การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 21
17-19 ตุลาคม 2550 จังหวัดชลบุรี

การควบคุมเพนดูลัมกลับทิศบนรถโดยใช้การควบคุมที่เหมาะสมที่สุด

สโรช ไทรเมฆ[1] และ พิเชษฐ์ สืบสายพรหม[2]

[1]ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ และ สถาบันวิทยาการหุ่นยนต์ภาคสนาม (FIBO)

[2]ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมและเครื่องมือวัด คณะวิศวกรรมศาสตร์

[1]E-mail: saroj@fibo.kmutt.ac.th

[1]Department of Controlsystem and Instrumentation Engineering, Faculty of Engineering

[2]Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, [1]Institute of FIeld roBOtics (FIBO),

[1,2]King Mongkut's University of Technology Thonburi. 126 Pracha-u-tit Rd. Bangmod Tungkru Bangkok 10140

[1]E-mail: saroj@fibo.kmutt.ac.th

บทคัดย่อ:เพนดูลัมกลับทิศบนรถเป็นอุปกรณ์มาตรฐานที่ใช้ในการเรียนการสอนการควบคุมแบบป้อนกลับในช่วงเวลาหนึ่ง เนื่องจากระบบดังกล่าวง่ายต่อการสร้างและมีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายอย่างเช่น ระบบมีหลายองศาอิสระ ระบบไม่มีเสถียรภาพ และระบบมีจำนวนตัวขับเคลื่อนน้อยกว่าจำนวนองศาอิสระ รายงานฉบับนี้จะกล่าวถึงการใช้การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดมาช่วยออกแบบการควบคุมแบบวงปิดในสองส่วนคือการสร้างสมดุลให้เพนดูลัมกลับทิศมีเสถียรภาพ ณ ตำแหน่งสมดุลที่ไร้เสถียรภาพ และควบคุมให้ตำแหน่งของเพนดูลัมไปยังตำแหน่งที่ต้องการอื่นที่ไม่ได้เป็นตำแหน่งสมดุลในธรรมชาติ โดยเริ่มจากการเขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบภายใต้สมการของลากรองจ์ จากนั้นคำนวณหาสมการเชิงเส้น ณ จุดสมดุลที่สนใจที่จะควบคุม ออกแบบระบบควบคุมโดยอาศัยการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดภายใต้ระบบที่ถูกทำให้เป็นเชิงเส้นที่ตำแหน่งที่สมดุลและตำแหน่งที่ต้องการอื่นๆ นอกจากนี้ยังนำเสนอผลการทดลองเบื้องต้นโดยเฉพาะผลการทดลองจากการรักษาเสถียรภาพของระบบเนื่องจากระบบดังกล่าวเป็นระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติที่น่าสนใจดังกล่าวแล้วข้างต้น การใช้การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดซึ่งเป็นการควบคุมที่เป็นเชิงเส้นทำให้การออกแบบระบบควบคุมง่ายต่อความเข้าใจและสามารถใช้งานได้เป็นอย่างดี ข้อเสียของการควบคุมชนิดนี้คือถ้าเราต้องการให้เป็นการควบคุมในลักษณะติดตามตำแหน่งหรือความเร็วหรือสเตทอื่นๆที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจำเป็นต้องมีการคำนวณระบบควบคุมใหม่ทุกครั้ง

1.บทนำ

ระบบทางกลที่เราพบเกือบทั้งหมดเป็นระบบไม่เชิงเส้น ซึ่งเรามักจะเน้นการหาสมการควบคุมแบบไม่เชิงเส้นมาควบคุมเพื่อให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ เช่น การทำให้ระบบมีเสถียรภาพ หรือการทำให้ระบบติดตามตำแหน่งหรือความเร็วที่กำหนด เป็นต้น อย่างไรก็ตามการออกแบบระบบควบคุมแบบไม่เชิงเส้นมีหลายลักษณะซึ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของสมการที่ต้องการจะควบคุมด้วยเช่นกัน [5] นอกจากนี้การควบคุมแบบไม่เชิงเส้น เช่น การควบคุมแบบสไลดิ่งโมดยังอาจจะสร้างปัญหาในเรื่องของการทำงานที่ความถี่สูงอาจจะทำให้ระบบเกิดความเสียหายได้ [2] อีกปัญหาหนึ่งของการควบคุมแบบไม่เชิงเส้นที่ทราบกันดีคือปัญหาความคงทนของระบบควบคุม [5] เนื่องจากการจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถจำลองพฤติกรรมทั้งหมดของระบบได้ การใช้การควบคุมแบบเชิงเส้นแม้จะมีข้อจำกัดในด้านขอบเขตของการทำงานที่แคบกว่าการควบคุมแบบไม่เชิงเส้นแต่ความคงทนของระบบมีสูงกว่าดังจะเห็นได้จากผลการทดลองใน [2,3] ทำให้การควบคุมแบบเชิงเส้นในลักษณะของการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดเป็นทางเลือกของระบบควบคุมที่ทำงานในขอบเขตแคบๆ บทความนี้จึงเป็นการนำเสนอการใช้การควบคุมแบบเชิงเส้นแบบเหมาะสมที่สุดมาประยุกต์เพนดูลัมแบบกลับทางบนรถ

