

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 14
2-3 พฤศจิกายน 2543 โรงแรม โนโวเทล เชียงใหม่

การอพทไมซ์รูปร่างเชิงสองมิติโดยใช้เส้นขอบเบซิเออร์และบี-สไปไลน์ Two-Dimensional Shape Optimization Using Bezier and B-Spline Boundary

ไพบุณย์ ลิ้มปิตินาณิชย์ และ อนุชา พรหมวังขวา
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
เชียงใหม่ 50200
โทร 053-944147, โทรสาร 053-944145, E-Mail : eninpmw@chiangmai.ac.th

Paiboon Limpitipanich and Anucha Promwungkwa
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chiang Mai University
Chiang Mai 50200, Thailand
Tel : 6653-944147 Fax :6653-944145

บทคัดย่อ

การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่ออพทไมซ์รูปร่างของ
โจทย์ปัญหาทางด้านแมคคานิกส์ในสองมิติโดยใช้เส้นขอบเบ-
ซิเออร์และบี-สไปไลน์แสดงขอบของชิ้นงานออกแบบ ฟังก์ชัน
วัตถุประสงค์ของการอพทไมซ์เซชันเป็นการลดความเค้น
von Mises มากสุดที่เกิดขึ้นภายในชิ้นงาน โดยมีฟังก์ชันจุดควม
คุมของขอบโค้งเป็นตัวแปรออกแบบ การวิเคราะห์ความเค้น
ภายในชิ้นงานใช้วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p
เวอร์ชันโดยขอบของชิ้นงานและขอบของเอลิเมนต์ใช้ฟังก์ชัน
ชุดเดียวกัน การแก้ไขโจทย์ปัญหาการอพทไมซ์เซชันใช้
ทฤษฎีลำดับโปรแกรมเชิงเส้นและวิธีซิมเพล็กซ์ โดยกระบวนการ
การอพทไมซ์จะทำการปรับแต่งขอบโค้งของชิ้นงานเพื่อลด
ค่าความเค้นหนาแน่นสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน การศึกษาได้
ทดสอบการอพทไมซ์เซชันรูปร่างขอบโค้งของชิ้นงานตัว
อย่างสองตัวอย่าง ผลลัพธ์ที่ได้พบว่า ลักษณะขอบโค้งของ
ชิ้นงานตัวอย่างสามารถลดค่าความเค้น von Mises ภายใน
ชิ้นงานได้ และมีค่าความเค้นด้านสูงที่กระจายสม่ำเสมอ โดย
การลดลงของความเค้นหนาแน่นจะขึ้นอยู่กับรูปร่างของโจทย์
ปัญหาเริ่มต้น นอกจากนี้พบว่าวิธีการวิเคราะห์ชิ้นงานด้วย
อันดับ p ที่สูงขึ้นจะให้รูปร่างอพทไมซ์ที่มีค่าความเค้น von
Mises อยู่ใกล้ค่าตอบสุดท้ายมากที่สุด

Abstract

The objective of this study is to optimize shape of a
two-dimensional elastic mechanic problem having a
bezier and b-spline boundary. An objective function of
the optimization problem is the minimization of maximum
von Mises stress occurred inside the problem. Coordinates of a bezier and b-spline curve are used as
design variables. P -version finite element analysis is
used to analysis stresses, which solid and element
boundaries are the same curve. Optimization solution is
the combination of sequential linear programming and
simplex method. Two examples are demonstrated to
show the reduction of a maximum stress. The results
shown that high value stresses are distributed uniformly
over the designed region and maximum von Mises
stress is reduced while the final shape is optimized. The
reduction of stress concentration depends on the initial
shape of the problem. A higher order element results the
convergence of stress to the final value.

1. บทนำ

การอพทไมซ์เซชัน (Optimization) รูปร่างโดยใช้วิธี
การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันเริ่มต้นโดย

Shyy และคณะ [8] ได้ศึกษาการออฟทิมซ์เซชันชิ้นงานโดยใช้เส้นขอบเบซิเอร์และบี-สไปพล์ (Bezier and b-spline boundary) ร่วมกับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันซึ่งพบว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง โดย Zienkiewicz และ Taylor [5] ได้รายงานข้อดีของวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชัน นั่นคือ ในการเพิ่มฟังก์ชันพื้นฐาน (Shape function) ของแต่ละเอลิเมนต์สามารถเพิ่มฟังก์ชันพื้นฐานที่มีอันดับสูงเข้าไปยังฟังก์ชันพื้นฐานเดิมที่มีอันดับต่ำกว่า โดยการคำนวณฟังก์ชันฐานกระทำเฉพาะเมตริกซ์ความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันฐานใหม่ที่เพิ่มเข้าไป ซึ่งวิธีการนี้จะเร็วกว่าการคำนวณฟังก์ชันฐานใหม่ทั้งหมดดังที่ใช้ในวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ h เวอร์ชัน นอกจากนี้ Promwungkwa [1] สร้างโปรแกรม p -FEM ซึ่งเป็นโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันโดยใช้การปรับแต่งด้วยอันดับ p ที่ไม่สม่ำเสมอในแต่ละเอลิเมนต์ที่ต้องการฟังก์ชันฐานที่มีอันดับสูง โปรแกรม p -FEM ดังกล่าวได้นำมาพัฒนาใช้กับการวิเคราะห์การออฟทิมซ์เซชันรูปร่างในการศึกษา

