การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 14
2-3 พฤศจิกายน 2543 โรงแรม โนโวเทล เชียงใหม่

การแสดงภาพทางคอมพิวเตอร์ของการกระจายความเค้นที่คำนวณได้จากฟังก์ชันความเค้น

Computer Graphical Representation of Stress Distribution Calculated from Stress Function

ณัฏฐ์ กาศยปนันทน์ และ วิวัฒน์ คล่องพานิช
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
เชียงใหม่ 50200
โทร 053-944144, โทรสาร 053-944145, E-Mail : nat_kasa@hotmail.com

Nat Kasayapanand and Wiwat Klongpanich
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chiang Mai University
Chiang Mai 50200, Thailand
Tel : 6653-944144, Fax : 6653-944145

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือ การนำฟังก์ชันความเค้นของแอรีมาหาค่าความเค้นและความเครียด และแสดงภาพการกระจายความเค้นและการกระจายความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทางและเอกพันธ์ การรับแรงอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น โดยไม่คิดถึงผลของความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิและแรงที่เกิดจากตัววัสดุ การวิเคราะห์จะพิจารณาปัญหาแบบสองมิติ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยทำการเขียนโปรแกรมลงในโปรแกรม Mathematica 3.0 จากนั้นจึงทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยการทดลองใช้โปรแกรมกับปัญหาที่มีคำตอบชัดเจนถูกต้องและเป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป ผลที่ได้พบว่าค่าความเค้นมีค่าสอดคล้องกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีของฟังก์ชันความเค้น ในการหาค่าความเค้นสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์พบว่า ค่าความผิดพลาดมีค่าไม่เกิน $\pm$ 0.1 % ในการนำโปรแกรมนี้ไปใช้งานจะต้องเลือกฟังก์ชันความเค้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบของแต่ละปัญหา โดยสามารถตรวจสอบความถูกต้องกับความเค้นที่ขอบซึ่งได้มาจากผลการทำงานของโปรแกรมกับปัญหานั้น ๆ จากวิธีการดังกล่าวสามารถนำโปรแกรมนี้ไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนต่อไป

ABSTRACT

The objectives of this study are determining stress and strain in loaded materials by using Airy's stress function and displaying graphical distributions of stress and strain. The physical properties of the materials used in this analysis must be homogeneous and isotropic. The applied load is in elastic limit and neglecting body force and thermal stress. This research has been studied in two categories of two-dimensional problem on rectangular and polar coordinates, and written on Mathematica 3.0 program for windows. The written program had been carried out with the simple problems.

which have exactly results. It was found that the results from this program had good agreement with the theoretical values. The maximum and minimum stress values in Fourier series cases had error within ± 0.1 %. For application of the program, user must choose stress function that satisfies boundary conditions. We can check accuracy of each problem by compare with the stresses at all boundaries that obtained from the program. From this method, we can use this program for analyses more complicated problems in the future applications.

1. บทนำ

ในการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติสำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elasticity) แบบเอกพันธ์ (Homogeneous) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทาง (Isotropic) โดยไม่คิดผลของความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal Stresses) โดยส่วนมากคำตอบได้มาจากการประมาณค่า (Approximate Solutions) แต่สำหรับปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อน การหาคำตอบที่แท้จริง (Exact Solutions) จะทำให้ทราบค่าที่ถูกต้องซึ่งช่วยลดค่าความปลอดภัย (Safety Factor) และค่าใช้จ่ายในการออกแบบวัสดุเพื่อการใช้งาน การหาคำตอบที่แท้จริงโดยการนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการทำงานจะช่วยเพิ่มความสะดวกรวดเร็วและความถูกต้องในการคำนวณ รวมทั้งสามารถแสดงผลในลักษณะของรูปภาพ (Graphics) ซึ่งทำให้เกิดความชัดเจน โดยผลที่ได้จากการวิจัยจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาเพื่อให้ครอบคลุมปัญหาได้มากขึ้น

