

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 14
2-3 พฤศจิกายน 2543 โรงแรม โนโวเทล เชียงใหม่

การออกแบบตัวควบคุม PID ที่เหมาะที่สุด ด้วยเงื่อนไขบังคับในการวางตำแหน่งโพล

Optimal PID Controller Design with Pole Placement Constraints

อดิรักษ์ กาญจนหฤทัย

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250

โทร (662) 321-6930-9 ต่อ 212, 213 โทรสาร (662) 321-4444 E-mail : adkancha@hotmail.com

Adirak Kanchanaharuthai

Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University

Pattanakarn Road, Suan Luang District, Bangkok 10250, Thailand

Tel : (662) 321-6930-9 Ext. 212, 213, Fax : (662) 321-4444.

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการออกแบบตัวควบคุม PID ที่พิจารณาทั้งของเงื่อนไขในการวางตำแหน่งโพลและความสัมพันธ์ระหว่างตัวควบคุมดังกล่าวกับทฤษฎีกำลังสองเชิงเส้น (Linear Quadratic Theory: LQ Theory) โดยการศึกษาเริ่มจากการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวควบคุม PID ที่เหมาะที่สุดกับการควบคุมป้อนกลับสถานะเชิงปริพันธ์ (Integral state-feedback control) และเงื่อนไขบังคับในการวางตำแหน่งโพล จากนั้นทำการเปลี่ยนเงื่อนไขทั้งสองไปสู่เงื่อนไขบังคับของสมการเมตริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequality: LMI) และนำผลเฉลยที่ได้จากเงื่อนไขบังคับ LMI ไปทำการออกแบบตัวควบคุมซึ่งให้ผลที่สะดวกและง่ายยิ่งขึ้นกว่าเดิม โดยไม่จำเป็นต้องทดสอบการปรับแต่งค่าจากการทดลอง นอกจากนี้ตัวควบคุม PID ยังสามารถเลือกกำหนดผลสนองเชิงเวลาได้ตามต้องการและสามารถพัฒนาการออกแบบตัวควบคุม PID ให้มีความคงทนต่อความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์โดยใช้เทคนิคของ LMI ได้ต่อไป

Abstract

The purpose of this research is to investigate the Proportional-Integral-Derivative (PID) controller design that considers both the pole placement constraints and the relation between this controller and linear quadratic (LQ) theory. The investigation starts from the relation formulation between the optimal PID controller design and the integral state-feedback control to the pole placement constraints. Then, both constraints are converted in the Linear Matrix Inequality (LMI) constraints whose solution can be used for the controller design. Those results give the good performance, compared to the old methods, and unnecessary to test experimental tuning. Moreover, this controller can be set the desired time response and developed continuously to increase the endurance for parameter uncertainty, based on LMI technique.

คำสำคัญ: ตัวควบคุม PID/ทฤษฎีกำลังสองเชิงเส้น/การวางตำแหน่งโพล/สมการเมตริกซ์เชิงเส้น

Keywords: PID controller/LQ theory/Pole placement/Linear Matrix Inequality

2. บทนำ

ตัวควบคุม PID เป็นที่นิยมใช้งานกันอย่างแพร่หลายในระบบควบคุมกระบวนการทางอุตสาหกรรม เนื่องจากมีโครงสร้างที่ง่ายและเป็นที่นิยมใช้กันมากกว่าตัวควบคุมอื่นที่ได้จากการออกแบบที่ซับซ้อน แต่การควบคุมที่ใช้ตัวควบคุม PID ที่ได้ไม่สามารถเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดในทางดัชนีสมรรถนะ (performance index) และผลตอบสนองเชิงเวลาตามที่ต้องการได้ ปัจจุบันการออกแบบตัวควบคุมนั้นมักใช้การปรับแต่งตามหลักเกณฑ์ของ Ziegler-Nichols [5] ที่มีประโยชน์มากและใช้ได้ดีในทางปฏิบัติซึ่งอาศัยผลตอบสนองชั่วครู่ (transient response) ของระบบที่ได้จากการหรือจากประสบการณ์ของผู้ปฏิบัติงานเองโดยไม่สามารถเลือกผลตอบสนองในเชิงเวลา (time domain response) ตำแหน่งโพลวงรอบปิด (closed-loop poles) และรับประกันค่าของดัชนีสมรรถนะ (performance index) ของระบบที่ต้องการได้

งานวิจัยนี้ศึกษาการออกแบบตัวควบคุม PID ที่มีการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการออกแบบป้อนกลับที่เหมาะสมที่สุดเพื่อรับประกันผลของดัชนีสมรรถนะของระบบและการกำหนดตำแหน่งที่รับประกันผลของผลตอบสนองในเชิงเวลาตามที่ต้องการ

