความชื้นคงที่ เมื่อต้องการทำการปรับเสียงให้ตรงตามเสียงทางดนตรี ในปัจจุบันการปรับเสียงของลูกระนาดแต่ละลูกจะทำได้โดยการฟังเสียงที่ได้จากการเคาะที่ลูกระนาดแล้วทำการปรับเสียง วิธีการปรับเสียงกระทำโดยเพิ่มหรือลดปริมาณตะกั่วผสมซี่ผิงที่ปลายด้านล่างทั้งสองข้างของลูกระนาดซึ่งการที่จะให้เสียงทางดนตรีที่ถูกต้องนั้นขึ้นอยู่กับความสามารถในการฟังของผู้ปรับเสียง(ทำให้ระนาดในวงดนตรีแต่ละวงมีเสียงแตกต่างกัน) ดังนั้นการปรับเสียงระนาดที่ผ่านมายังมีความคลาดเคลื่อนอยู่และนี่เป็นปัญหาที่จะทำการลดความคลาดเคลื่อนให้หมดไปหรือให้เหลือน้อยมากโดยจะใช้วัสดุแทนไม้ชิงชันและไม่ต้องใช้ตะกั่วในการปรับเสียง ดังนั้นจะเห็นว่าการหาวัสดุทดแทนไม้ชิงชันไม่เพียงแต่ลดต้นทุนในการสร้างระนาดแต่ยังลดเวลาในการสร้างระนาด และยังเป็นเอกลักษณ์และมีมาตรฐานอีกด้วย ในการวิจัยเพื่อหาวัสดุทดแทนไม้จะคำนึงถึงรูปร่างของลูกระนาดและเสียงที่ได้จากการตีระนาด ในส่วนของรูปร่างนั้นลูกระนาดที่ได้จากวัสดุทดแทนจะมีความคล้ายคลึงกับลูกระนาดที่ทำจากไม้เพื่อผู้ใช้จะสามารถตีระนาดได้โดยไม่รู้สึกแตกต่างระหว่างการเล่นระนาด และในส่วนของเสียงที่ได้จากการตีลูกระนาดจะพยายามทำให้ลูกระนาดที่ได้จากวัสดุทดแทนมีเสียงที่เป็นมาตรฐานโดยไม่ต้องใช้ตะกั่วผสมซี่ผิงมาปรับเสียง

การสร้างลูกระนาด(ผืนลูกระนาด)จะขึ้นกับแต่ละสำนักของวงดนตรีไทย แต่ที่คล้ายกันคือจะแบ่งลูกระนาดแต่ละลูกออกเป็น 4 ส่วน ผืนของลูกระนาดทั้งหมดจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู(กระสวย) โดยที่ด้านคู่ขนานด้านบนจะยาว 42 ถึง 39 เซนติเมตรด้านคู่ขนานด้านล่างจะยาว 32 ถึง 29 เซนติเมตรความกว้างของลูกระนาดขึ้นอยู่กับความพอใจของแต่ละสำนัก ก่อนที่จะทำการสร้างผืนของระนาดจะมีการทำกระสวย(กระสวยคือแบบของลูกระนาดที่เขียนลงบนกระดาษซึ่งจะแสดงรูปร่างขนาดของลูกระนาดทุกกรรมทั้งตำแหน่งของรูที่ต้องการจะเจาะอีกประการหนึ่งกระสวยของลูกระนาดจะมีขนาดเท่ากับลูกระนาดจริง) บางสำนักต้องการลูกระนาดที่บางแต่มีความกว้างมาก บางสำนักต้องการลูก

ระนาดที่หนาแต่ความกว้างน้อย ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับเสียงของระนาดแต่ละรางของแต่ละสำนักของวงดนตรีไทย การสร้างผืนระนาดด้วยไม้ไม่สามารถทำได้แต่มีข้อเสียคือขณะที่กำลังตีผืนระนาดลูกระนาดจะขึ้น(เกิดการกระพือทำให้ตีลูกระนาดลำบาก) การยึดผืนของลูกระนาดกับรางของระนาดจะมีตะขอเกี่ยวเรียกกันว่าหู การที่ลูกระนาดแต่ละลูกมีความกว้างมากขึ้นหรือความหนามากขึ้นจะทำให้ลูกระนาดมีน้ำหนักมากทำให้เปลี่ยนหูบางที่เชือกขาดในระยะเวลาอันสั้น กระสวยที่ใช้จะเป็นมาตรฐานของแต่ละสำนักเช่นสำนักบางใหญ่ ผืนของลูกระนาดจะมีด้านคู่ขนานเป็น 41 และ 31 เซนติเมตรความกว้างของลูกระนาดจะเป็น 5.5 เซนติเมตร และความหนาที่สุดของลูกระนาดจะเป็น 2.5 เซนติเมตร สำหรับงานวิจัยนี้ออกแบบผืนระนาดใช้กระสวย 39-29 นั่นคือ ลูกระนาดยาว 39 ซม. กว้าง 5 ซม.หนา 1.5 ซม. ลดหลั่นกันลงไปจนถึงลูกที่ 21 หรือลูกยอด (ขวามือของผู้ตี) มีขนาดยาว 29 ซม.



รูปที่ 1 ตัวอย่างผืนระนาด กระสวย 39-29

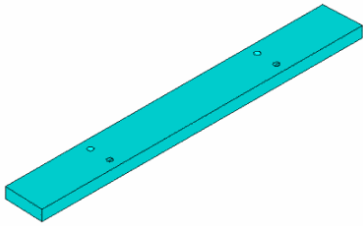
จากรูปที่ 1 งานวิจัยนี้สร้างผืนระนาดจะแบ่งลูกระนาดแต่ละลูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วน คือแบ่งครึ่งของลูกระนาดและแบ่งตำแหน่งรูเจาะ เบื้องต้นจะทราบความยาวของด้านคู่ขนาน ส่วนความกว้างและความหนาของลูกระนาดคือ 5 cm และ 1.5 cm ตามลำดับ

2. ทฤษฎี

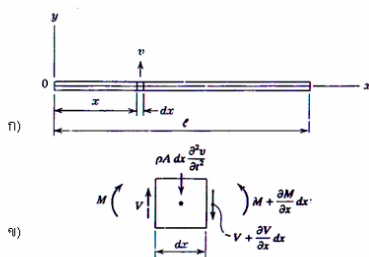
2.1 ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนของระบบ

ก่อนที่จะบรรยายเกี่ยวกับเสียงจำเป็นต้องทราบธรรมชาติของการสั่นสะเทือนของระบบก่อน การเคลื่อนที่ไปมาของระบบจะทำให้เกิดการสั่นสะเทือนโดยทั่วไปการสั่นสะเทือนจะแบ่งออกเป็นสองกรณีคือ การสั่นสะเทือนแบบอิสระและการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (free vibration and forced vibration) การสั่นสะเทือนแบบอิสระเกิดขึ้นเมื่อระบบเคลื่อนที่ไปมาโดยไม่มีการกระทำของแรงภายนอกที่ไปมาหรือการ