การหาคำตอบที่แท้จริงพบว่า เมื่อมีภาระมากระทำต่อวัสดุ ค่าความเค้น (Stress) ความเครียด (Strain) และการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุนั้นจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล (Equilibrium Equations) ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด (Strain Compatibility Relations) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-Strain Relations) และเงื่อนไขที่ขอบ (Boundary Conditions) พร้อม ๆ กัน วิธีหนึ่งที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวเริ่มต้นจากการหาค่าความเค้นในรูปของฟังก์ชันความเค้น (Stress Function) ซึ่งมีตัวคงที่ใด ๆ อยู่โดยที่ความเค้นที่คำนวณได้จากฟังก์ชันความเค้นนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียดและความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด แล้วทำการหาค่าคงที่ทั้งหมดในสมการฟังก์ชันความเค้นจากเงื่อนไขที่ขอบ จากนั้นจึงนำฟังก์ชันความเค้นไปวิเคราะห์ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุต่อไป

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฟังก์ชันความเค้น

พิจารณาปัญหาแบบสองมิติพบว่า เมื่อค่าความเค้น ความเครียด และการเปลี่ยนตำแหน่ง สอดคล้องกับสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด โดยไม่คิดผลของแรงภายในตัววัสดุ (Body Force) สมการขององค์ประกอบความเค้นจะต้องอยู่ในรูปของฟังก์ชันความเค้นของแอรี (Airy Stress Function) ตามสมการ [7]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} \qquad (1)$$

โดยที่ฟังก์ชันความเค้น Φ หาได้จากสมการไบฮาร์โมนิค (Biharmonic) [7]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (2)$$

2.2 การแก้ปัญหาสองมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

2.2.1 คำตอบในรูปอนุกรมฟังก์ชันพหุนาม

ค่าฟังก์ชันความเค้นจะอยู่ในรูป [2]

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \qquad (3)$$

โดย A_{mn} เป็นค่าคงที่และเมื่อกระจายเทอมของอนุกรมฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น p เมื่อ m+n = p กำหนดให้ $c_0, c_1, c_2, \ldots c_p$ หรือ c_i คือค่าคงที่ A_{mn} จากสมการ (3) จะได้

$$\Phi = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} y + c_2 x^{p-2} y^2 + \ldots + c_p y^p \qquad (4)$$

สำหรับฟังก์ชันความเค้นในรูปของอนุกรมฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น p เมื่อ $p \geq 4$ สมการไบฮาร์โมนิคจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ c_4, c_5, ... , c_p เป็นฟังก์ชันของ c_0, c_1, c_2 และ c_3 ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{p!}{(p-4)!}c_0+2\frac{2!\,(p-2)!}{0!\,(p-4)!}c_2+\frac{4!}{0!}c_4 = 0$$

$$\frac{(p-1)!}{(p-5)!}c_1+2\frac{3!\,(p-3)!}{1!\,(p-5)!}c_3+\frac{5!}{1!}c_5 = 0$$

.....

.....

.....

$$\frac{5!}{1!}c_{p-5}+2\frac{(p-3)!\,3!}{(p-5)!\,1!}c_{p-3}+\frac{(p-1)!}{(p-5)!}c_{p-1} = 0$$

$$\frac{4!}{0!}c_{p-4}+2\frac{(p-2)!\,2!}{(p-4)!\,0!}c_{p-2}+\frac{p!}{(p-4)!}c_p = 0 \quad (5)$$

ค่าคงที่ของสมการ (4) หาได้จากสมการ (5) และเงื่อนไขที่ขอบ คำตอบในรูปของอนุกรมฟังก์ชันพหุนามเป็นการรวมกันของอนุกรมฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น p ต่าง ๆ เมื่อ $p \geq 2$

2.2.2 คำตอบในรูปของอนุกรมฟูเรียร์

ค่าฟังก์ชันความเค้นจะอยู่ในรูป [2]

$$\Phi = e^{\alpha x}e^{\beta y} \quad (6)$$

หรือจะแสดงคำตอบทั่วไปของฟังก์ชันความเค้นในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions) โดยที่ α และ β เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ดังนี้

$$\begin{aligned}\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} [&(A_n \sinh\beta_n y + B_n \cosh\beta_n y + \\ &C_n\beta_n y\sinh\beta_n y + D_n\beta_n y\cosh\beta_n y)\sin\beta_n x + \\ &(A'_n \sinh\beta_n y + B'_n \cosh\beta_n y + \\ &C'_n\beta_n y\sinh\beta_n y + D'_n\beta_n y\cosh\beta_n y)\cos\beta_n x] \quad (7)\end{aligned}$$