วัตถุประสงค์ของการศึกษานี้เพื่อให้ได้ผลของเงื่อนไขการวางตำแหน่งโพลและความสัมพันธ์ระหว่างตัวควบคุมดังกล่าวกับทฤษฎีกำลังสองเชิงเส้น โดยขยายขอบเขตต่อจากหลักเกณฑ์การปรับแต่งของ [4] และ [5] ซึ่งจะใช้เทคนิคของสมการเมตริกซ์เชิงเส้น (LMIs) ในการออกแบบตัวควบคุม PID การศึกษากระทำโดยสร้างความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของตัวควบคุมของ PID กับการออกแบบป้อนกลับที่เหมาะสมที่สุดในรูปของค่าผิดพลาดในการติดตาม (tracking error) กับการป้อนกลับสถานะเชิงปริพันธ์ (integral state feedback) และการสร้างเงื่อนไขในการวางตำแหน่งโพลเพื่อให้ได้ผลตอบสนองตามต้องการ

3. โครงสร้างของตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุด

จุดมุ่งหมายในการควบคุมกระบวนการเป็นการบังคับตัวแปรที่ต้องการควบคุมให้เป็นไปตามค่าที่ต้องการ (desired set-point value) แม้ว่าจะมีผลของความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์และผลของสิ่งรบกวน ดังนั้นการพิจารณาโครงสร้างของตัวควบคุม PID จะถูกสร้างขึ้นโดยอาศัยคุณสมบัติของการของความคลาดเคลื่อนในการติดตาม (tracking error)

และการควบคุมสถานะเชิงปริพันธ์ (integral state) ซึ่งเราสามารถหาได้จาก [4] การพิจารณาจะเริ่มจากระบบสเกลาร์ (scalar system) ดังต่อไปนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi + bu \\ y &= \xi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

โดย $y^0 = \xi^0$ แทนด้วยค่าอ้างอิง (reference value) ถ้าระบบสามารถติดตามค่าที่กำหนดได้ ก็สามารถแทนค่าความคลาดเคลื่อนได้ดังนี้ $e = \xi - \xi^0$ และเมื่อกำหนดให้ตัวแปรสถานะแต่งเติม x (augmented state) เป็นดังนี้

$$x = \begin{pmatrix} e & \dot{e} \end{pmatrix}^T \quad (2)$$

ดังนั้นระบบแต่งเติม (augmented system) จะได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_2 + bu \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

และกฎการควบคุม (control law) อยู่ในรูปของสมการต่อไปนี้

$$v = -f_1 e - f_2 \dot{e}, v = \dot{u} \quad (4)$$

ฟังก์ชันค่า (cost functional) ที่ต้องการให้น้อยที่สุดคือ

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + R v^2) d\sigma \quad (5)$$

เมื่อหาผลเฉลยจากสมการริคคาตีเมตริกซ์ (Matrix Riccati Equation) โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการที่ 3 และ 5 จะได้ดังสมการที่ 6

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (6)$$

และเมื่อกำจัดตัวแปร v จะได้กฎการควบคุมดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1}B^T Px \\ &= -f_1 \int_0^\infty e(\sigma) d\sigma - f_2 e(t) \end{aligned} \quad (7)$$

จะเห็นว่าสมการที่ 7 ประกอบด้วยตัวควบคุม PI ดังนั้นเพื่อให้ได้โครงสร้างของตัวควบคุม PID จะทำการขยายผลของวิธีการของค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้ระบบอันดับสอง (second-order system) และจัดให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติที่สามารถควบคุมได้ (canonical controllable form) ดังต่อไปนี้

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ซึ่งจะนำไปสู่การเพิ่มเติมในตัวแปรสถานะแต่เดิมดังสมการต่อไปนี

$$x = \begin{pmatrix} e & \dot{e} & \ddot{e} \end{pmatrix}^T \quad (9)$$

และระบบแต่เดิมใหม่ดังในสมการที่ 10

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (10)$$

โดย v ยังมีความสัมพันธ์กับ u เหมือนในสมการที่ 4 ดังนั้นเมื่อทำการหาค่าน้อยที่สุดของสมการที่ 5 และกำจัดตัวแปรตัวแปร v จะได้กฎการควบคุมในโครงสร้างของ PID ดังนี้

$$u(t) = -f_1 \int_0^\infty e(\sigma) d\sigma - f_2 e(t) - f_3 \dot{e}(t) \quad (11)$$

จากวิธีการของความคลาดเคลื่อนในการติดตามสามารถนำมาสร้างตัวควบคุม PID โดยการจัดรูปให้อยู่ในรูปของความคลาดเคลื่อนในการติดตามดังในสมการที่ 9 และ 10 ตามลำดับ แต่วิธีการดังกล่าวมีข้อจำกัดที่ต้องจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติที่สามารถควบคุมได้และต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้ $y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) x$ เสมอ ดังจะเห็นได้สมการที่ 9 และ 10