สั่นจะเรียกว่าความถี่ธรรมชาติของระบบ(natural frequency) ส่วนการสั่นสะเทือนแบบบังคับจะมีแรงภายนอกกระทำต่อระบบทำให้ระบบเกิดการเคลื่อนที่ ความถี่ธรรมชาติของระบบอาจจะมีค่าเดียวหรือหลายค่าก็ได้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของระบบ รูปร่างของการสั่นสะเทือนของระบบขณะที่ความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติเรียกว่า principal mode ในแต่ละความถี่ก็จะมี mode ของความถี่นั้นๆบางครั้งจะเรียก real mode เสียงดนตรีทั้งหมดที่รับรู้ได้นั้นกำเนิดมาจากระบบที่สั่นสะเทือน (vibrating system) สำหรับระนาดไม้ ใช้การสั่นสะเทือนของแท่งไม้ (vibrating bars) เป็นแหล่งกำเนิดเสียง ความแข็งของไม้เป็นตัวทำให้ลูกระนาดกลับคืนสู่รูปเดิม(restoring force) ขณะที่ลูกระนาดโก่งตัวขึ้นเนื่องมาจากการสั่นและจะสังเกตได้ว่าไม้จะไม่ได้รับการยึดตามแนวแกนเลยซึ่งที่จริงแล้วโหมดตามความยาว(longitudinal modes) โดยปกติจะไม่ใช้ในเครื่องดนตรี[2] ดังนั้นที่ปลายทั้งสองข้างของลูกระนาดจะถูกพิจารณาเป็นปลายอิสระ ถ้าสมมติว่าลูกระนาดเป็นคานที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอแสดงในรูปที่ 2 จากนั้นจะทำการวิเคราะห์หาความถี่ธรรมชาติของคานนี้โดยพิจารณาอีลิเมนต์คานและน้ำหนักของนิวตันมาประยุกต์ใช้เพื่อหาความสัมพันธ์ในขณะที่ยูกระนาดกำลังสั่น(vibrating transversely)



รูปที่ 2 แสดงลูกระนาดที่ถูกพิจารณาเป็นคานที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอ



รูปที่ 3 แสดง free-body diagram ของลูกระนาดที่ถูกจำลองด้วยคานที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอ (ก) แสดงแกน coordinate ของคานทั้งหมด (ข) แสดงอีลิเมนต์ที่ตัดออกมาพิจารณา

เมื่อพิจารณา free-body diagram ของอีลิเมนต์คานที่ตัดออกมาพิจารณาดังแสดงในรูปที่ 3(ข) เมื่อ $M(x)$ คือโมเมนต์ดัด, $V(x)$ คือแรงเฉือน โดยมีแรงเฉื่อยที่กระทำอยู่บนอีลิเมนต์คือ $pA(x)dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$ สมการผลรวมของแรงในทิศทาง y ตามกฎของนิวตันคือ

$$-(V + dV) + V = pA(x)dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นและ $A(x)$ คือพื้นที่หน้าตัดของคาน จากทฤษฎีของคาน คานจะมีแรงเฉือนในทิศทาง y คือ $V = EI(x) \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}$ ดังนั้นสมการที่ (1) สามารถเขียนได้เป็น

$$-EI(x) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = pA(x)dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

หรือเขียนได้เป็น[5]

$$-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{EI(x)}{pA(x)} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} \quad (2)$$

ในการสั่นของลูกระนาดทราบวาระยะทางระหว่าง nodal points มีมากเมื่อเทียบกับมิติด้านข้างของคานดังนั้นจะไม่คิดผลของความเค้นเฉือนภายในตัวคาน(Euler's beam) ดังนั้นสามารถหาผลเฉลยของสมการที่ (2) ได้โดยวิธีการแยกตัวแปร โดยกำหนดให้การแอ่นตัวของคาน $w(x, t)$ เป็นดังนี้

$$w(x, t) = p(t)r(x) \quad (3)$$

แทนค่าสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (2) เราจะได้

$$-r(x) \frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} = \frac{EI(x)}{pA(x)} p(t) \frac{\partial^4 r(x)}{\partial x^4} \quad (4)$$

เป็นที่น่าสังเกตได้ว่าสมการที่ (4) สามารถเขียนโดยให้ด้านซ้ายมือเป็นฟังก์ชันของ t อย่างเดียวและด้านขวามือเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (4) ได้ใหม่เป็น

$$-\frac{1}{p(t)} \frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} = \frac{EI(x)}{pA(x)} \frac{1}{r(x)} \frac{\partial^4 r(x)}{\partial x^4} \quad (5)$$

เพื่อที่จะทำให้สมการทางด้านซ้ายและด้านขวาเท่ากัน ดังนั้นจะให้มันเท่ากับค่าคงที่ตัวหนึ่ง ซึ่งค่าคงที่ที่เกิดขึ้นเป็นค่าบวกโดยระบุให้เป็น ω^2 ดังนั้นจะได้สมการ ordinary homogeneous differential สองสมการคือ

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \omega^2 p(t) = 0 \quad (6)$$

และ

$$\frac{d^4 r(x)}{dx^4} + \beta^4 r(x) = 0 \quad (7)$$

นั่นคือค่าความยืดหยุ่นและค่าความหนาแน่น(degree of elasticity and density)ของลูกกระพอนสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้[2]

โดยที่

$$V_{snd} = \sqrt{\frac{\text{Elasticity}}{\text{Density}}}$$

$$\beta^4 = \frac{\rho A(x) \omega^2}{EI(x)} \quad (8)$$

หรือในกรณีของลูกกระพอนเขียนได้เป็น

ผลเฉลยของสมการ (6) และ (7) อยู่ในรูป

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (16)$$

$$p(t) = \cos(\omega t - \alpha) \quad (9)$$

แต่ทราบว่[6]

และ

$$r(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{I(x)}{A(x)}} = \text{radius of gyration, } k(x) \quad (17)$$

เมื่อ α คือ phase angle ขึ้นอยู่กับสภาวะตอนแรก ถ้าจะเขียนสมการที่ (7) ใหม่ในรูปตัวแปรไร้มิติ(dimensionless) โดยกำหนดให้ $\xi = x/L$ จะได้[5]

$$\frac{1}{L^3} \frac{d^4 r(x/L)}{d(x/L)^4} - \beta^4 L r(x/L) = 0 \quad (11)$$

นำสมการที่ (16) และ (17) แทนลงในสมการที่ (15) ทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติของลูกกระพอนกับรูปร่างเรขาคณิตและคุณสมบัติของวัสดุที่จะนำมาแทนไม้ได้เป็น

$$f = \frac{\beta^2}{2\pi} \frac{k(x)v}{l} \quad (18)$$

หรือ

$$\frac{d^4 r(\xi)}{d\xi^4} - \beta^4 L^4 r(\xi) = 0 \quad (12)$$

เมื่อ β คือ eigen values

$k(x)$ คือ radius of gyration

v คือ ความเร็วของเสียงในวัตถุ

l คือ ความยาวของวัสดุที่สั้น

ซึ่งตอนนี

$$\beta^4 = \frac{\rho A(x) \omega^2 L^4}{EI} \quad (13)$$

สมการที่ (18) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติกับรูปร่างเรขาคณิตและคุณสมบัติของวัตถุที่อยู่ในรูปทั่วไปของลูกกระพอน สำหรับกรณีนี้สมมติว่าลูกกระพอนเป็นคานที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอค่าของ radius

ดังนั้น

of gyration ของลูกกระพอนมีค่าเป็น $\frac{h}{3.4641}$ เมื่อ h คือความหนาของ

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (14)$$

ลูกกระพอน ค่า eigen values, β ของสมการที่ (18) จะขึ้นอยู่กับลักษณะของจุดรองรับว่ามีลักษณะอย่างไร จากความสัมพันธ์ที่ได้ตามสมการที่

หรือสามารถเขียนได้เป็น[5]

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\beta^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI(x)}{\rho A(x)}} \quad (15)$$

(18) พบว่าความยาวของลูกกระพอนเป็นตัวแปรสำคัญในการกำหนดค่าความถี่ของเสียง และจะขยายผลต่อไปเพื่อวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของวัสดุที่มีต่อเสียง การสั่นสะเทือนตามขวาง(transverse vibration)ของวัตถุที่มีลักษณะเป็นคานซึ่งใช้เป็นแหล่งกำเนิดเสียงในเครื่องดนตรีเป็น ที่พบเห็นโดยส่วนใหญ่และเป็นการสั่นของลูกกระพอนด้วย จากที่ได้ทราบแล้วว่าความถี่ธรรมชาติ(fundamental frequency)ซึ่งเกิดจากแท่งไม้ที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอที่กำลังสั่นอยู่จะมีคุณสมบัติต่างๆของคานที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติดังนี้ ความถี่ธรรมชาติของคานเป็นฟังก์ชันของ ค่า Young's modulus, มวลของคาน และรูปร่างเรขาคณิตของคาน ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของวัสดุที่มีผลต่อเสียงหลักๆคือค่า Young's modulus, มวลของคาน และรูปร่างเรขาคณิตของคาน ซึ่งเสียงตอนนี

เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติกับรูปร่างเรขาคณิตและคุณสมบัติของวัตถุที่จะนำมาสร้างระนาบหรือนำมาแทนไม้ ในการทำลูกกระพอนจะกล่าวถึงความเร็วของคลื่นเสียง(velocity of sound waves)ที่ผ่านลูกกระพอนซึ่งมันขึ้นอยู่กับลักษณะคุณสมบัติของตัวกลาง

หมายถึงการที่วัตถุถูกรบกวนแล้วทำให้เกิดความถี่ในช่วงที่หูคนปกติสามารถรับรู้ได้

2.2 วิเคราะห์ความถี่ของเสียงของการกระหนาดด้วยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์

หัวข้อนี้จะใช้หลักการของงานเสมือน(the principal of virtual work) เพื่อสร้างสมการการเคลื่อนที่ของลูกกระหนาด สมการที่ได้ประกอบด้วย energy-equivalent stiffness, masses และโหนดของแรง (nodal loads) สำหรับเอลิเมนต์ เริ่มจากพิจารณาแบบที่ไม่มี ความหน่วง (damping) ซึ่งอยู่ในระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate) x, y และ z กำหนดให้การเคลื่อนที่จุดใด ๆ ภายในเอลิเมนต์ คือ $u(t)$

$$u(t) = \{u, v, w\} \quad (19)$$

เมื่อ u, v และ w เป็นการเคลื่อนที่ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ เมื่อเอลิเมนต์นั้นถูกกระทำด้วย body force แทนด้วย $b(t)$

$$b(t) = \{b_x, b_y, b_z\} \quad (20)$$

b_x, b_y และ b_z แทน องค์ประกอบของแรง (ต่อหน่วยปริมาตร) ซึ่งกำลังกระทำที่จุดที่พิจารณาและสมมติให้องค์ประกอบของ body force นั้น เท่ากันตลอดทั้งเอลิเมนต์ ซึ่งก็คือมีฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับเวลาสำหรับ b_x, b_y และ b_z ส่วนโหนดของการเคลื่อนที่ (nodal displacement) $q(t)$ ที่เปลี่ยนไปเกิดขึ้นและเคลื่อนที่เชิงเส้น(translation)ในทิศทาง x, y และ z คือ

$$q(t) = \{q_i(t)\} \quad (i=1, 2, \dots, n_{en}) \quad (21)$$

n_{en} จำนวนโหนดของเอลิเมนต์ สามารถเขียนได้เป็น

$$q_i(t) = \{q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}\} = \{u_i, v_i, w_i\} \quad (22)$$

สำหรับการวิเคราะห์ลูกกระหนาดเกี่ยวข้องกับ ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับโหนดของการเคลื่อนที่ดังนี้

$$u(t) = f q(t) \quad (23)$$

สัญลักษณ์ f ในที่นี้คือเมตริกซ์(Rectangular matrix) ซึ่งประกอบด้วย ฟังก์ชันความสัมพันธ์ของ $u(t)$ กับ $q(t)$ เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง ความเครียดและการเคลื่อนที่ (Strain-displacement) ของโหนด ทำให้ได้สมการ

$$\epsilon(t) = d u(t) \quad (24)$$

แทนสมการที่ 23 ลงในสมการที่ 24 ทำให้ได้ความสัมพันธ์

$$\epsilon(t) = B q(t) \quad (25)$$

เมื่อ $B = d f$ เมตริกซ์ และ B คือค่าความเครียดที่จุดใด ๆ ภายในเอลิเมนต์ที่เกิดจากโหนดของการเคลื่อนที่หนึ่งหน่วย เมื่อพิจารณา

ความสัมพันธ์ระหว่าง ความเค้นและความเครียด (stress-strain) ตาม กฎของฮุกจะได้ความสัมพันธ์

$$\sigma(t) = E \epsilon(t) \quad (26)$$

เมื่อแทนสมการที่ 25 ลงในสมการที่ 26 จะได้ความสัมพันธ์

$$\sigma(t) = E B q(t) \quad (27)$$

ผลคูณของเมตริกซ์ E และ B คือความเค้นที่จุดใด ๆ ในตัวกลางสามมิติ เนื่องมาจากโหนดของการเคลื่อนที่หนึ่งหน่วย ต่อไปเป็นการประยุกต์หลักการของงานเสมือนซึ่งหลักการของงานเสมือนคือ ในระบบพลศาสตร์ ไตจวลรวมของงานที่เกิดจากการกระจัดเสมือนคูณกับแรงภายนอกและแรงเฉื่อยย่อเท่ากับศูนย์ นั่นคือสามารถเขียนได้เป็น

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (28)$$

ซึ่ง δU_e คือพลังงานความเครียดเสมือนของความเค้นภายใน และ δW_e คืองานเสมือนที่เกิดจากภายนอกที่กระทำกับเอลิเมนต์ เพื่อประยุกต์ใช้ หลักการของงานเสมือน สมมติว่ามีเวกเตอร์ δq เป็นการกระจัดเสมือน มีรูปสมการดังนี้

$$\delta q = \{\delta q_i\} \quad (i=1, 2, \dots, n_{en}) \quad (29)$$

ดังนั้นจากสมการที่ 23 จะได้การกระจัดเสมือนคือ

$$\delta u(t) = f \delta q(t) \quad (30)$$

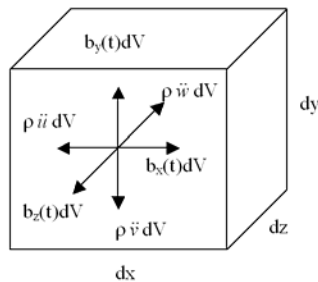
และจากสมการที่ 25 จะได้

$$\delta \epsilon(t) = B \delta q(t) \quad (31)$$

จากสมการที่ 30 และ 31 จะได้พลังงานความเครียดเสมือนทั่วทั้ง ปริมาตรคือ

$$\delta U_e = \int_V \delta \epsilon^T \sigma(t) dV \quad (32)$$

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจพิจารณารูปที่ 4 ซึ่งประกอบด้วย body force $b_x(t)dV, b_y(t)dV$ และ $b_z(t)dV$ กระทำ



รูปที่ 4 แสดง inertial body force

และมี inertial body force $\rho \ddot{u} dV$, $\rho \ddot{v} dV$ และ $\rho \ddot{w} dV$ กระทำเนื่องมาจากความเร่ง \ddot{u} , \ddot{v} และ \ddot{w} และ ρ หมายถึง ความหนาแน่นของมวล (mass density) ของวัสดุ ดังนั้นจะได้งานเสมือนคือ

$$\delta W_e = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p}(t) + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(t) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (33)$$

แทนค่าสมการที่ 32 และ 33 ลงในสมการที่ 28 จะได้

$$\int_V \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p}(t) + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(t) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (34)$$

กำหนดให้ $\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f} \ddot{\mathbf{q}}(t)$ จากนั้นแทนลงในสมการที่ 34 และแทนสมการที่ 27 ลงในสมการที่ 34 จะได้

$$\delta \mathbf{q}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p}(t) + \delta \mathbf{q}^T \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{b}(t) dV - \delta \mathbf{q}^T \int_V \rho \mathbf{f}^T \mathbf{f} dV \ddot{\mathbf{q}} \quad (35)$$

จัดสมการใหม่ได้เป็น

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}_b(t) \quad (36)$$

ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) เมื่อ

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (37)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{f}^T \mathbf{f} dV \quad (38)$$

$$\mathbf{p}_b = \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{b}(t) dV \quad (39)$$