เมื่อ A, B, C, D และ A′, B′, C′, D′ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบ คำตอบในรูปของอนุกรมฟูเรียร์จะใช้ในกรณีที่มีภาระความเค้นกระทำในลักษณะที่ไม่สม่ำเสมอหรือไม่ต่อเนื่อง

2.3 การแก้ปัญหาสองมิติในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในการแก้ปัญหาสองมิติบางกรณีใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วจะเหมาะสมกว่า ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนสมการต่าง ๆ จากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนมาเป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว จากความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียนกับพิกัดเชิงขั้ว

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad (8)$$

องค์ประกอบความเค้นในเทอมของฟังก์ชันความเค้นคือ [7]

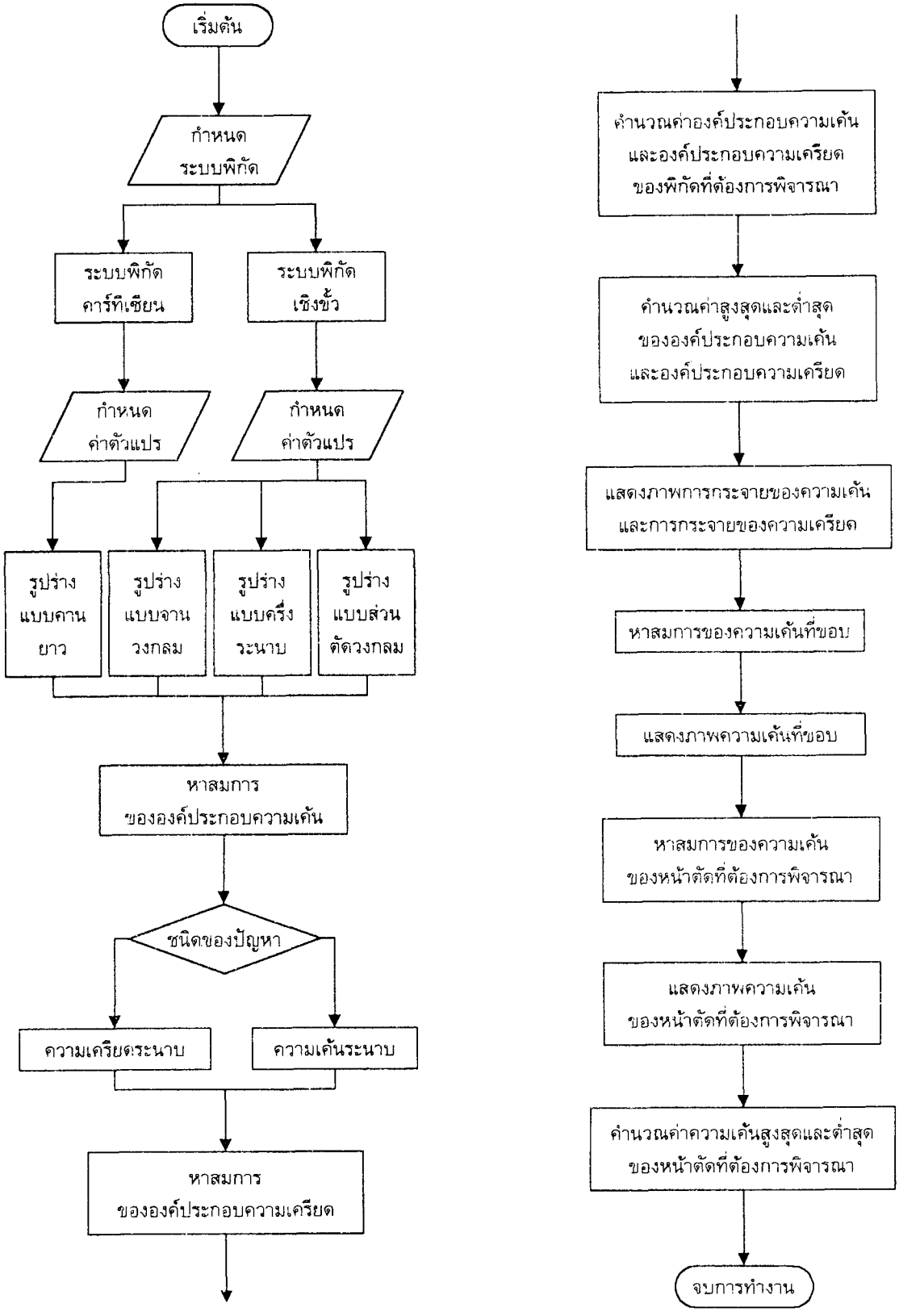
$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2},\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) \quad (9)$$