การออฟทิมซ์เซชันรูปร่างด้วยวิธีการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องและพบว่าการใช้เส้นขอบเบซิเอร์และเส้นขอบบี-สไปพล์ร่วมกับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันจะให้ความแม่นยำในการคำนวณสูงโดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นน้ำหนักน้อยที่สุดและตัวอย่างเป็นการวิเคราะห์รูปร่างอย่างง่าย [2] การศึกษานี้มุ่งเน้นเพื่อแสดงการใช้เส้นขอบข้างต้นในการออฟทิมซ์เซชันรูปร่างของโจทย์ปัญหาทางด้านแมคคานิกส์ในสองมิติพร้อมกับแสดงตัวอย่างของโจทย์ปัญหาในทางปฏิบัติได้แก่ การออฟทิมซ์เซชันขอบโค้งของรูบนแผ่นกว้างเจาะรูรับแรงดึงด้านข้างในแนวแกนและการออฟทิมซ์เซชันขอบโค้งของแผ่นรับแรงดึงที่มีความกว้างหน้าตัดต่างกันโดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นความเค้นน้อยที่สุด การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity analysis) ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference) เพื่อประมาณค่าการตอบสนองของค่าความเค้นที่เกิดขึ้นภายในชิ้นงานเมื่อเปลี่ยนค่าของตัวแปรออกแบบ (Design variable) การแก้ไขโจทย์ปัญหาการออฟทิมซ์เซชันเลือกใช้วิธีการลำดับโปรแกรมเชิงเส้น (Sequential linear programming method) และวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method)

2. การกำหนดรูปร่างชิ้นงานและตัวแปรออกแบบ

ในวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันฟังก์ชันที่แสดงเส้นขอบของชิ้นงานและขอบของเอลิเมนต์จะใช้ฟังก์ชันชุดเดียวกัน ซึ่งในการศึกษานี้เลือกเส้นขอบสองชนิดแสดงขอบโค้งของชิ้นงาน ได้แก่ เส้นขอบเบซิเอร์และเส้นขอบบี-สไปพล์ และใช้ฟังก์ชันจุดควบคุมของเส้นขอบทั้งสองเป็นตัวแปรออกแบบ

2.1 เส้นขอบเบซิเอร์

เส้นขอบเบซิเอร์สร้างจากกลุ่มของจุดควบคุมโดยเส้นโค้งลากผ่านเฉพาะจุดควบคุมแรกและจุดควบคุมสุดท้ายเท่านั้น รูปแบบสมการของเส้นขอบเบซิเอร์แสดงดังนี้ [4]

$$P(t) = \sum_{k=0}^n p_k BEZ_{k,n}(t), 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{โดย } BEZ_{k,n}(t) = C(n, k) t^k (1-t)^{n-k} \quad (2)$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3)$$

โดยที่ n คือกำลังของโพลิโนเมียล k คือลำดับของจุดควบคุม p_k คือพิกัดของจุดควบคุมจำนวน $n+1$ จุดโดย $p_k = (x_k, y_k)$ $BEZ_{k,n}(t)$ คือฟังก์ชันผสมของเบซิเอร์ และ $C(n, k)$ คือสัมประสิทธิ์ทวินาม

2.2 เส้นขอบบี-สไปพล์

เส้นขอบบี-สไปพล์สร้างจากกลุ่มของจุดควบคุมเช่นเดียวกับเส้นขอบเบซิเอร์แต่มีข้อดีกว่าคือกำลังของโพลิโนเมียลของเส้นขอบสามารถกำหนดได้โดยไม่ขึ้นกับจำนวนของจุดควบคุม รูปแบบสมการของเส้นขอบบี-สไปพล์แสดงดังนี้ [4]

$$P(t) = \sum_{k=0}^n p_k B_{k,d}(t), 0 \leq t \leq t_{\max} \quad (4)$$

$$\text{โดย } B_{k,d}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } d=1, t_k \leq t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{if } d=1, t < t_k \text{ or } t \geq t_{k+1}, \\ \frac{t-t_k}{t_{k+d-1}-t_k} B_{k,d-1}(t) & \\ + \frac{t_{k+d}-t}{t_{k+d}-t_{k+1}} B_{k+1,d-1}(t), & \text{if } d > 1 \end{cases} \quad (5)$$