บทความนี้ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้ หัวข้อที่สองได้แก่การควบคุมที่เหมาะสมที่สุด หัวข้อที่สามได้แก่แบบจำลองเพื่อใช้ในการประยุกต์ หัวข้อที่สี่ได้แก่การจัดเตรียมอุปกรณ์และการเชื่อมต่อกับคอมพิวเตอร์ หัวข้อที่ห้าได้แก่การจำลอง

หัวข้อที่หกได้แก่ผลการทดลอง และหัวข้อสุดท้ายได้แก่บทสรุป

2.การควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดเชิงเส้น

การควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดเชิงเส้น (linear optimal control) เป็นการควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้นซึ่งอยู่บนพื้นฐานของการหาค่าอินพุต $u(\cdot)$ ซึ่งเป็นสมาชิกของฟังก์ชั่น piecewise continuous ที่ทำให้ค่าดัชนีสมรรถนะ (performance index) J มีค่าต่ำที่สุด [1,4] กำหนดให้สมการไม่เชิงเส้นแบบแอฟไฟน์ (affine nonlinear system)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

โดยที่ $f : \Re^n \to \Re^n$, $g : \Re^n \to \Re^{n\times m}$, $x \in \Re^n$ และ $u \in \Re^m$ นิยาม $x_{des}(t)$ เป็นปริภูมิของระบบที่ต้องการ เพื่อให้การติดตามบางปริภูมิเป็นไปตามความต้องการเราเพิ่มปริภูมิที่เราต้องการจะให้การติดตามเป็นไปด้วยความแม่นยำดังนี้

$$\dot{e}_{par} = x_{par}(t) - x_{des_par}(t)$$

โดยที่ $x_{par}(t)$ และ $x_{des_par}(t)$ เป็นปริภูมิของระบบและปริภูมิที่ต้องการบางส่วน ณ เวลาใดๆตามลำดับ สมมุติให้ $\tilde{x} = (e_{par}, x - x_{des})^T$ และใช้จาโคเบียนเพื่อหาระบบที่เป็นเชิงเส้นของระบบที่เพิ่มปริภูมิตามปริภูมิที่ต้องการ $\tilde{x}_{des}(t) = (0, x_{des}(t))^T$ และอินพุตที่ต้องการเราจะได้

$$\dot{\tilde{x}} = F(t)\tilde{x} + G(t)\tilde{u}$$

โดยที่ $F(t)$ และ $G(t)$ นิยามดัชนีสมรรถนะ

$$J = \int_0^T \left(\tilde{u}^T R(t)\tilde{u} + \tilde{x}^T Q(t)\tilde{x}\right)dt + \tilde{x}^T(T)S\tilde{x}(T)$$

โดยที่ $Q(t) \in \Re^{(n+k)\times(n+k)}$ และ $R(t) \in \Re^{m\times m}$ ซึ่งสมาชิกในเมทริกซ์ต้องมีความต่อเนื่อง เป็นเมทริกซ์ที่สมมาตร ไม่เป็นลบ (nonnegative definite) และเป็นบวก (positive definite) ตามลำดับ $S \in \Re^{(n+k)\times(n+k)}$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่เป็นลบ $T \in [0,\infty)$ เป็นช่วงเวลาที่ต้องการการควบคุม การควบคุมที่เหมาะสมที่สุด $\tilde{u}^*(\cdot)$ ซึ่งทำให้ดัชนีสมรรถนะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อคิดเทียบกับระบบที่เพิ่มปริภูมิ