ในที่นี้เมตริกซ์ \mathbf{K} คือเมตริกซ์ความแข็งของเอลิเมนต์ เมตริกซ์ \mathbf{M} คือเมตริกซ์คอนซิสเทนต์ของมวล (consistent-mass matrix) เวกเตอร์ \mathbf{p}_b คือ โหนดของแรงเนื่องจาก body force อยู่ในรูปเวกเตอร์ $\mathbf{b}(t)$

คำตอบของสมการที่ 36 ในกรณีที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำสามารถพิจารณาเป็นการสั่นอย่างอิสระ (free vibration) ซึ่งเป็นปัญหา eigenvalue และ eigenproblem คำตอบของสมการคือ

$$\mathbf{q}_i = \Phi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

n คือจำนวนของดีกรีอิสระ (degree of freedom, DOF) Φ คือ แอมพลิจูดของเวกเตอร์ของโหมด i (mode shape) ω คือ ความถี่ธรรมชาติที่โหมด i α คือ phase angle โดยการหาอนุพันธ์สองครั้งของสมการที่ 40 และแทนลงในสมการที่ 36 จะได้สมการ

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = 0 \quad (41)$$

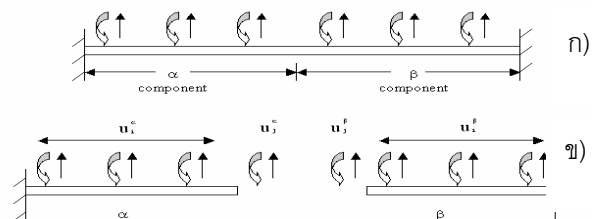
สมการที่ 41 จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ ดีเทอร์มิแนนต์สมการในวงเล็บเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$|\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (42)$$

สมการที่ 42 เรียกว่าสมการ characteristic ผลคำตอบของสมการคือ characteristic value ω_i^2 หรือ eigenvalues เมื่อแทนค่าคำตอบที่ได้ลงในสมการที่ 41 จะได้ characteristic vectors หรือ eigenvector Φ_i ซึ่งเป็นค่าคงที่ใดๆ อย่างไรก็ตามถ้าโครงสร้างมีจำนวน DOF มาก มักถูกคำนวณด้วยเครื่องคำนวณ

2.3 Modal Synthesis

วิธีการ Substructure เป็นการแบ่งโครงสร้างรวมออกเป็นโครงสร้างย่อย ในปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้องกับเวลาเรียกว่า substructure สามารถเทียบได้กับปัญหาพลศาสตร์ซึ่งถูกเรียกว่า Component Mode Synthesis โครงสร้างขนาดใหญ่ที่มีความซับซ้อนมากเมื่อวิเคราะห์แล้วพบว่า มีจำนวน DOF มากทำให้ไม่สามารถคำนวณได้ง่ายจึงมักใช้วิธีการ Component Mode Synthesis มาคำนวณโดยแบ่งแต่ละองค์ประกอบเป็นส่วนๆ แล้วจึงคำนวณแต่ละส่วนดังกล่าวเพื่อให้ได้การตอบสนองรวมของระบบ พิจารณารูปที่ 5



รูปที่ 5 แสดงส่วนประกอบของโครงสร้าง n) Coupled structure
 ข) ส่วนประกอบกับโคออดิเนตของปัญหา

รูปที่ 5 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของข้อต่อและถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วน α และ ส่วน β กำหนดให้ P เป็นโคออดิเนตของปัญหา (physical coordinates) ของส่วนประกอบทั้งสองนั้นคือส่วน J คือ โคออดิเนตที่จุดต่อ (juncture coordinate) ที่มีส่วนประกอบคือ u_j และส่วน I คือ โคออดิเนตภายใน (interior coordinate) ที่มีส่วนประกอบคือ u_i เมื่อพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของส่วนประกอบมีสมการคือ

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (43)$$

ส่วนประกอบของโคออดิเนตของปัญหา (physical coordinates) u สามารถเขียนได้อยู่ในรูปของโคออดิเนตใดๆ (generalized coordinates) p ที่ถูกปรับระบบโคออดิเนต (transform coordinate) คือ

$$u = \Psi p \quad (44)$$

เมื่อ Ψ คือเมตริกซ์องค์ประกอบของโหมดการเคลื่อนที่ (component mode) นั่นคือ rigid body mode, normal mode ในการเคลื่อนที่อิสระ, constraint mode หรือ attachment mode ดังได้กล่าวไปแล้วว่าลักษณะรูปร่างของการเคลื่อนที่ (normal modes) ของการเคลื่อนที่อิสระสามารถหาได้โดยวิธีการแก้ปัญหาแบบ eigenvalue และ eigenproblem ซึ่งมีรูปดังสมการที่ 41 เมื่อพิจารณาปัญหานี้พบว่าแบ่งออกเป็นหรือเรียกว่า fixed-interface, free-interface หรือ hybrid-interface ของลักษณะรูปร่างของการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนที่อิสระ ซึ่งขึ้นอยู่กับ interface coordinate ทั้งหมด, ไม่มี interface coordinate หรือ มี interface coordinate บางส่วนที่ถูกสมมติว่าถูกจำกัดในระบบ (space) เรียกว่า Component normal modes เมื่อทำการ normalize eigenvectors เหล่านี้โดยเทียบกับเมตริกซ์ของมวล (mass matrix) จะได้สมการ

$$\Psi^T M \Psi = I \quad (45)$$

$$\Psi^T K \Psi = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (46)$$

Ψ เป็นเมตริกซ์ซึ่งหลักของเมตริกซ์ประกอบด้วยลักษณะรูปร่างของการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนที่อิสระ ถ้าส่วนประกอบของโคออดิเนตของปัญหา (physical coordinates) u ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนดังรูปที่ 4 (ข) ส่วนแรกกำหนดเป็น โคออดิเนตของ C ที่ไหนสามารถเคลื่อนที่ได้ (constraint set) และอีกโคออดิเนตเป็นโคออดิเนตของ R ซึ่งไหนไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ (remaining set) constraint mode ถูกนิยามเมื่อมีการเคลื่อนที่หนึ่งหน่วยในโคออดิเนตของปัญหาในโคออดิเนตของ C (statically imposing a unit displacement) ในขณะที่โคออดิเนตของ R ซึ่งไหนไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ที่อยู่ใน C ไม่สามารถเคลื่อนที่ได้สามารถเขียนสมการได้คือ

$$\begin{bmatrix} k_{RR} & k_{RC} \\ k_{CR} & k_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_R \\ f_C \end{Bmatrix} \quad (47)$$

เมื่อ f_C คือส่วนของแรงปฏิกิริยาที่โคออดิเนตของ C เมื่อพิจารณาในส่วนของแถบนั้นจะได้สมการ

$$U_R = -k_{RR}^{-1} k_{RC} \quad (48)$$

ดังนั้นเมตริกซ์ Constraint mode คือ

$$\Psi_C = \begin{bmatrix} u_R \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{RR}^{-1} k_{RC} \\ I_{CC} \end{bmatrix} \quad (49)$$

ในส่วนของ Attachment mode เพื่อความเข้าใจให้ A เป็นข้อต่อของ P ดังนั้น Attachment mode ได้ถูกนิยามว่าขณะที่การเสียรูปของวัตถุเนื่องจากแรงหนึ่งหน่วยที่กระทำบนโคออดิเนตหนึ่งของเซต A ในขณะที่โคออดิเนตซึ่งไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ (remaining set) ไม่มีแรงมากระทำ ถ้า S คือเซตของโคออดิเนตที่ไม่อยู่ใน A เมื่อไม่พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแกนโคออดิเนต (rigid-body mode) ดังนั้นเซตของ Attachment mode คือ

$$\begin{bmatrix} k_{SS} & k_{SA} \\ k_{AS} & k_{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_S \\ u_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_S \\ I_{AA} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