โดยที่ d คือกำลังของโพลีโนเมียล k คือลำดับของจุดควบคุม p_k คือพิกัดของจุดควบคุมจำนวน $n+1$ จุดโดย $p_k = (x_k, y_k)$ $B_{k,d}(t)$ คือฟังก์ชันผสมของบี-สไปพล์ t_k คือพารามิเตอร์แสดงลักษณะของเส้นขอบเรียกว่าเวคเตอร์น็อทได้แก่ $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+d}\}$ การคำนวณค่าภายในเวคเตอร์น็อทจำนวนดังนี้ [4]

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq j < d, \\ j-d+1 & \text{if } d \leq j \leq n, \\ n-d+2 & \text{if } j > n \end{cases} \quad (6)$$

โดย $j = 0, 1, 2, \dots, n+d$

ในการศึกษานี้เลือกใช้เส้นขอบบี-สไปพล์ที่มีกำลังของโพลีโนเมียลเท่ากับที่ใช้กับเส้นขอบเบซิเอร์ จากการที่ใช้กำลังของโพลีโนเมียลที่เท่ากันนี้ทำให้เส้นขอบทั้งสองชนิดมีรูปร่างเส้นขอบที่เหมือนกัน ดังนั้นการแสดงผลจะแสดงข้อมูลเพียงชุดเดียวเท่านั้น

3. วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชัน

วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการวิเคราะห์คำตอบของโจทย์ปัญหาด้วยวิธีการประมาณ ซึ่งกระทำโดยการแบ่งชิ้นงานวิเคราะห์ออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ และวิเคราะห์หาสนามการขจัดของจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์จากฟังก์ชันการประมาณภายใน ซึ่งสนามการขจัดอย่างง่ายสำหรับฟังก์ชันการประมาณภายในเชิงเส้นคือ [5]

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i = [N_i] \{d_i\} \quad (7)$$

โดยที่ i คือหมายเลขของจุดต่อที่มุมเอลิเมนต์ $[N_i]$ คือฟังก์ชันฐานเชิงเส้น $\{d_i\}$ คือเวคเตอร์ของการขจัดที่จุดต่อ และ n คือจำนวนของจุดต่อทั้งหมด เมื่อพิจารณาสมการ (7) ร่วมกับคุณสมบัติของวัสดุและหลักการของงานเสมือนจะได้สมการสมมูลย์ไฟไนต์เอลิเมนต์คือ [6]

$$[k_{ii}] \{d_i\} = \{f_i\} \quad (8)$$

โดยที่ $[k_{ii}]$ คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของเอลิเมนต์และ $\{f_i\}$ คือเวคเตอร์ของแรงที่เอลิเมนต์

สำหรับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันเป็นการวิเคราะห์ชิ้นงานด้วยเอลิเมนต์ที่มีอันดับสูงขึ้นโดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบไม่เชิงเส้นและฟังก์ชันฐานที่ใช้สร้างจากโพลีโนเมียลของเลอจองด์ (Legendre polynomial) ซึ่งวิธีการนี้กระทำได้โดยการเพิ่มฟังก์ชันฐานที่มีอันดับสูงกว่าฟังก์ชันฐานเดิมเข้าไปในฟังก์ชันการประมาณภายในเดิม ซึ่งสนามการขจัดและสมการสมมูลย์ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชันคือ [7]

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i + \sum_{j=1}^s N_{h,j} d_{h,j} = [N_i] \{d_i\} + [N_h] \{d_h\} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ih} \\ k_{ih}^T & k_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_h \end{Bmatrix} \quad (10)$$

โดยที่ $[N_h]$ คือฟังก์ชันฐานทั้งหมดที่เพิ่มเข้าไป $\{d_h\}$ คือเวคเตอร์การขจัดแบบ p s คือจำนวนของฟังก์ชันฐานทั้งหมดที่เพิ่มเข้าไป และ $[k_{ih}]$, $[k_{hh}]$ และ $\{f_h\}$ คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของเอลิเมนต์และเวคเตอร์ของแรงที่เอลิเมนต์ที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันฐานที่เพิ่มเข้าไปตามลำดับ

4. การวิเคราะห์ความไว

การวิเคราะห์ความไวเป็นการหาการตอบสนองของคำตอบที่ต้องการเมื่อทำการเปลี่ยนค่าตัวแปรออกแบบ โดยในการศึกษานี้คำตอบที่ต้องการคือค่าความเค้นที่ตำแหน่งต่างๆ ภายในชิ้นงาน การวิเคราะห์ความไวกระทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการสมมูลย์ไฟไนต์เอลิเมนต์ของระบบรวมเทียบกับตัวแปรออกแบบ ดังนั้นจากสมการ (10) เมื่อเขียนใหม่จะได้

$$[K] \{D\} = \{F\} \quad (11)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (11) เทียบกับตัวแปรออกแบบ x_i และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$[K] \left\{ \frac{\partial D}{\partial x_i} \right\} = \left(\left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{D\} \right) \quad (12)$$