$$\tilde{u}^*(t) = -R^{-1}(t)G^T(t)P(t)\tilde{x}(t)$$

โดยที่ $P(t)$ เป็นไปตามข้อกำหนด $P(T) = S$ และสมการเมทริกซ์ริคคาติ

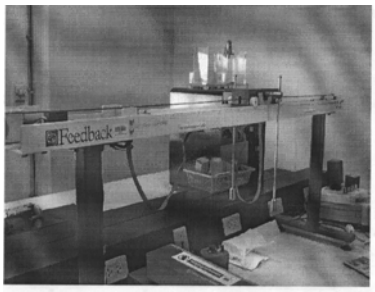
$$-\dot{P}(t) = P(t)F(t) + F^T(t)P(t) - P(t)G(t)R^{-1}(t)G^T(t)P(t) + Q(t)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการที่อยู่ในรูปทั่วๆไปซึ่งสามารถใช้ได้กับกรณีที่ระบบเป็นเชิงเส้นแบบเวลาเปลี่ยนแปลง (linear time-varying)ได้ ซึ่งถ้าระบบเชิงเส้นที่ได้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาการคำนวณจะง่ายกว่าสมการข้างต้นมาก ส่วนเมทริกซ์ $Q(t), R(t)$ และ S เป็นเมทริกซ์ที่ผู้ออกแบบระบบควบคุมจะต้องเลือกเอง เนื่องจากการเลือกเมทริกซ์ดังกล่าวไม่มีกฎเกณฑ์ที่ตายตัวหรือไม่มีทฤษฎีที่แน่นอนมารองรับจึงมีความจำเป็นที่จะต้องใช้การลองผิดลองถูกมาเลือกสมาชิกในเมทริกซ์ดังกล่าว หลักเกณฑ์ง่ายๆที่นำมาใช้ในการเลือกเมทริกซ์ข้างต้นคือเมทริกซ์ไดอะกอนัล (diagonal)คงที่ เช่นเมทริกซ์ $Q(t) = Q$ ที่เป็นไดอะกอนัลเมทริกซ์ มีความหมายว่าแต่ละปริภูมิไม่มีความเกี่ยวโยงกันโดย เช่นค่า Q_{11} หมายถึงค่า Q ที่แถวที่หนึ่งหลักที่หนึ่งเป็นค่าความสำคัญของปริภูมิในแถวแรกในที่นี้หมายถึงค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นระหว่างค่าที่ควบคุมกับค่าที่ต้องการถ้าค่า Q_{11} มีค่าสูงแสดงว่าเราให้ความสำคัญกับค่าความผิดพลาดมาก แต่ถ้าค่าต่ำแสดงว่าเราไม่ค่อยให้ความสำคัญกับค่าผิดพลาดดังกล่าว อย่างไรก็ตามเราไม่สามารถเปรียบเทียบในเชิงปริมาณว่าค่า Q ในแต่ละแถวและหลักว่าค่าที่มากน้อยกว่ากันสองเท่าจะมีความสำคัญมากน้อยเป็นสองเท่า แต่เป็นการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพเรากำลังพิจารณาว่าอะไรที่เราอยากให้ความสำคัญมากกว่าน้อยกว่าเนื่องจากผลเฉลยที่ได้จากการหาตัวควบคุมต้องนำพลวัตของระบบมาเกี่ยวข้องด้วย แต่ถ้าเราให้ค่าอื่นๆที่ไม่อยู่ในไดอะกอนัลมีค่าหมายความว่าเราต้องการให้แต่ละปริภูมิมีความเชื่อมโยงกันซึ่งอาจจะทำให้การตีความเพื่อให้การออกแบบระบบควบคุมเป็นไปได้ยากขึ้นมาก

3.แบบจำลองเพื่อใช้ในการประยุกต์

อินเวอร์สเพนดูลัมบนรถเป็นแบบจำลองที่ใช้เพื่อทดสอบการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด ก่อนอื่นเราต้องเขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบโดยใช้สมการของลากรองจ์ซึ่งจะทำให้สามารถเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการไม่เชิงเส้นแบบแอฟไฟน์ จากนั้นนำสมการไม่เชิงเส้นมาทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization) และตรวจสอบ

เสถียรภาพของระบบ ความสามารถในการควบคุมและการสังเกตได้ พิจารณาอินเวอร์สเพนดูลัมบนรถดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 อินเวอร์สเพนดูลัมบนรถ [3]

โดยกำหนดให้ m_c เป็นมวลของรถ m_p เป็นมวลของตุ้มน้ำหนักที่ปลายเพนดูลัม l เป็นระยะจากรถถึงจุดศูนย์กลางตุ้มน้ำหนัก x เป็นระยะที่รถเคลื่อนที่ไปบนราง θ เป็นมุมที่เพนดูลัมเบนออกเมื่อวัดเทียบกับแนวดิ่ง B เป็นสัมประสิทธิแดมปิงที่เกิดจากความเสียดทานระหว่างล้อรถกับราง J เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของการก้านเพนดูลัม และ F เป็นแรงที่เกิดจากการควบคุมกระทำกับตัวรถ ภายใต้สมการของลากรองจ์