ได้สมการไบฮาร์โมนิคในรูปของพิกัดเชิงขั้วดังนี้ [7]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) = 0 \quad (10)$$

ฟังก์ชัน $\Phi(r,\theta)$ ที่เป็นคำตอบของสมการไบฮาร์โมนิคสามารถแสดงได้ในรูปของอนุกรมอนันต์ (Infinite Series) เมื่อ a, b, c, d และ a′, b′, c′, d′ เป็นค่าคงที่ดังนี้ [6]

$$\begin{aligned}\Phi = {} & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2\theta + a'_0\theta + \\ & \frac{a_1}{2} r\theta\sin\theta + (b_1 r^3 + a'_1 r^{-1} + b'_1 r\ln r)\cos\theta + \\ & \frac{c_1}{2} r\theta\cos\theta + (d_1 r^3 + c'_1 r^{-1} + d'_1 r\ln r)\sin\theta + \\ & \sum_{n=2}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{n+2} + a'_n r^{-n} + b'_n r^{-n+2})\cos(n\theta) + \\ & \sum_{n=2}^{\infty}(c_n r^n + d_n r^{n+2} + c'_n r^{-n} + d'_n r^{-n+2})\sin(n\theta) \quad (11)\end{aligned}$$



รูปที่ 1 แผนภาพการทำงานของโปรแกรม

3. วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 นำสมการของฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนามและอนุกรมฟูเรียร์ ซึ่งพิจารณาความเหมาะสมและความเป็นไปได้ทุก ๆ สมการมาเป็นฟังก์ชันความเค้นในสมการอนุพันธ์ควบคุมกลไก (Governing Differential Equation)

3.2 เขียนโปรแกรมลงในโปรแกรม Mathematica 3.0 ตามแผนภาพในรูปที่ 1

3.3 ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยป้อนข้อมูลค่าคงที่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบลงในสมการของฟังก์ชันความเค้นสำหรับกรณีวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นรับภาระ ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องเป็นที่ยอมรับทั่วไปแล้ว เช่น ในกรณี

3.3.1 ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

- คานยื่น (Cantilever Beam) รับภาระแรงกดเป็นจุดกระทำที่ปลายคาน

- คานอย่างง่าย (Simple Beam) รับภาระแรงกดที่ด้านบนของคาน โดยกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดความยาว

3.3.2 ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

- แผ่นจานวงกลม (Circular Disk) ที่มีรูอยู่ตรงกลาง รับความดันขนาดสม่ำเสมอกระจายตามขอบ

- แผ่นวัสดุความยาวไม่จำกัด (Infinite Large Plate) รูปสี่เหลี่ยม มีรูวงกลมขนาดเล็กอยู่ตรงกลาง รับแรงดึงอย่างสม่ำเสมอที่ขอบ

3.4 แก้ไขโปรแกรมให้มีความถูกต้องสมบูรณ์ที่สุด และปรับปรุงให้ผู้ใช้โปรแกรมสามารถใช้งานได้ง่ายและรวดเร็ว