จากสมการ (12) พบว่าการหาค่าอนุพันธ์ของสนามการขจัดกระทำได้โดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเวคเตอร์

ของแรงตัวใหม่นั้นคือพจน์ขวามือของสมการ (12) และเรียก
เวกเตอร์ของแรงนี้ว่า pseudo-loads [8] ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\{g_i\} = \left\{ \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{D\} \right\} \quad (13)$$

การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ของแรงและอนุพันธ์ของ
เมตริกซ์ความแข็งเกร็งเทียบกับตัวแปรออกแบบในสมการ
(13) กระทำโดยการประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสลับเนื่องดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\} = \frac{\{R(x_i + dx_i)\} - \{R(x_i)\}}{dx_i} \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] = \frac{[K(x_i + dx_i)] - [K(x_i)]}{dx_i} \quad (15)$$

ในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ของความเค้นที่
ตำแหน่งต่างๆ ภายในชิ้นงานเทียบกับตัวแปรออกแบบ
สามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องดังนี้

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \frac{\sigma(x_i + dx_i) - \sigma(x_i)}{dx_i} \quad (16)$$

โดยที่ $\sigma(x_i + dx_i)$ คือค่าความเค้นเมื่อเปลี่ยนค่าตัวแปรออกแบบ
ซึ่งคำนวณได้จาก $\{D(x_i + dx_i)\}$ โดยที่ $\{D(x_i + dx_i)\}$ คือ
สนามของการขจัดของรูปร่างชิ้นงานเมื่อเปลี่ยนค่าตัวแปร
ออกแบบและมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\{D(x_i + dx_i)\} = \{D(x_i)\} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial x_i} \right\} dx_i \quad (17)$$

เมื่อ $\left\{ \frac{\partial D}{\partial x_i} \right\}$ เป็นคำตอบของสมการ (12) นั่นคือ

$$\left\{ \frac{\partial D}{\partial x_i} \right\} = [K]^{-1} \{g_i\} \quad (18)$$

โดยที่ $[K]^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ $[K]$ ที่ได้จากการแก้
สมการ (12) และจะไม่คำนวณใหม่เมื่อคำนวณสมการ (18)

5. การแก้สมการหาผลลัพท์

การศึกษาเลือกใช้การแก้สมการหาผลลัพท์ด้วยวิธีการ
ลำดับโปรแกรมเชิงเส้นและวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งวิธีการลำดับ
โปรแกรมเชิงเส้นเป็นการปรับเปลี่ยนรูปแบบของโจทย์ปัญหา
ด้วยการประมาณค่าจากอนุกรมของเทอเรอร์และตัดพจน์ที่มี
กำลังสองขึ้นไปออก ฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอน-
สเตรนซ์ตามวิธีการลำดับโปรแกรมเชิงเส้นมีรูปแบบดังนี้ [9]

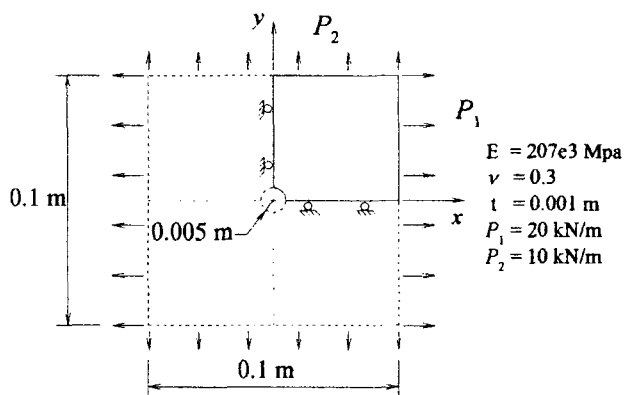
$$F(\{x\}^{k+1}) = F(\{x\}^k) + \{\nabla F(\{x\}^k)\}^T \{\Delta x\} \quad (19)$$

$$g_j(\{x\}^{k+1}) = g_j(\{x\}^k) + \{\nabla g_j(\{x\}^k)\}^T \{\Delta x\} \quad (20)$$

โดยที่ $\{\nabla F(\{x\}^k)\}$ และ $\{\nabla g_j(\{x\}^k)\}$ คือเวกเตอร์เกรเดียน
ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรนซ์เมื่อเทียบ
กับตัวแปรออกแบบ j คือลำดับของเงื่อนไขคอนสเตรนซ์และ
 k คือลำดับของรอบการคำนวณ