ถ้าให้เมตริกซ์ในส่วนที่เคลื่อนที่ได้ (flexibility matrix) คือ $g \equiv k^{-1}$ ดังนั้นเมตริกซ์ Attachment mode ของชุดที่อยู่กับที่คือ (restrained component) คือ

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} u_S \\ u_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{SA} \\ g_{AA} \end{bmatrix} \quad (51)$$

ในการพิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน โคออดิเนตจะถูกแบ่งออกเป็นสามส่วน คือ R , A และ S เมื่อ R คือ statically determinate constraint set ซึ่งควบคุมการเคลื่อนที่ตามแนวแกน A เป็นเซตของโคออดิเนตซึ่งมีแรงหนึ่งหน่วยกระทำเพื่อให้ได้รับ attachment mode และ S คือเซตของโคออดิเนตที่ไม่อยู่ใน A หรือ R ดังนั้น Attachment mode ถูกนิยามคือ

$$\begin{bmatrix} k_{SS} & k_{SA} & k_{SR} \\ k_{AS} & k_{AA} & k_{AR} \\ k_{RS} & k_{RA} & k_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{SA} \\ \Psi_{AA} \\ O_{RA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O_{SA} \\ I_{AA} \\ f_{RA} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

attachement mode ที่สัมพันธ์กับเซตที่ถูกบังคับ R คือ

$$\Psi_A = \bar{\Psi}_A + \Psi_R C_R \quad (60)$$

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} \Psi_{SA} \\ \Psi_{AA} \\ \Psi_{RA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{SA} \\ g_{AA} \\ g_{RA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{SS}^{-1} k_{SA} (k_{AA} - k_{AS} k_{SS}^{-1} k_{SA})^{-1} \\ (k_{AA} - k_{AS} k_{SS}^{-1} k_{SA})^{-1} \\ O_{RA} \end{bmatrix} \quad (53)$$

ยังมีเซตของ attachment mode อีกหนึ่งเซตใช้กับการวิเคราะห์คอมโพเนนต์แบบ rigid-body freedom ซึ่งสามารถหาได้โดยการใส่ภาระ f' ให้กับคอมโพเนนต์ซึ่ง f' คือ

$$f' = f - M\ddot{u}_R \quad (54)$$

f คือแรงภายนอกที่กระทำและ u_r คือเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ของ rigid-body เนื่องจากแรง f ดังนั้น u_R สามารถเขียนเป็น linear combination ของโหมดของ rigid-body ได้คือ

$$u_R = \Psi_R q \quad (55)$$

สามารถเขียนสมการอนุพันธ์ของ rigid-body เนื่องจากแรง f คือ

$$\Psi_R^T M \Psi_R \ddot{q} = \Psi_R^T f \quad (56)$$

ถ้า rigid-body mode ถูก normalized จะได้

$$\Psi_R^T M \Psi_R = I \quad (57)$$

ดังนั้น

$$f' = f - M \Psi_R \Psi_R^T f = P f \quad (58)$$

สมการ attachment mode สามารถหาได้โดยนำ f' แทนลงใน สมการที่ 52 จะได้

$$\begin{bmatrix} k_{SS} & k_{SA} & k_{SR} \\ k_{AS} & k_{AA} & k_{AR} \\ k_{RS} & k_{RA} & k_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{SA} \\ \bar{\Psi}_{AA} \\ O_{RA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{SS} & P_{SA} & P_{SR} \\ P_{AS} & P_{AA} & P_{AR} \\ P_{RS} & P_{RA} & P_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{SA} \\ I_{AA} \\ O_{RA} \end{bmatrix} \quad (59)$$

attachment mode $\bar{\Psi}_A$ ต่างจาก attachment mode Ψ_A เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบ rigid-body ไปด้วย ดังนั้น สามารถเขียนได้เป็น

Ψ_A สามารถหาค่าได้ดังต่อไปนี้ Ψ_A ต้องตั้งฉากกับ (Orthogonal) rigid-body mode นั่นคือ

$$\Psi_R^T M (\bar{\Psi}_A + \Psi_R C_R) = 0 \quad (61)$$

แก้สมการที่ 61 หา C_R แล้วนำมาแทนลงในสมการที่ 60 จะได้

$$\Psi_A = (I - \Psi_R \Psi_R^T M) \bar{\Psi}_A \quad (62)$$

เนื่องจากเมตริกซ์ในวงเล็บคือ P^T ดังนั้นเขียนได้เป็น

$$\Psi_A = P^T \bar{\Psi}_A \quad (63)$$

ถ้ากำหนดเมตริกซ์ flexibility คือ G_C จะได้สมการ

$$\bar{\Psi}_A = G_C P F_A \quad (64)$$

เมื่อเมตริกซ์ F_A คือเมตริกซ์ด้านขวามือของสมการที่ 59 ดังนั้นสมการที่ 63 สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Psi_A = P^T G_C P F_A \quad (65)$$

attachment mode ตามสมการที่ 65 เรียกว่า inertia-relief attachment modes ในโปรแกรม ANSYS เทคนิคนี้ถูกใช้เพื่อทำให้แรงและแรงบิดสมดุลเนื่องจากความเฉื่อยที่เกิดจากสนามความเร่ง

2.4 ANSYS โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์

สมการที่ (36) เป็นสมการอธิบายการเคลื่อนที่ (general equation of motion) สามารถลดรูปซึ่งขึ้นอยู่กับกรณีการวิเคราะห์ปัญหา การหาคำตอบของสมการที่ (36) ถ้าความถี่ของอินพุตน้อยกว่า 1/3 ของความถี่ธรรมชาติต่ำสุดของโครงสร้างปัญหาสามารถพิจารณาเป็น quasistatic โดยไม่คิดผลของความเฉื่อย สามารถลดรูปของสมการเป็นเพียง $[K]\{x\} = \{F\}$ [3] แต่เมื่อความถี่ของอินพุตมากและพิจารณาความเฉื่อยของปัญหาจึงสามารถถูกแบ่งออกเป็น wave propagation problem และปัญหาพลศาสตร์โครงสร้าง (structural dynamic problem) สำหรับ wave propagation problem ภาระส่วนมากจะเป็นการปะทะหรือการระเบิด (impact และ explosive blast) ใช้เวลาเพียงช่วงสั้นๆ อีกปัญหาหนึ่งคือไม่ใช่ wave propagation problem แต่ความเฉื่อยมีผลต่อโครงสร้างจึงเรียกว่า ปัญหาพลศาสตร์โครงสร้างซึ่งแบ่งออกเป็น ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือน ณ รูปร่างโหมด (mode shape) นั้นๆ และอีกปัญหาคือสนใจการเคลื่อนที่ของโครงสร้างสัมพันธ์กับเวลา มักเรียกว่าปัญหา time-history

ซึ่งวิธีที่นิยมหาคำตอบของสมการที่ (36) ที่เป็นปัญหา time-history คือ Modal methods (บางครั้งเรียก Mode Superposition) และ Direct Integration methods

วิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปซอฟต์แวร์จำลองเหตุการณ์ (Software Simulation) คือวิธีการที่ช่วยจำลองเหตุการณ์ภายใต้สภาวะสิ่งแวดล้อมที่เกิดขึ้นกับระบบเพื่อการออกแบบ และ/หรือ ตรวจสอบเพื่อหาการตอบสนองของระบบ ณ. สิ่งแวดล้อมนั้น โดยทั่วไปวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์มีขั้นตอนพื้นฐานที่เกี่ยวข้องคือ Preprocessing, Solution และ Postprocessing

Preprocessing เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบจำลองและกำหนดคุณสมบัติทางกลของวัสดุ จากนั้นสร้างแบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite element model, FE model) กำหนดเงื่อนไขบังคับให้กับแบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์

Solution เป็นการแก้ปัญหาตามพื้นฐานของขบวนการทางวิศวกรรมซึ่งขึ้นอยู่กับธรรมชาติทางฟิสิกส์ของปัญหา