3.5 จัดทำคู่มือการใช้โปรแกรม

4. ผลและการวิจารณ์

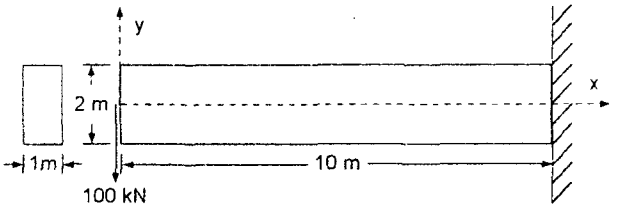
4.1 ผลการวิจัย

เมื่อเขียนโปรแกรมตามแผนภาพในรูปที่ 1 แล้ว จึงทำการทดสอบโปรแกรมดังแสดงตัวอย่างในหัวข้อ 4.2 โดยแสดงผลให้ดูเฉพาะในส่วนของการแสดงภาพการกระจายความเค้นเท่านั้น ทั้งนี้เพื่อตรวจสอบว่าสอดคล้องตามทฤษฎีหรือไม่ ลักษณะของภาพประกอบด้วย 3 ส่วนคือ ภาพการกระจายของ σ_{xx}, σ_{yy} และ τ_{xy} ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และภาพการกระจายของ σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ และ $\tau_{r\theta}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยในแต่ละส่วนจะเป็นภาพพื้นผิว 3 มิติในระบบพิกัด (x,y,z) โดยแกน x และ y อยู่ในแนวระดับใช้แสดงพิกัดที่จุดใด ๆ ในเนื้อวัสดุมีหน่วยเป็นเมตร แกน z แสดงค่าขององค์ประกอบความเค้นที่จุดนั้น ๆ มีหน่วยเป็น MPa

4.2 การทดสอบโปรแกรม

ในการทดสอบจะกำหนดให้วัสดุที่ใช้วิเคราะห์มีค่าคงที่ดังต่อไปนี้ $E=200\times10^3$ MPa, $G=77\times10^3$ MPa, $\nu=0.3$

ตัวอย่างการทดสอบ : คานยื่นยาว 10 m หน้าตัด 1 x 2 m รับภาระ 100 kN กระทำขนานกับหน้าตัดที่ปลายคานตามรูปที่ 2 เมื่อพิจารณาเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของคานได้สมการของฟังก์ชันความเค้น $\Phi = -75xy + 25xy^3$ kN



รูปที่ 2 การรับภาระของคานยื่น

เงื่อนไขที่ด้านบนและด้านล่างของคาน

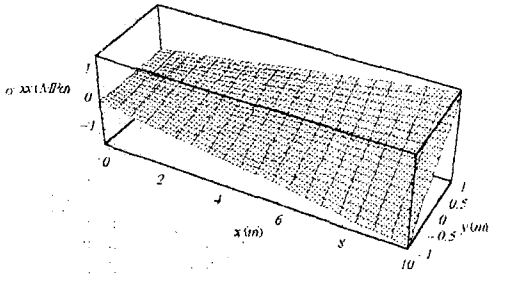
$y=1m$; $\tau_{xy}=0$, $\sigma_{yy}=0$

$y=-1m$; $\tau_{xy}=0$, $\sigma_{yy}=0$

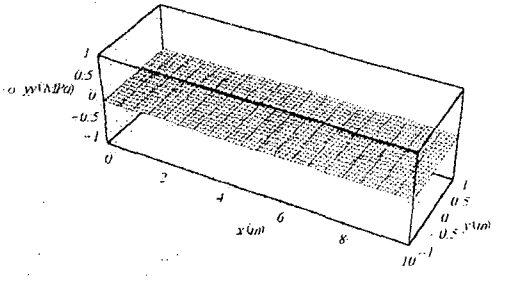
เงื่อนไขที่ปลายคานทั้งสองด้าน

$$x=0;\ \int_{-1}^{1}\tau_{xy}dy=100kN,\ \int_{-1}^{1}\sigma_{xx}dy=0,\ \int_{-1}^{1}\sigma_{xx}ydy=0$$

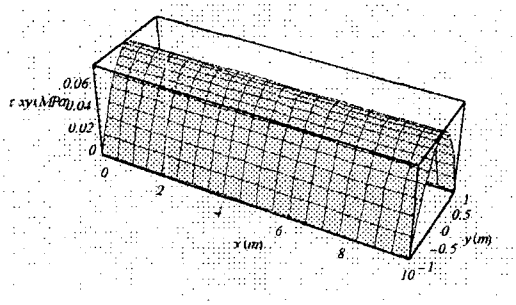
$$x=10m;\ \int_{-1}^{1}\tau_{xy}dy=100kN,\ \int_{-1}^{1}\sigma_{xx}dy=0,\ \int_{-1}^{1}\sigma_{xx}ydy=1000kN\cdot m$$