6. ตัวอย่างการวิเคราะห์ชิ้นงาน

6.1 การออกแบบรูปร่างของแผ่นกว้าง เจาะรูรับแรงดึงด้านข้างในแนวแกน



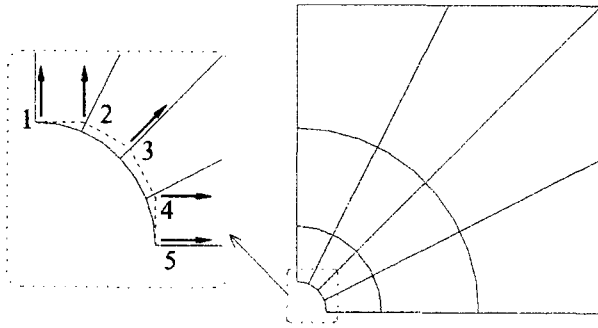
รูปที่ 1 แผ่นกว้างเจาะรูรับแรงดึงด้านข้างในแนวแกน

การออกแบบรูปร่างชิ้นงานแรกเป็นการออกแบบรูปร่าง
ขอบโค้งของรูที่เจาะบนแผ่นกว้างที่รับแรงดึงด้านข้างในแนว
แกนดังแสดงในรูปที่ 1 การออกแบบรูปร่างนี้มีวัตถุประสงค์
เพื่อลดค่าความเค้น von Mises มากสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน
และใช้ค่าความเค้น von Mises บนขอบโค้งของรูกำหนด
เงื่อนไขคอนสเตรนซ์ รูปแบบสมการของฟังก์ชันวัตถุประสงค์
และเงื่อนไขคอนสเตรนซ์ตามสมการ (19) และ (20) คือ

$$F = (\sigma_{VM})_{\max} + \{\nabla(\sigma_{VM})_{\max}\}^T \{\Delta x\} \rightarrow \min \quad (21)$$

$$g_j = (\sigma_{VM})_j + \{\nabla(\sigma_{VM})\}_j^T \{\Delta x\} \geq \sigma_{\text{lower}} \quad (22)$$

โดยที่ $\nabla(\sigma_{VM})$ คือเวกเตอร์เกรเดียนของความเค้น von Mises j คือตำแหน่งพิจารณาความเค้นบนขอบโค้งของรูและ σ_{lower} คือขอบเขตความเค้นน้อยสุดเพื่อจำกัดขนาดของรู



รูปที่ 2 รูปแบบเอลิเมนต์และตัวแปรออกแบบ

ในการวิเคราะห์ชิ้นงานนั้น เนื่องจากชิ้นงานมีลักษณะสมมาตร ดังนั้นในการวิเคราะห์จะเลือกวิเคราะห์เพียงหนึ่งในสี่ส่วนของชิ้นงานและแบ่งชิ้นงานออกเป็น 12 เอลิเมนต์โดยที่ขอบโค้งของชิ้นงานแสดงด้วยเส้นขอบเบซิเอร์และบี-สไปไลน์จากจุดควบคุมจำนวน 5 จุดและใช้การเคลื่อนที่ของจุดควบคุมเหล่านี้เป็นตัวแปรออกแบบดังแสดงในรูปที่ 2 โดยตัวแปรออกแบบที่ใช้ถูกกำหนดเพื่อรักษาค่าความชันของเส้นขอบบริเวณขอบสมมาตร ดังนั้นตัวแปรออกแบบที่ใช้จึงมี 3 ตัวแปร ได้แก่ การเคลื่อนที่ของจุดควบคุม 1-2, 3 และ 4-5 ตามลำดับ สำหรับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์เลือกใช้การออฟทิมิซเซชันด้วยอันดับ p ตั้งแต่สี่ถึงแปด ทั้งนี้เนื่องจากส่วนโค้งเบซิเอร์และบี-สไปไลน์ที่ใช้แสดงเส้นขอบมีอันดับของโพลีโนเมียลกำลังสี่ โดยหลังจากออฟทิมิซในแต่ละอันดับ p จะนำรูปร่างสุดท้ายมาทำการวิเคราะห์ใหม่ด้วยอันดับ p เท่ากับแปดเพื่อให้ได้ค่าความเค้น von Mises ของรูปร่างสุดท้ายมีความแม่นยำมากที่สุด

ค่าความเค้น von Mises ของรูปร่างออฟทิมิซที่อันดับ p เท่ากับสี่ถึงแปดแสดงดังตารางที่ 1 ภาพแสดงเส้นระดับความเค้นของชิ้นงานก่อนการวิเคราะห์และหลังการวิเคราะห์ที่อันดับ p เท่ากับสี่แสดงดังรูปที่ 3 ซึ่งจะเห็นว่าการกระจายของค่าความเค้น von Mises มีค่าสม่ำเสมอมากขึ้นและมีค่าลดลงมากกว่า 30 เปอร์เซ็นต์โดยความเค้นหนาแน่นลดลง