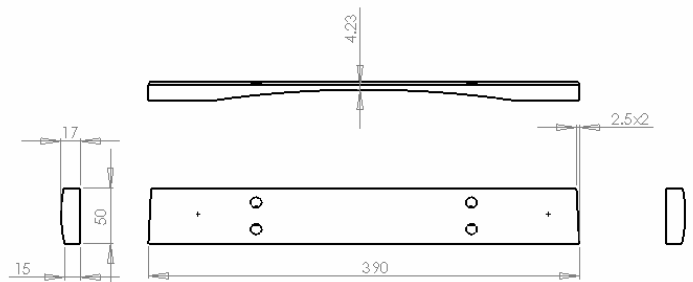
Postprocessing คือการนำผลที่ได้ออกมาเพื่อการวิเคราะห์ และ/หรือ ตรวจสอบ

โดยทั่วไปเมื่อวิเคราะห์ด้วยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยซอฟต์แวร์จำลองเหตุการณ์ (Software Simulation, ANSYS/Structure) ผู้ใช้ต้องเลือกชนิดของเอลิเมนต์ให้เหมาะกับงานในกรณีนี้ใช้เอลิเมนต์สามมิติ (3D element) นั่นคือ เอลิเมนต์ Solid45 การเลือกชนิดของเอลิเมนต์เป็นการเลือกสมการของรูปร่าง (Shape function) โดยปริยายคุณสมบัติของวัสดุผู้ใช้ควรเตรียมให้พร้อมการเลือกคุณสมบัติของวัสดุที่จำเป็นต้องใช้งานก็เพียงพอสำหรับโปรแกรมที่จะคำนวณหาคำตอบ ความถูกต้องของการนำวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์มาหาผลเฉลยของปัญหานั้นขึ้นอยู่กับรูปร่างที่ถูกต้อง, การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์และจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ ผู้เขียนจึงตั้งสมมติฐานที่ใช้ในการนำวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์มาใช้คือ

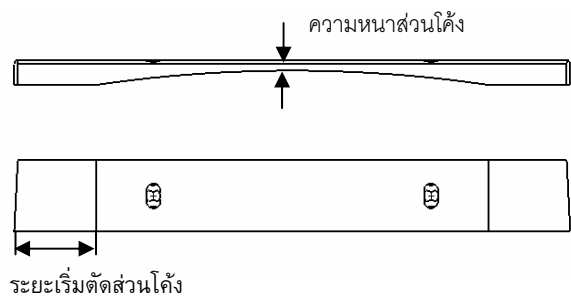
1. ลูกกระพรวนเกิดการสั่นอย่างอิสระ (perfectly free)
2. ผลของการสั่นของลูกกระพรวนข้างเคียงไม่ส่งผลต่อลูกกระพรวนที่กำลังพิจารณา
3. วัสดุที่นำมาทำเป็นลูกกระพรวนมีคุณสมบัติเป็น Orthotropic materials

3. แบบจำลองและแบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ของลูกกระพรวน

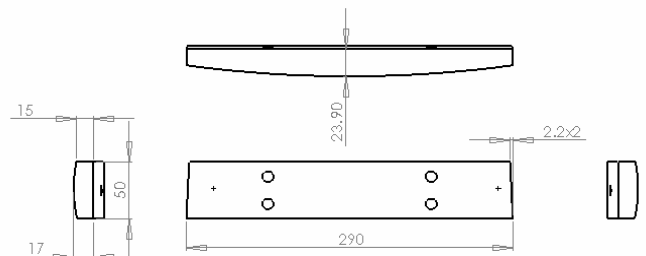
เนื่องจากลูกกระพรวนมีลักษณะคล้ายๆ กัน ดังนั้น เพื่อให้เข้าใจลักษณะโครงสร้างของลูกกระพรวนจึงได้กำหนดตัวแปรดังแสดงในรูปที่ 6 ถึงรูปที่ 9 ในขณะเดียวกันแบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์จะแสดงเพียงขนาดลูกที่ 1 และขนาดลูกที่ 21 ดังแสดงในรูปที่ 10 และ 11 ซึ่งลูกกระพรวนทุกลูกจะถูกจำลองด้วยขนาดเหมือนจริงทุกลูก



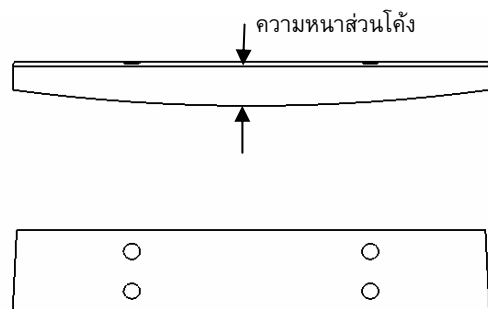
รูปที่ 6 แสดงโครงสร้างของลูกกระพรวนขนาดลูกที่ 1 (หน่วยเป็นมิลลิเมตร)



รูปที่ 7 แสดงตัวแปรที่ศึกษาโดยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ของขนาดลูก ที่ 1-14

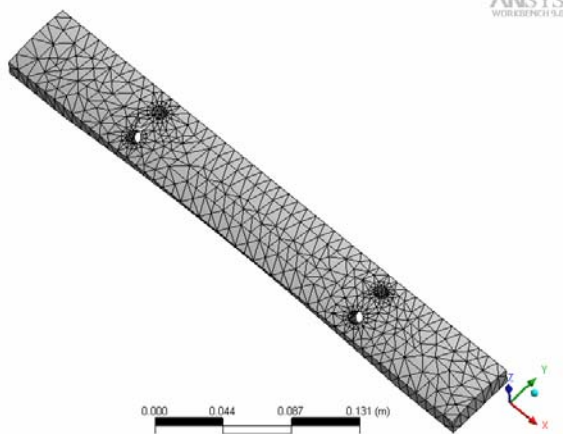


รูปที่ 8 แสดงโครงสร้างของลูกกระพรวนขนาดลูกที่ 21 (หน่วยเป็นมิลลิเมตร)

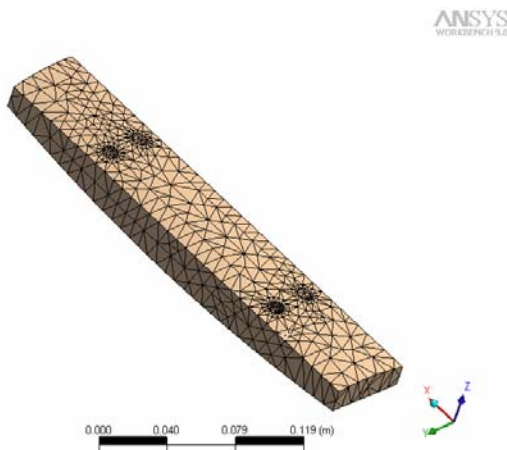


รูปที่ 9 แสดงตัวแปรที่ศึกษาโดยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ของขนาดที่ 15-21

แบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ถูกแสดงดังรูปที่ 10 และ 11



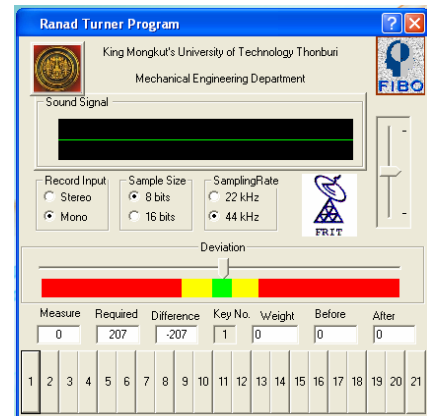
รูปที่ 10 แบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ของลูกกระดานลูกที่ 1



รูปที่ 11 แบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ของลูกกระดานลูกที่ 21