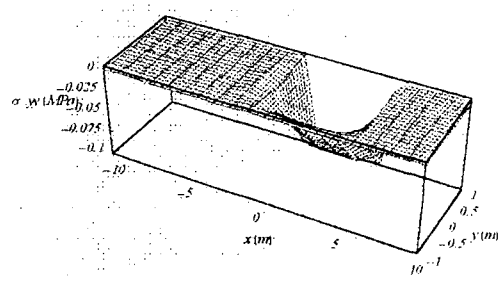
(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน



(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y

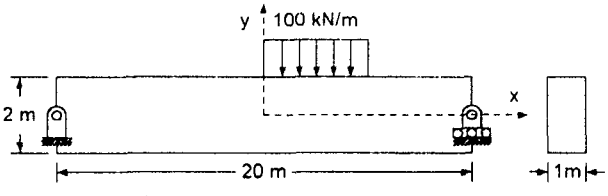
รูปที่ 3 ภาพการกระจายความเค้นของรูปที่ 2

เมื่อป้อนข้อมูลลงในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 3 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 3(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ y>0 และมีค่าเป็นลบเมื่อ y<0 โดยมีค่าสูงสุดที่ x=10m, y=±1m เท่ากับ ±1 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ x=0 รูปที่ 3(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_{yy} ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ และรูปที่ 3(ค) เป็นภาพการกระจายของ τ_{xy} ซึ่งมีค่าสม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน โดยมีค่าสูงสุดที่ y=0 เท่ากับ 0.075 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ y=±1m

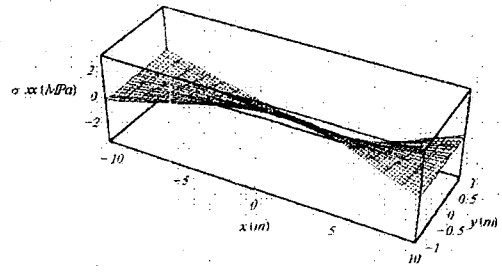
4.3 ตัวอย่างภาพความเค้นจากกรณีอื่น ๆ

เราสามารถนำโปรแกรมนี้ไปใช้วิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในวัสดุ โดยรับภาระในรูปแบบใด ๆ ก็ได้เช่น

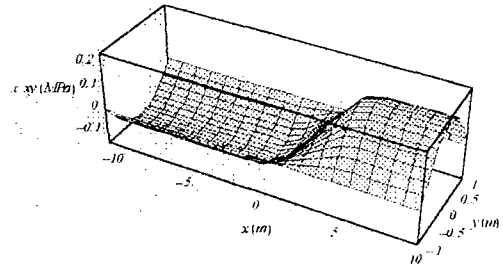
4.3.1 ตัวอย่างที่ 1 การรับภาระอย่างสม่ำเสมอขนาด 100 kN/m ที่ด้านบนของคานอย่างง่าย ในช่วง $0 \le x \le 5$m



รูปที่ 4 การรับภาระของคานอย่างง่าย



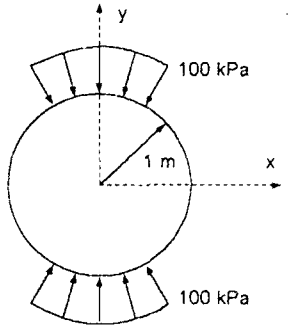
(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



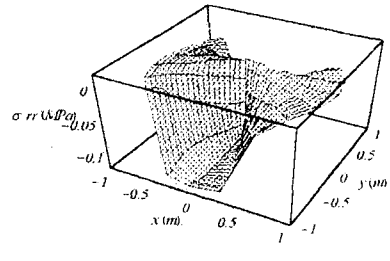
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 5 การกระจายความเค้นของรูปที่ 4