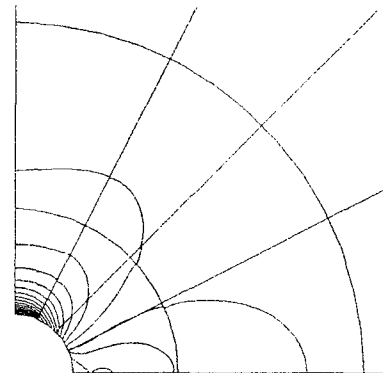
จาก 2.64 เหลือ 1.74 หรือลดลง 33.8 เปอร์เซ็นต์สำหรับการวิเคราะห์ที่ p เท่ากับสี่ นอกจากนี้ยังพบว่าค่าความเค้น von Mises ของรูปร่างออฟทิมิซมีค่าใกล้เคียงกันที่อันดับ p เท่ากับสี่ถึงแปดทั้งนี้เพราะว่าการวิเคราะห์ค่าความเค้นภายในชิ้นงานของแต่ละอันดับ p มีความถูกต้องเหมือนกัน

ตารางที่ 1 การออฟทิมิซเซชันรูปร่างที่อันดับ $p = 4$ ถึง 8

อันดับ p	รอบการ คำนวณ (รอบ)	ความเค้น von Mises (MPa)		ความเค้น von Mises ที่ $p = 8$ (MPa)
		ก่อนการ วิเคราะห์	ที่จุด ออฟทิมิซ	
4	3	52.7	31.3	34.9
5	3	53.1	33.2	35.4
6	3	53.3	34.5	35.6
7	3	53.0	35.4	35.8
8	3	53.1	36.6	-

Stress values:

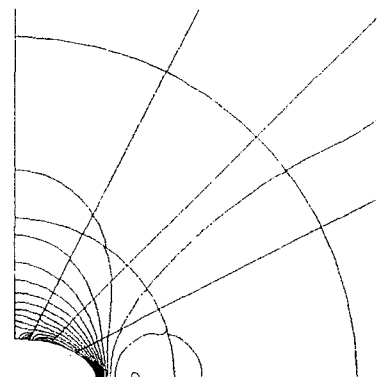
5.31149e+07
4.85313e+07
4.39478e+07
3.93642e+07
3.47807e+07
3.01571e+07
2.56136e+07
2.103e+07
1.64455e+07
1.18629e+07



(ก) ก่อนการวิเคราะห์

Stress values:

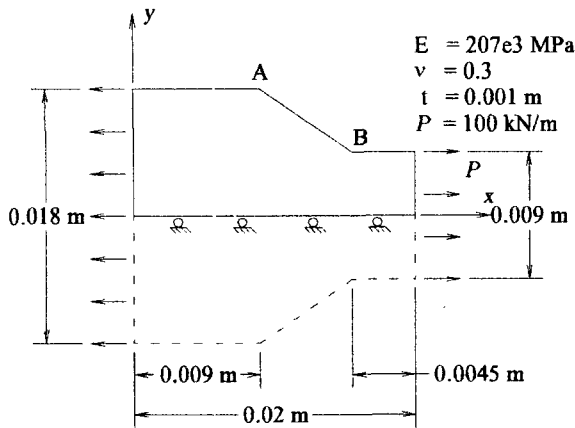
5.48719e+07
3.28115e+07
3.07512e+07
2.86909e+07
2.66306e+07
2.45702e+07
2.25099e+07
2.04496e+07
1.83893e+07
1.6329e+07



(ข) หลังการวิเคราะห์

รูปที่ 3 เส้นระดับความเค้นก่อนและหลังการวิเคราะห์ที่ $p=4$

6.2 การออฟทิมิเซชันขอบโค้งของแผ่นรับแรงดึงที่มีความกว้างหน้าตัดต่างกัน



รูปที่ 4 แผ่นรับแรงดึงที่มีความกว้างหน้าตัดต่างกัน

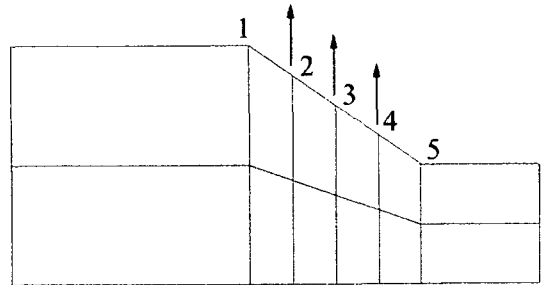
การออฟทิมิเซชันชิ้นงานตัวอย่างที่สองเป็นการออกแบบรูปร่างขอบโค้ง AB ของแผ่นรับแรงดึงที่มีความกว้างหน้าตัดต่างกัันดังแสดงในรูปที่ 4 โดยการออฟทิมิเซชันมีวัตถุประสงค์เช่นเดียวกับตัวอย่างแรกและใช้ค่าความเค้น von Mises บนขอบโค้งกำหนดเงื่อนไขคอนสเตรนท์และเพื่อกำหนดให้ความเค้นบนขอบโค้งไม่มากกว่าความเค้นที่เกิดขึ้นมากที่สุด ดังนั้นจึงกำหนดให้ความเค้นที่ตำแหน่งต่างๆ บนขอบโค้งมีค่าน้อยกว่าค่าความเค้น von Mises มากสุด รูปแบบสมการของฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขคอนสเตรนท์ตามสมการ (19) และ (20) คือ