4. โปรแกรมวัดเสียงของลูกกระดาน

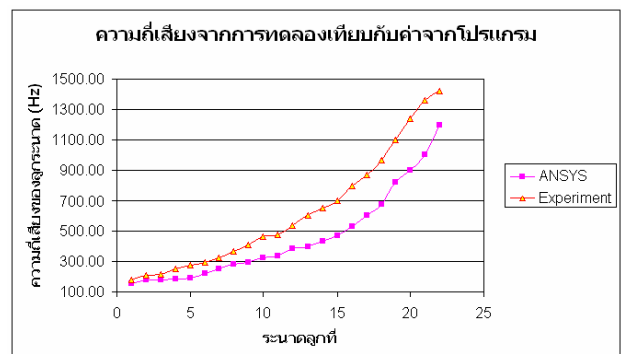
โปรแกรมวัดเสียงของลูกกระดานมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 12 ซึ่งถูกนำเสนอจาก มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี โดยสถาบันหุ่นยนต์ภาคสนาม โดยผู้ควบคุมคือ ผศ.ดร. พิเชฐ ฤกษ์นันท์ โปรแกรมวัดเสียงของระนาด สามารถตั้งค่าเสียงของระนาดแต่ละลูกที่สนใจและสามารถแสดงความคลาดเคลื่อนของเสียงที่เบี่ยงเบนไปของค่าเสียงที่กำหนด การวิเคราะห์จะเริ่มจากนำผิวนระนาดจริงมาวัดเสียง โดยลูกกระดานแต่ละลูกจะถูกวัดเสียงด้วยโปรแกรมวัดเสียงนี้ จากนั้นจึงใช้วิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์วิเคราะห์เสียงของลูกกระดานแต่ละลูกเทียบเคียงกัน หลังจากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ห่ออกแบบลูกกระดานแต่ละลูก



รูปที่ 12 โปรแกรมวัดเสียงของลูกกระนาด

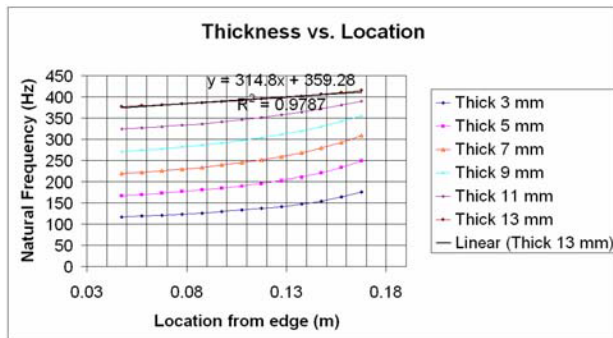
5. ผลการทดลองและวิเคราะห์

ผลการวัดเสียงจริงของลูกกระนาดแต่ละลูกเทียบกับผลที่ได้จากวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ถูกแสดงดังในรูปที่ 13



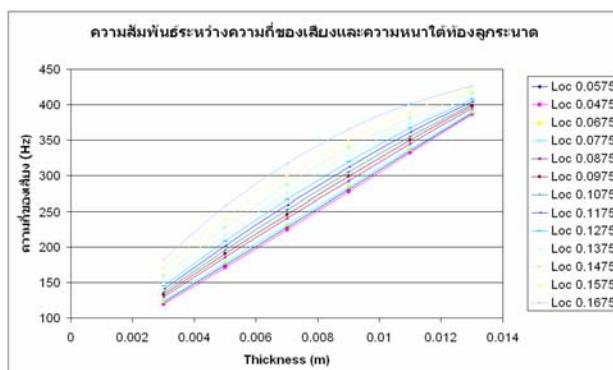
รูปที่ 13 เปรียบเทียบผลระหว่างการทดลองและผลจากโปรแกรม

ผลที่ได้จากการวิเคราะห์เสียงของลูกกระนาดด้วยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์เทียบกับเสียงที่ได้จากการทดลองจริงมีแนวโน้มเป็นไปตามกัน โดยพบว่าค่าความถี่ของเสียงมีความสัมพันธ์กันดีในลูกแรกๆและเบี่ยงเบนออกมาจนถึงลูกกระดานลูกที่ 11 เป็นต้นไปความเบี่ยงเบนก็จะค่อนข้างคงที่ ซึ่งผลที่ได้แสดงผลที่ทำให้มีความมั่นใจว่าผลการเปรียบเทียบที่ได้มีความสอดคล้องกัน เมื่อวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาได้ของลูกกระดานกับระยะที่เริ่มตัดส่วนโค้งได้ของลูกกระดานพบว่ามีความสัมพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 14 จากรูปพบว่าเมื่อลูกกระดานมีความหนาเพิ่มขึ้นความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ของเสียงและระยะเริ่มตัดได้ของลูกกระดานมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง ดังนั้นถ้าต้องการออกแบบลูกกระดานให้ได้เสียงตามต้องการระยะเริ่มตัดได้ของลูกกระดานควรอยู่ใกล้ขอบหน้าตัดของลูกกระดานเพื่อให้ง่ายต่อการออกแบบเนื่องจากกราฟมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง



รูปที่ 14 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เสียงของลูกกระนากับระยะเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาด

จากรูปที่ 14 เป็นผลจากการวิเคราะห์เสียงของลูกกระนาดลูกที่ 1 ซึ่งมีความถี่เสียง 170 Hz เมื่อพิจารณาในตารางพบว่าต้องใช้ความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดที่มีความหนา 5 มิลลิเมตรโดยกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดที่ 0.1075 เมตร เพื่อศึกษาผลของตำแหน่งเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดที่มีผลต่อเสียงพบความสัมพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 15



รูปที่ 15 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดกับระยะเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาด

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดกับความถี่ของเสียงที่ได้รับพบว่ายี่ตำแหน่งเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดใกล้กับขอบหน้าตัดมากเท่าใดความสัมพันธ์ระหว่างความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดกับเสียงที่ได้มีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงมากกว่าตำแหน่งเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดไกลกับขอบหน้าตัดนั่นคือความกว้างของใต้ท้องลูกกระนาดมีความแคบมากยิ่งขึ้นความสัมพันธ์ไม่เป็นเส้นตรง ผลดังแสดงในตารางที่ 1 เป็นการวิเคราะห์ออกแบบลูกกระนาดซึ่งความสัมพันธ์ต่างๆจะเป็นเส้นตรงเพื่อให้ง่ายต่อการออกแบบ โดยแสดงผิวนวดกระสวย 23-29 มีความสัมพันธ์ความยาวของลูกกระนาดกับระยะเริ่มต้นตัดใต้ท้อง ตารางที่ 2 แสดงความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดสัมพันธ์กับความถี่ของเสียง โดยระยะแต่ละลูกมีขนาดหน้าตัดเหมือนกันทุกกระสวยเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดเท่ากันทุกลูกมีเพียงความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดเท่านั้นที่เปลี่ยนแปลงเพื่อให้ได้ความถี่เสียงตรงตามมาตรฐาน

ตารางที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของลูกกระนาดกับระยะเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดของผิวนวดกระสวย 39-29

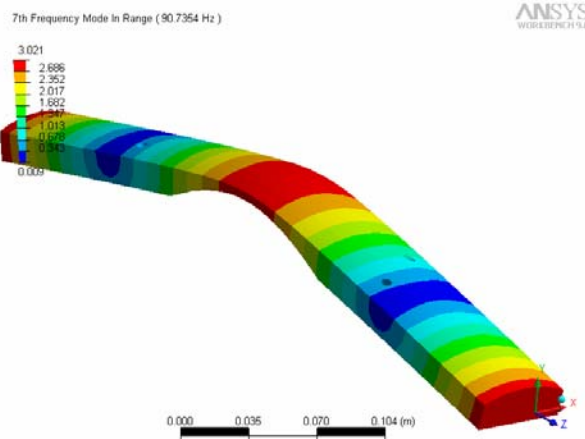
| ขนาดลูกที่ | ความยาวลูกกระนาด (mm) | ตำแหน่งขบ (วัดจากขอบ (mm)) | ตำแหน่งขบ (วัดจากขอบ (m)) |
|------------|-----------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1 | 390.000 | 97.500 | 0.09750 |
| 2 | 385.000 | 96.250 | 0.09625 |
| 3 | 380.000 | 95.000 | 0.09500 |
| 4 | 375.000 | 93.750 | 0.09375 |
| 5 | 370.000 | 92.500 | 0.09250 |
| 6 | 365.000 | 91.250 | 0.09125 |
| 7 | 360.000 | 90.000 | 0.09000 |
| 8 | 355.000 | 88.750 | 0.08875 |
| 9 | 350.000 | 87.500 | 0.08750 |
| 10 | 345.000 | 86.250 | 0.08625 |
| 11 | 340.000 | 85.000 | 0.08500 |
| 12 | 335.000 | 83.750 | 0.08375 |
| 13 | 330.000 | 82.500 | 0.08250 |
| 14 | 325.000 | 81.250 | 0.08125 |
| 15 | 320.000 | 80.000 | 0.08000 |
| 16 | 315.000 | 78.750 | 0.07875 |
| 17 | 310.000 | 77.500 | 0.07750 |
| 18 | 305.000 | 76.250 | 0.07625 |
| 19 | 300.000 | 75.000 | 0.07500 |
| 20 | 295.000 | 73.750 | 0.07375 |
| 21 | 290.000 | 72.500 | 0.07250 |

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เสียงของลูกกระนาดกับความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดของผิวนวดกระสวย 39-29

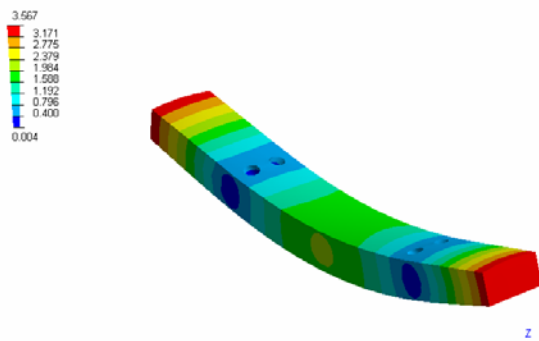
| ขนาดลูกที่ | ความถี่เสียง (Hz) | ความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาด (mm) |
|------------|-------------------|---------------------------------|
| 1 | 170 | 5 |
| 2 | 187 | 5.5 |
| 3 | 207 | 6 |
| 4 | 229 | 6.6 |
| 5 | 252 | 7.2 |
| 6 | 279 | 7.8 |
| 7 | 308 | 8.5 |
| 8 | 340 | 9.3 |
| 9 | 375 | 10.1 |
| 10 | 414 | 11 |
| 11 | 457 | 11.8 |
| 12 | 505 | 12.8 |
| 13 | 557 | 13.6 |
| 14 | 615 | 13.5 |
| 15 | 679 | 15.1 |
| 16 | 750 | 16.3 |
| 17 | 828 | 17.6 |
| 18 | 914 | 18.5 |
| 19 | 1009 | 20.4 |
| 20 | 1114 | 22.1 |
| 21 | 1230 | 23.9 |

6. สรุป

จากผลการวิเคราะห์ด้วยการวัดค่าความถี่ของเสียงจริงและผลจากการจำลองเหตุการณ์ด้วยวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ให้ค่าประมาณแสดงความสัมพันธ์สอดคล้องกันพอสมควรเนื่องจากการจำลองเหตุการณ์ลูกกระนาดมีได้มีจุดรองรับใดๆ เหมือนจริง ซึ่งในการจำลองเหตุการณ์ได้ประยุกต์ inertia relief เพื่อวิเคราะห์ความถี่เสียงของลูกกระนาด ผลการวิเคราะห์ที่ได้พยายามให้ได้ความสัมพันธ์ต่างๆ เป็นเชิงเส้นเพื่อให้ง่ายต่อการสร้างลูกกระนาด และเป็นแนวทางในการพัฒนาความเป็นมาตรฐานของวงการดนตรีไทยต่อไป ลักษณะของ mode shape ของลูกกระนาดที่ทำให้เกิดความถี่เสียงตามตัวโน้ตแสดงในรูปที่ 16 ซึ่งเป็นลักษณะการแอ่นตัวของลูกกระนาดลูกที่ 1 และลักษณะของ mode shape ของลูกกระนาดลูกที่ 21 ซึ่งมีการเพิ่มเนื้อไม้บริเวณใต้ท้องลูกกระนาดมี mode shape แสดงดังรูปที่ 17 ผลการวิเคราะห์ได้สร้างแนวทางในการสร้างลูกกระนาดโดยไม่ต้องใช้ตะกั่วถ่วงได้โดยกำหนดระยะเริ่มต้นตัดใต้ท้องลูกกระนาดและปรับเปลี่ยนความหนาตัดใต้ท้องลูกกระนาดเพื่อให้ได้เสียงตรงตามตัวโน้ต



รูปที่ 16 ผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 17 ผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เพิ่มเนื้อไม้ได้ท่อง
ลูกระนาด

ผลการวิเคราะห์ยังแสดงให้เห็นว่าความหนาใต้ท้องลูกระนาดแปรผันตรงกับความถี่ของเสียงของลูกระนาดและตำแหน่งเริ่มต้นที่ได้ท้องของลูกระนาด ส่วนตะกั่วที่ติดอยู่ใต้ลูกระนาดแต่ละลูกระนาดจะช่วยในการปรับความถี่ของเสียงให้ต่ำลงเมื่อความหนาใต้ท้องลูกระนาดมีค่ามากแต่ความยาวเท่าเดิม ในทำนองเดียวกับการเพิ่มความหนาใต้ท้องของลูกระนาดทำให้ความถี่ของเสียงของลูกระนาดสูงขึ้นเมื่อลูกระนาดมีความยาวเท่าเดิม

7. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนใคร่ขอขอบคุณ คุณพจน์ ไยบัวที่ให้ความรู้ความเข้าใจในการสร้างผืนระนาดและขอขอบคุณสถาบันหุ่นยนต์ภาคสนาม(FIBO)ที่อนุญาตให้วัดเสียงของระนาดจริง และขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลที่อำนวยความสะดวกงานนี้ได้สำเร็จขึ้นมา จึงขอขอบคุณมา ณ.ที่นี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Billmeyer, F. W. (1971) *Textbook of polymer science*, Wiley-Interscience, New York.

- [2] Eric Krotkov, R. K. a. N. Z. (1995) In *In Proc. Inti. Conf. Intelligent Robots and Systems(IROS)*Pittsburgh, Pennsylvania, pp. 90-95.
- [3] Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, J. (1992) *Mechanics of materials*, McGraw-Hill Company, London.
- [4] Gorman, D. J. (1975) *Free vibration analysis of beams and shafts*, Wiley-Interscience, New York.
- [5] Inman, D. J. (1994) *Engineering vibration*, Prentic-Hall, Inc., New York.
- [6] Krotkov, R. S. D. a. E. P. (1995) In *In Proc. Inti. Conf. Intelligent Robots and Systems(IROS)*Pittsburgh, Pennsylvania, pp. 115-119.
- [7] Meirovitch, L. (1986) *Elements of vibration analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [8] Resnick, D. H. a. R. (1978) *Physics part 1 and 2*, Wiley-Interscience, New York.
- [9] Rossing, T. D. (1982) *The science of sound*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London.
- [10] สุดใจ ทศพร และ โชตก เก่งเขตรกิจ (2533) *ศิลปะกับชีวิต*, โรงพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช จำกัด.
- [11] สำนักงานคณะกรรมการวัฒนธรรมแห่งชาติ กระทรวงวัฒนธรรม <http://www.culture.go.th/knowledge/ranad/chap1/fc1s2p1.htm>