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_j$$

โดยที่ L เป็นผลต่างระหว่างพลังงานจลน์กับพลังงานศักย์ของระบบ q_i เป็นแกนอ้างอิงทั่วไป (generalized coordinates) และ Q_j เป็นแรงภายนอกทั่วไป (generalized external forces) ซึ่งรายละเอียดของการสร้างและการใช้สมการดังกล่าวสามารถหาอ่านได้ตามเอกสารอ้างอิงทั่วไป [6] หลังจากผ่านขั้นตอนในการคำนวณพอสมควรเราจะได้สมการไม่เชิงเส้นของเพนดูลัมบนรถดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\left(J+m_p l^2\right)\left(Bx_2+m_p l x_4 \sin x_3+u\right)+m_p^2 l^2 g \sin x_3 \cos x_3}{\left(m_c+m_p\right)\left(J+m_p l^2\right)-m_p^2 l^2 \cos^2 x_3}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-m_p l \cos x_3\left(Bx_2+m_p l x_4^2 \sin x_3+u\right)+\left(m_c+m_p\right) m_p g l \sin x_3}{\left(m_c+m_p\right)\left(J+m_p l^2\right)-m_p^2 l^2 \cos^2 x_3}$$

โดยที่ $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta$ และ $x_4 = \dot{\theta}$ ซึ่งคือตำแหน่งและความเร็วของรถ และมุมและความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมตามลำดับ ถ้าวิเคราะห์อีกเล็กน้อยจะพบว่าสมการข้างต้นเป็นสมการไม่เชิงเส้นแบบแอฟไฟน์ อย่างไรก็ตามสมการข้างต้นยังไม่เหมาะสมที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในระบบควบคุมที่เหมาะสมที่สุด เพื่อให้สามารถประยุกต์เข้ากับระบบควบคุมสมการข้างต้นได้ถูกนำมาผ่านกระบวนการที่เรียกว่าทำให้เป็นเชิงเส้น กระบวนการดังกล่าวมีลักษณะคล้ายการเขียนสมการในรูปอนุกรมเทเลอย์ (Taylor's series) โดยจะคงเหลือไว้เฉพาะพจน์ที่เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งเท่านั้น ส่วนอนุพันธ์ที่เป็นอันดับสูงกว่าหนึ่งให้ถือว่ามีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับอนุพันธ์อันดับแรก เนื่องจากเราพิจารณาให้การทำงานของระบบอยู่ในบริเวณจุดสมดุลนั่นเอง

$$\dot{x}=\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=x_0,u=0} x+\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=x_0,u=0} u$$

โดยที่ $x = x_0$ หมายถึงตำแหน่งและความเร็วอ้างอิงที่ต้องการ และ $u = 0$ หมายถึงแรงภายนอกเป็นศูนย์ ในความเป็นจริงเรายังสามารถกำหนดให้รถและเพนดูลัมเคลื่อนที่ไปตามความต้องการได้แต่การควบคุมจะซับซ้อนมากขึ้นเนื่องจากสมการเชิงเส้นที่ได้จะเป็นสมการที่ขึ้นกับเวลา (linear time-varying equations) จากการทำให้เป็นเชิงเส้นทำให้เราสามารถเขียนสมการปริภูมิได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\frac{1}{J\left(m_c+m_p\right)+m_c m_p l^2}\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\left(J+m_p l^2\right)B & m_p^2 g l^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -m_p l B & m_p g l\left(m_c+m_p\right) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ J+m_p l^2\\ 0\\ m_p l\end{bmatrix}u\right)$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

หลังจากแทนค่าต่าง ๆที่มีอยู่ในระบบเราจะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่จุดสมดุล $x_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ และ $u_0 = 0$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -0.0438 & 0.6193 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -0.0923 & 22.0011 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0.8750\\ 0\\ 1.8459\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

ระบบดังกล่าวมีคุณสมบัติที่น่าสนใจสองประการ ได้แก่ 1) ระบบมีการตัวควบคุมน้อยกว่าจำนวนองศาอิสระ (under-actuated system) และ 2) ระบบดังกล่าวมีคุณสมบัติของนอนมินิมัมเฟส (non-minimum phase) ซึ่งเปรียบเสมือนมีซีโร่ (zeros) ทางด้านขวาของเอสเพลน (s-plane) ซึ่งทางกายภาพเราอาจจะพิจารณาระบบแยกออกเป็นสองส่วนคือส่วนของรถซึ่งเราสามารถควบคุมได้โดยตรงกับส่วนของเพนดูลัมซึ่งไม่สามารถควบคุมได้โดยตรงนอกจากนั้นยังไม่มีเสถียรภาพในขณะที่ไม่มีอินพุตอีกด้วย หรืออาจจะกล่าวได้ว่าถ้าเราต้องการให้รถเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งที่ต้องการแต่ในขณะที่รถเคลื่อนที่ไปเพนดูลัมก็จะขาดเสถียรภาพ ดังนั้นเราจำเป็นต้องทำให้เพนดูลัมมีเสถียรภาพพร้อมกับบังคับให้รถเคลื่อนที่ไปในตำแหน่งที่ต้องการ ทำให้การออกแบบระบบควบคุมโดยการใช้การกำจัดโพลซีโร่ (pole-zero cancellation) เป็นไปไม่ได้เนื่องจากการที่ออกแบบการควบคุมดังกล่าวทำให้ตัวควบคุมไม่มีเสถียรภาพซึ่งจะมีผลเสียเนื่องจากระบบจริงมีสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอนการควบคุมจะไม่สามารถทำงานได้ตั้งแต่เริ่มต้น