$$F = (\sigma_{VM})_{\max} + \{\nabla(\sigma_{VM})_{\max}\}^T \{\Delta x\} \rightarrow \min \quad (23)$$

$$g_j = (\sigma_{VM})_j + \{\nabla(\sigma_{VM})_j\}^T \{\Delta x\} \leq (\sigma_{VM})_{\max} \quad (24)$$

ในการวิเคราะห์ชิ้นงานจะเลือกวิเคราะห์เพียงครั้งหนึ่งของชิ้นงานและแบ่งชิ้นงานออกเป็น 12 เอลิเมนต์โดยที่ขอบโค้งของชิ้นงานแสดงด้วยเส้นขอบเบซิเอร์และบี-สไปไรลจากจุดควบคุมจำนวน 5 จุดและใช้การเคลื่อนที่ของจุดควบคุมเหล่านี้เป็นตัวแปรออกแบบดังแสดงในรูปที่ 5 โดยกำหนดให้จุดควบคุมจุดแรกและจุดสุดท้ายไม่มีการเคลื่อนที่ ดังนั้นตัวแปรออกแบบที่ใช้มี 3 ตัวแปร ได้แก่ การเคลื่อนที่ของจุดควบคุม 2, 3 และ 4 ตามลำดับ สำหรับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์เลือกใช้ออฟทิมิเซชันด้วยอันดับ p ตั้งแต่สี่ถึงแปด และหลังจากการออฟทิมิเซชันในแต่ละอันดับ p จะนำรูปร่างสุด

ท้ายมาทำการวิเคราะห์ใหม่ด้วยอันดับ p เท่ากับแปดเช่นเดียวกับตัวอย่างแรก

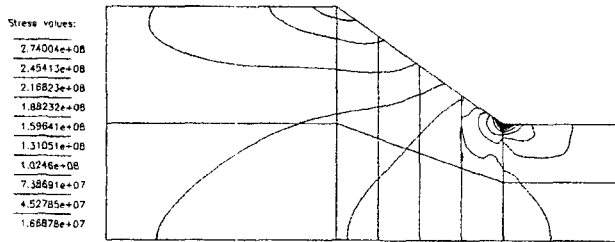


รูปที่ 5 รูปแบบเอลิเมนต์และตัวแปรออกแบบ

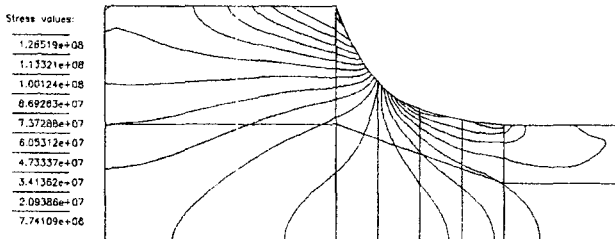
ค่าความเค้น von Mises ของรูปร่างออฟทิมิเซชันที่อันดับ p เท่ากับสี่ถึงแปดแสดงดังตารางที่ 2 พบว่าการวิเคราะห์ด้วยอันดับ p เท่ากับหกถึงแปดจะให้รูปร่างที่ให้ความเค้น von Mises ต่ำที่สุดโดยค่าความเค้นหนาแน่นลดลงจาก 2.74 เหลือ 1.27 หรือลดลง 53.8 เปอร์เซ็นต์สำหรับการวิเคราะห์ที่อันดับ p เท่ากับแปด ภาพแสดงเส้นระดับความเค้นของชิ้นงานก่อนการวิเคราะห์และหลังการวิเคราะห์ที่อันดับ p เท่ากับแปดแสดงดังรูปที่ 6 ซึ่งพบว่าการกระจายของความเค้นก่อนการวิเคราะห์จะหนาแน่นบริเวณจุดหักของขอบที่มุมล่างดังรูปที่ 6(ก) ซึ่งหลังจากการวิเคราะห์พบว่าการกระจายความเค้นมีค่าสม่ำเสมอมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 6(ข) และการลดลงของค่าความเค้นที่อันดับ p เท่ากับสี่ถึงแปดพบว่าอันดับของ p ที่ใช้วิเคราะห์ชิ้นงานมีผลต่อความเค้นสูงสุดของรูปร่างออฟทิมิเซชัน นั่นคือที่การวิเคราะห์ที่อันดับ p สูงขึ้นจะให้รูปร่างออฟทิมิเซชันที่มีค่าความเค้น von Mises ต่ำลง