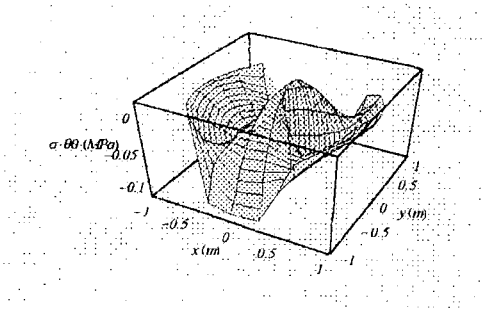
4.3.2 ตัวอย่างที่ 2 การรับแรงดันอย่างสม่ำเสมอขนาด 100 kPa กระทำที่ขอบของแผ่นจานวงกลมตัน ในช่วง $\pi/3 \le \theta \le 2\pi/3$ และ $4\pi/3 \le \theta \le 5\pi/3$



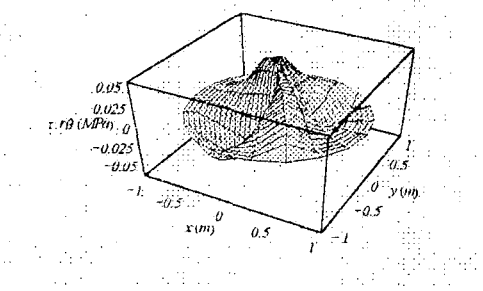
รูปที่ 6 การรับภาระของแผ่นจานวงกลม



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r



(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ



(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 7 การกระจายความเค้นของของรูปที่ 6

5. สรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุป

5.1.1 จากการทดสอบของโปรแกรมกับปัญหาที่มีคำตอบชัดเจนและเป็นที่ยอมรับโดยทั่วไปพบว่าสอดคล้องกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎี

5.1.2 การใช้ฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนามควรจะใช้จนถึงระดับขั้นที่ทำให้ค่าความเค้นที่คำนวณได้มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงมากนักหรือเรียกว่าการลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งโปรแกรมจะทำการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ที่เหลือในสมการพหุนามของแต่ละระดับขั้น เพื่อให้สอดคล้องกับสมการไบฮาร์โมนิค

5.1.3 โดยปกติในการทำงานของโปรแกรมแต่ละครั้ง จะใช้เวลาในการประมวลผลทั้งหมดไม่เกิน 5 วินาทีเมื่อใช้กับเครื่อง pentium III ความเร็ว 450 MHz หน่วยความจำ 64 MB ยกเว้นในกรณีที่สมการของฟังก์ชันความเค้นมีความซับซ้อนมาก ๆ หรืออยู่ในรูปของผลบวกที่มีเทอมของผลบวกมาก ๆ เวลาในการประมวลผลจะมีค่าเพิ่มขึ้น

5.1.4 ในการหาค่าความเค้นและความเครียดที่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดของวัสดุ เมื่อฟังก์ชันความเค้นอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์พบว่า ค่าความผิดพลาดมีค่าไม่เกิน $\pm$ 0.1 %

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 การวิเคราะห์ความเค้นและความเครียดโดยใช้ฟังก์ชันความเค้นชนิดอื่น ๆ เป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป

5.2.2 งานวิจัยนี้นี้แสดงเฉพาะเงื่อนไขที่ขอบแบบความเค้นเท่านั้นซึ่งยังไม่ครอบคลุมปัญหาทั้งหมด ดังนั้นจึงควรมีการพัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์เงื่อนไขที่ขอบแบบการเปลี่ยนตำแหน่งและแบบผสมเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้มากยิ่งขึ้น หรือพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันความเค้นในสามมิติ

6. เอกสารอ้างอิง

[1] Kreyzig, E., 1993., Advanced Engineering Mathematics, 7th ed., John Wiley & Sons, New York.

[2] Little, R. W., 1973., Elasticity, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[3] Marsden, J. E., and Hughes, T. J. R., 1983., Mathematical Foundation of Elasticity, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[4] Mase, G. E., 1970., Continuum Mechanic, McGraw-Hill, New York.

[5] Saada, A. S., 1974., Elasticity, Pergamon, New York.

[6] Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., 1970., Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.

[7] Ugural, A. C., and Fenster, S. K., 1995., Advanced Strength and Applied Elasticty, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.