4.การวิเคราะห์ที่เหลือคือการตรวจสอบเสถียรภาพ

ความสามารถในการสังเกตและการควบคุม (observability and controllability) การตรวจสอบเสถียรภาพทำได้หลายวิธีการแต่วิธีที่ง่ายที่สุดคือการตรวจสอบว่าสมการคุณลักษณะที่ได้จากเมทริกซ์ A ว่ามีผลเฉลยอยู่ทางขวาของแกนจินตภาพบนเอสเพลนหรือไม่ ถ้าในกรณีที่ระบบขึ้นกับเวลาการตรวจสอบจะทำได้ยากกว่ามาก [4]

$$\left|sI - A\right| = s^4 + 0.0437s^3 - 22.0011s^2 - 0.9054s = 0$$

จากการตรวจสอบพบว่าระบบเปิดไม่มีเสถียรภาพ ในกรณีนี้สังเกตได้โดยง่ายจากจุดสมดุลของเพนดูลัมไม่มีเสถียรภาพส่งผลให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ ยังมีวิธีตรวจสอบความมีเสถียรภาพหรือไม่ที่มีความซับซ้อนอื่นๆอีกซึ่งหาศึกษาได้จากหนังสือทางด้านการควบคุมทั่วๆไป [1,4] เนื่องจากระบบที่ไม่มีการควบคุมไม่มีเสถียรภาพดังนั้นจำเป็นที่ต้องใช้การควบคุมแบบวงปิดเข้ามาเพื่อรักษาเสถียรภาพ อย่างไรก็ตามจำเป็นต้องมีการตรวจสอบความสามารถในการสังเกตและการควบคุม ระบบที่มีความสามารถในการสังเกตอย่างสมบูรณ์ในที่นี้หมายถึงถ้าเราไม่สามารถวัดได้ทุกปริภูมิเราสามารถหาปริภูมิที่ขาดได้จากเอาท์พุต ในขณะที่ถ้าระบบมีความสามารถในการควบคุมอย่างสมบูรณ์หมายถึงทุกปริภูมิสามารถถูกควบคุมให้เข้าสู่จุดสมดุลในทุกจุดเริ่มต้นของปริภูมิ ในกรณีระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลาเราสามารถตรวจสอบความสามารถในการสังเกตและควบคุมได้จากคุณสมบัติง่ายๆ กำหนดให้

$$O = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \left(A^T\right)^2 C^T & \left(A^T\right)^3 C^T \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & A^3 B \end{bmatrix}$$

โดยที่เมทริกซ์ O และ M เรียกว่าเมทริกซ์การสังเกตและการควบคุมตามลำดับ จากการคำนวณพบว่าทั้งเมทริกซ์ O และ M มีแรงค์เท่ากับจำนวนปริภูมิคือ 4 ระบบจึงสามารถที่จะสังเกตและควบคุมอย่างสมบูรณ์

5.การออกแบบระบบควบคุม

การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดร่วมกับระบบสังเกตซึ่งใช้หาปริภูมิที่ไม่สามารถวัดได้โดยตรง หรือมีสัญญาณรบกวนมากเกินไปเนื่องจากสมการของระบบรถและเพนดูลัมในกรณีนี้เป็นสมการเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลาดังนั้นสามารถเขียนได้

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

ภายใต้ดัชนีสมรรถนะ

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

ภายใต้การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดเราสามารถเขียนกฎการควบคุมได้

$$u(t) = -R^{-1} B^T P x(t)$$

โดยเมทริกซ์ P เป็นผลเฉลยจากสมการริคคาติ

$$-\dot{P}(t) = PF + F^T P - PGR^{-1}G^T P + Q = 0$$

โดยกำหนดให้เมทริกซ์ $R = 1$ และ

$$Q = \begin{bmatrix} w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{\dot{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