ตารางที่ 2 การออฟทิมิเซชันรูปร่างที่อันดับ $p = 4$ ถึง 8

อันดับ p	รอบการคำนวณ (รอบ)	ความเค้น von Mises (MPa)		ความเค้น von Mises ที่ $p = 8$ (MPa)
		ก่อนการวิเคราะห์	ที่จุดออฟทิมิเซชัน	
4	6	192.4	135.8	137.4
5	6	214.9	135.4	135.4
6	6	236.3	127.9	127.7
7	5	255.8	127.1	126.6
8	5	274.0	126.5	-



(ก) ก่อนการวิเคราะห์



(ข) หลังการวิเคราะห์

รูปที่ 6 เส้นระดับความเค้นก่อนและหลังการวิเคราะห์ที่ $p=8$

7. สรุป

การศึกษาได้ทำการทดสอบการออฟทีไมซ์เซชันรูปร่างโดยใช้เส้นขอบเบซิเอร์และบี-สไปน์แสดงขอบโค้งของชิ้นงานร่วมกับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ p เวอร์ชัน โดยมีวัตถุประสงค์ของการออฟทีไมซ์เซชันรูปร่างคือ การลดความเค้น von Mises มากสุดที่เกิดขึ้นภายในชิ้นงานและมีเงื่อนไขคอนสเตรนส์คือค่าความเค้นบนขอบโค้งที่ทำการออกแบบ การศึกษาได้ทดสอบการออฟทีไมซ์เซชันกับตัวอย่างการวิเคราะห์ชิ้นงานจำนวนสองตัวอย่าง ได้แก่ การออฟทีไมซ์เซชันขอบโค้งของรูของแผ่นกว้างเจาะรูรับแรงดึงด้านข้างในแนวแกนและการออฟทีไมซ์เซชันขอบโค้งของแผ่นรับแรงดึงที่มีความกว้างหน้าตัดต่างกัน ผลลัพธ์พบว่าลักษณะขอบโค้งของชิ้นงานตัวอย่างทั้งสองสามารถลดค่าความเค้น von Mises ภายในชิ้นงานได้และมีค่าความเค้นด้านสูงที่กระจายสม่ำเสมอ โดยการลดลงของความเค้นหนาแน่นขึ้นอยู่กับการรูปร่างของโจทย์ปัญหาเริ่มต้นดังตัวอย่างแรกซึ่งพบว่าความหนาแน่นลดลงเพียง 33.8 เปอร์เซ็นต์ สำหรับตัวอย่างสองความหนาแน่นลดลงมากถึง 53.8 เปอร์เซ็นต์ ทั้งนี้เนื่องจากชิ้นงานวิเคราะห์เริ่มต้นมีจุดหักมุมซึ่งค่าความเค้นหนาแน่นที่ตำแหน่งหักมุมจะมีค่าสูง นอกจากนี้ยังพบว่าอันดับ p ที่ใช้วิเคราะห์ค่าความเค้นภายในชิ้นงานมีผลต่อรูปร่างออฟทีไมซ์ นั่นคือ การวิเคราะห์ด้วยอันดับ p สูงขึ้นจะให้รูปร่างที่มีค่าความเค้น von Mises สู่เข้าสู่ค่าตอบมากยิ่งขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้แต่งคนแรกขอขอบคุณทบวงมหาวิทยาลัยที่ให้ทุนการศึกษาตามโครงการส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษเป็นอาจารย์ในสถานศึกษาของรัฐโดยมีมหาวิทยาลัยบูรพาเป็นต้นสังกัด

เอกสารอ้างอิง

- [1] A. Promwungkwa, "Data Structure and Error Estimation for an Adaptive p -Version Finite Element Method in 2-D and 3-D Solids", Ph. D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [2] R.R. Salagame and A.D. Belegundu, "A Simple p -Adaptive Refinement Procedure for Structural Shape Optimization", *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 24, 1997, pp.133-155.
- [3] S.G. Nash and A. Sofer, "Linear and Nonlinear Programming", McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1996.
- [4] D. Hearn and M.P. Baker, "Computer Graphics", Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [5] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Problems", McGraw-Hill Book Company Europe, 1994.
- [6] C.E. Knight, "The Finite Element Method in Mechanical Design", PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.
- [7] B. Szabó and I. Babuška, "Finite Element Analysis" John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [8] Y.K. Shyy, C. Fleury and K. Izadpanah, "Shape Optimal Design using High-order Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, 1988, pp.99-116.
- [9] D. Yunliang, "Shape Optimization of Structures, A literature survey", *Computers & Structures*, Vol. 24, 1986, pp.985-1004.
- [10] O.C. Zienkiewicz and J.S. Campbell, "Optimization Structural Design", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973.