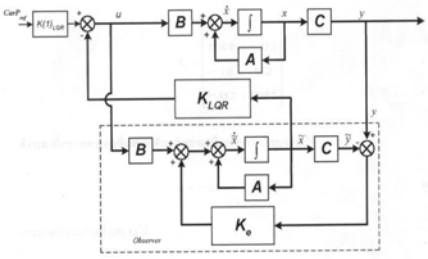
หลังจากแทนค่าเมทริกซ์ลงในสมการข้างต้นเราสามารถคำนวณค่า P ได้โดยใช้อัลกอริทึมในโปรแกรม MATLAB โดยใช้คำสั่ง “P = are(F,G,C)” หรืออาจจะคำนวณโดยใช้การอินทิเกรทสมการริคคาติย้อนกลับ ซึ่งผลเฉลยจะเป็นค่าที่ได้

จากผลเฉลยที่คงตัวดังนั้นเวลาที่ใช้ในการอินทีเกรทอาจจะกำหนดให้มีค่าสูงเพื่อดูผลเปลี่ยนแปลงเพื่อให้ได้ค่าคงตัว อย่างไรก็ตามเวลาที่ใช้ในการอินทิเกรทไม่มีค่าแน่นอนตายตัวแต่ในทางทฤษฎีมีค่าอนันต์ เมื่อแทนค่าในกฎการควบคุมเราจะได้กฎการควบคุมที่เหมาะสม

$$u(t) = \begin{bmatrix} 10 & 9.3165 & -54.0358 & -11.7010 \end{bmatrix} x(t)$$

6.การออกแบบตัวสังเกต

เนื่องจากการวัดตำแหน่งของเพนดูลัมและรถใช้เอนโคดเดอร์เป็นตัววัดซึ่งบอกได้เฉพาะตำแหน่งเท่านั้น การป้อนกลับต้องอาศัยความเร็วของเพนดูลัมและรถด้วย ทำให้จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของสัญญาณที่ได้จากเอนโคดเดอร์ทั้งสองตัว ซึ่งถ้าเอนโคดเดอร์ที่มีอยู่มีความละเอียดไม่เพียงพอทำให้อนุพันธ์ที่ได้มีส่วนประกอบของสัญญาณรบกวนสูงมาก ซึ่งไม่เหมาะกับการใช้งาน เพื่อลดสัญญาณรบกวนดังกล่าวเราจำเป็นต้องสร้างตัวสังเกตที่ใช้ประมาณค่าดังกล่าว



รูปที่ 2 ระบบควบคุมติดตามอินพุตรวมถึงตัวสังเกต

พิจารณาจากสมการของระบบ

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Cx$$

กำหนดให้ปริภูมิเป็นตัวแปรที่ได้จากการประมาณ เราต้องการนำเอาท์พุตที่ได้จากเซนต์เซอร์มาใช้ในการประมาณค่าปริภูมิ

$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} + Gu + K_e\left(y - C\tilde{x}\right)$$

$$= \left(F - K_e C\right)\tilde{x} + Gu + K_e y$$

นิยามให้ $e = x - \tilde{x}$ ซึ่งเป็นค่าความผิดพลาดที่ปริภูมิที่ได้จากการประมาณแตกต่างจากปริภูมิจริง โดยนำสองสมการข้างต้นมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\dot{e} = \left(F - K_e C\right)x - F_c\tilde{x}$$

ถ้ากำหนดให้ $F_c = F - K_e C$ เราสามารถเขียนสมการข้างต้นได้เป็น

$$\dot{e} = F_c e$$

ถ้า eigenvalues ของ F_c ทั้งหมดเป็นจำนวนจริงลบแล้วจะมีผลทำให้สมการความผิดพลาดเป็น asymptotically stable ซึ่งหมายถึง $e(t) \to 0$ หรือ $\tilde{x}(t) \to x(t)$ เมื่อเวลา $t \to \infty$ การเลือก eigenvalues ของระบบสังเกตอาจจะทำได้ในลักษณะเดียวกับการใช้สมการคุณลักษณะข้างต้นหรือใช้สูตรของ Ackerman ในกรณีที่ระบบเป็น SISO ประเด็นสำคัญอีกอย่างหนึ่งคือ eigenvalues ของตัวสังเกตควรจะทำให้ระบบสังเกตทำงานได้เร็วกว่าระบบควบคุม นำสมการทั้งระบบควบคุมและสังเกตมาเขียนให้อยู่ในรูปปริภูมิได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

7.การจัดเตรียมอุปกรณ์และการเชื่อมต่อกับคอมพิวเตอร์

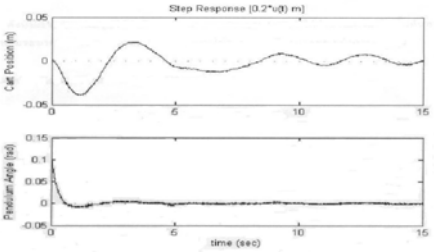
อุปสรรคอันหนึ่งของการเรียนรู้วิชาการควบคุมคือขีดจำกัดการนำกฎการคุมที่ได้จาการคำนวณไปใช้งานจริง เพื่อให้บทความนี้เสมือนตัวอย่างการใช้งานของระบบควบคุมหลังจากที่ได้ทำการคำนวณหาตัวควบคุมในหลายรูปแบบ โดยใช้ชุดทดลอง inverse pendulum ของบริษัท Feedback ทำการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ผ่าน data acquisition card ของบริษัท AdvanTech รุ่น PCL-812PG โดยการ์ดดังกล่าวมี sampling rate สูงสุดที่ $30\ kHz$ การติดต่อระหว่างการ์ดกับคอมพิวเตอร์จะใช้โปรแกรมย่อยในส่วนของ External controller ซึ่งจะมีรูปแบบของ dll มาตรฐานมาให้ โดยที่ผู้เขียนสามารถเขียน Algorithm สำหรับควบคุมเพิ่มเติม แล้วใช้ Real-time kernel สำหรับติดต่อกับ MATLAB เรียกใช้งาน

8.ผลการทดลอง

การทดลองแบ่งออกเป็นสามส่วนได้แก่ การรักษาเสถียรภาพของระบบโดยปราศจากตัวสังเกต และการบังคับควบคุมให้รถเคลื่อนที่ไปในตำแหน่งที่ต้องการโดยสามารถรักษาเสถียรภาพของ pendulum ให้อยู่ในตำแหน่งสูงสุดไว้โดยไม่มีตัวสังเกตและอาศัยตัวสังเกต การทดลองเริ่มจากการรักษาเสถียรภาพของระบบโดยปราศจากตัวสังเกตโดยอาศัยข้อมูลที่วัดได้โดยตรงจากเซนเซอร์ที่มีในระบบและกฎการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดที่ได้ออกแบบไว้ในตอนต้น โดยกำหนดให้จุดทำงานคือ ตำแหน่ง และความเร็วของทั้งรถและ pendulum เป็นศูนย์ หรือ $x = 0$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 10 & 9.3165 & -54.0358 & -11.7010 \end{bmatrix} x(t)$$

จากรูปที่ ... พบว่าเราสามารถรักษาเสถียรภาพของตำแหน่งของตัวรถและมุมของ pendulum ให้ตั้งตรงอยู่ได้

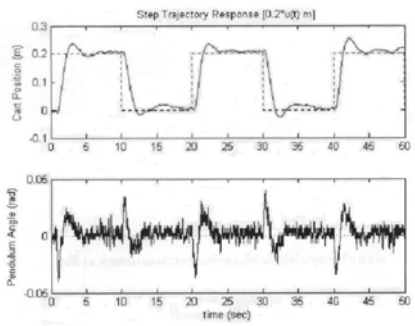


รูปที่ 3 ผลการทดลองของระบบรักษาเสถียรภาพโดยใช้การควบคุมที่เหมาะสมที่สุด

การบังคับควบคุมให้รถเคลื่อนที่ต้องต้องการโดยสามารถรักษาเสถียรภาพของ pendulum ให้อยู่ในตำแหน่งสูงสุดไว้โดยไม่มีตัวสังเกต โดยอาศัยตัวควบคุมตัวเดิมที่ได้ออกแบบไว้ในกรณีแรกร่วมกับผลคูณของ proportional gain กับตำแหน่งที่ผิดพลาดไปจากตำแหน่งที่ต้องการให้รถเคลื่อนที่ เราสามารถเขียนระบบควบคุมใหม่ได้ดังนี้

$$u(t) = K\left(r(t) - y(t)\right) + \begin{bmatrix} 10 & 9.3165 & -54.0358 & -11.7010 \end{bmatrix} x(t)$$

โดยที่ K เป็น proportional gain $r(t)$ เป็นตำแหน่งของรถที่เราต้องการในช่วงเวลาใดๆ และ $y(t)$ เป็นตำแหน่งของรถที่เวลานั้นๆ



รูปที่ 4 ผลการทดลองของการบังคับควบคุมตำแหน่งของรถโดยปราศจากตัวสังเกต

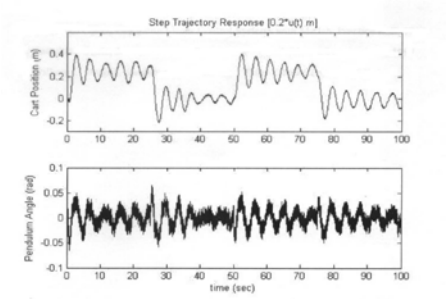
ผลการทดลองสุดท้ายเป็นการใช้ตัวสังเกตมาทำหน้าที่แทนตัวแปรสถานะบางตัวในกรณีที่เซนเซอร์ที่วัดสถานะนั้นๆไม่มีหรือไม่สามารถใช้งานได้ พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= F\tilde{x} + Gu + K_e\left(y - C\tilde{x}\right) \\ &= \left(F - K_e C\right)\tilde{x} + Gu + K_e y \\ &= \left(F - K_e C - GK\right)\tilde{x} + K_e y \end{aligned}$$

โดยที่

$$K_e = \begin{bmatrix} 82.8 & -1.1 \\ 1710.8 & -43.1 \\ -1.0 & 83.2 \\ -45.7 & 1750.7 \end{bmatrix}$$

สมการข้างต้นใช้สำหรับคำนวณค่าสเตท ณ เวลาต่างๆเพื่อใช้ในการคำนวณกฎการควบคุมต่อไป อาศัยกฎการควบคุมที่ใช้ในการทดลองที่สอง ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ ...



รูปที่ 5 ผลการทดลองของการบังคับควบคุมตำแหน่งของรถโดยใช้ตัวสังเกตช่วยในการประมาณสเตท

7.บทสรุปและข้อเสนอแนะ

จากผลการทดลองเราพบว่าการใช้การควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดในการออกแบบกฎการควบคุมสามารถทำให้ระบบสามารถรักษาเสถียรภาพของ pendulum ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้เรายังพบว่ากฎการควบคุมดังกล่าวยังมีความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงสูงโดยพิจารณาจากการทดลองสองการทดลองสุดท้าย เนื่องจากกฎการควบคุมไม่ได้ถูกออกแบบให้ติดตามอินพุตที่ต้องการแต่อาศัยการปรับสัญญาณให้เสมือนกฎการควบคุมยังไม่สามารถนำระบบเข้าสู่จุดสมดุลได้ อย่างไรก็ตามจะเห็นได้จากผลการทดลองที่สองว่าเราสามารถกำหนดให้ระบบติดตามสัญญาณที่เราต้องการภายในช่วงเวลาหนึ่งซึ่งโดยทั่วไปจะยาวกว่าช่วงเวลาของการทดลองแรก ในการทดลองสุดท้ายจะพบว่าระบบมีการตอบสนองที่ไม่ดีนักเมื่อเทียบกับการทดลองที่สอง แต่กฎการควบคุมก็ยังสามารถรักษาเสถียรถาพของระบบไว้ได้ ปัญหาสำคัญที่พบจากการออกแบบระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดคือการเลือกฟังก์ชันน้ำหนัก R และ Q ซึ่งเป็นเมตริกซ์น้ำหนักของตัวควบคุมกับสเตทตามลำดับ ซึ่ง

ผู้ออกแบบจะต้องเป็นผู้กำหนดเอง นอกเหนือจากนี้แล้วการใช้การควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดในการออกแบบกฎการควบคุมที่ต้องการให้สเตทใดสเตทหนึ่งหรือหลายสเตททำให้ระบบที่ต้องการจะควบคุมเป็นระบบที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นผลให้กฎการควบคุมมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วยซึ่งออกแบบตัวควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดมีหลักการออกแบบและขั้นตอนการออกแบบที่ไม่ซับซ้อนมีระบบการออกแบบที่แน่นอนและมีความคงทนต่อความผิดพลาดของสมการทางคณิตศาสตร์พอสมควรจำเป็นต้องออกแบบระบบควบคุมใหม่ทุกๆครั้งที่มีการเปลี่ยนแปลงสเตทที่ต้องการติดตาม อย่างไรก็ตามการ

8.เอกสารอ้างอิง

[1]. Callier, F. M. and Desoer C. A., “Linear System Theory”, Springer-Verlag, 1991.

[2]. Saimek, S., “Motion Planning and Control of An Aquatic Using An Oscillating Foil As A P Propulsor”, Ph.D. Thesis University of Minnesota, 2003.

[3]. พิเชษฐ์ สืบสายพรหม “โครงงานในวิชาการควบคุมยุคใหม่” พ.ศ. 2547.

[4]. W.L. Brogan, “Modern Control Theory”, 3rd edition, Prentice Hall, 1991

[5].H. K. Khalil, “Nonlinear Systems”, 3rd edition, Prentice Hall, 2002.

[6].D. T. Greenwood, “Principles of Dynamics”, 2nd edition, Prentice Hall International Editions, 1988.