ดังนั้นเพื่อให้เกิดความสะดวกในการออกแบบจะใช้คุณสมบัติของวิธีการสถานะเชิงปริพันธ์ของตัวแปรสัญญาณออกที่ต้องการควบคุมมาช่วยในการพิจารณา โดยกำหนดให้

$$\dot{q} = y \quad (12)$$

และใช้ทฤษฎีกำลังสองเชิงเส้น (linear-quadratic theory) ในการสร้างระบบแต่เดิมที่ประกอบด้วยตัวแปรสถานะต่อไปนี้ $\xi = (x \ q)^T$ และการหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันค่าต่อไปนี้

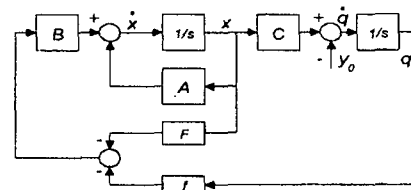
$$J = \int_0^\infty (y^T \Gamma y + \lambda q^2 + Ru^2) d\sigma \quad (13)$$

กำหนดให้ $y = Cx$ และ $\Gamma = C^T Q C$ โดยค่า Q, R และ λ เป็นเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักที่มีขนาดมิติที่เหมาะสม และจากสมการที่ 13 จะเห็นได้ว่าพจน์แรกจะเป็นการบังคับให้ค่าของสัญญาณออก y เข้าสู่ศูนย์ พจน์ที่สองเป็นการบังคับให้ส่วนของตัวแปรสถานะเชิงปริพันธ์ q และพจน์สุดท้ายเป็นการจำกัดขนาดของสัญญาณเข้า ดังนั้นผลเฉลยของสมการรีค-

คาติที่มีความสัมพันธ์ต่อระบบแต่เดิมและฟังก์ชันค่าในสมการที่ 12 และ 13 จะได้กฎการควบคุมในสมการที่ 14

$$u(t) = -R^{-1} B^T P x = -F x - f q \quad (14)$$

จากสมการที่ 12 ถึง 14 สามารถนำมาสร้างได้ดังรูปที่ 1 ซึ่งแสดงถึงระบบเชิงเส้นที่ประกอบด้วยการป้อนกลับของตัวแปรสถานะและตัวแปรสถานะเชิงปริพันธ์



รูปที่ 1 ระบบเชิงเส้นที่ประกอบด้วยการป้อนกลับของตัวแปรสถานะและตัวแปรสถานะเชิงปริพันธ์

ดังนั้นจากรูปที่ 1 ระบบวงรอบปิด (closed-loop system) สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (15)$$

$$y = Cx \quad (16)$$

$$\dot{q} = y - y^0 \quad (17)$$

$$u = -Fx - f q \quad (18)$$

และเมื่อแทนสมการที่ 16 และ 18 ในสมการที่ 15 และ 17 จะได้พลวัตของระบบโดยรวมดังสมการที่ 19 และ 20 ตามลำดับ

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BF & -Bf \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} y^0 \quad (19)$$

$$y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ q \end{pmatrix} \quad (20)$$

ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมตัวแปรสถานะป้อนกลับที่มีโครงสร้างของ PID จะใช้วิธีการควบคุมเชิงปริพันธ์ (integral control) ซึ่งมีความสมมูลกับวิธีการของความคลาดเคลื่อนในการติดตามซึ่งรายละเอียดสามารถหาได้จาก [4] และตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุดสามารถหาได้จากสมการที่ 6 และ 14

4. การออกแบบตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุดด้วยอสมการเมตริกซ์เชิงเส้น (LMIs)

พิจารณาระบบดังต่อไปนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (21)$$

โดยกำหนดให้ u แทนด้วยสัญญาณเข้าและ K แทนด้วย อัตราขยายป้อนกลับสถานะ (state feedback gain) โดยมี ความสัมพันธ์ระหว่าง u และ K ดังนี้คือ $u = -Kx$ และ ต้องการหาค่าที่น้อยที่สุดฟังก์ชันค่าที่พิจารณาดังต่อไปนี้

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (22)$$

โดยที่ค่า Q และ R เป็นค่าบวกแน่นอน (positive definite) และเมื่อแทนค่า u ลงในสมการที่ 22 จะได้ดังสมการที่ 23

$$J = \int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x dt \quad (23)$$

จากสมการที่ 23 เราสามารถนำเสนอเงื่อนไขบังคับของ LMIs ได้ดังนี้ กำหนดให้ฟังก์ชันลิยาปูนอฟกำลังสอง (Quadratic Lyapunov function) $x^T P x$ โดย $P = P^T > 0$ ซึ่งนำมา สร้างความสัมพันธ์กับฟังก์ชันค่าในสมการที่ 23 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^T(t) P x(t)) \\ \leq -x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) \end{aligned} \quad (24)$$

สำหรับทุก ๆ ค่า t (ยกเว้นที่เวลาที่มีการสวิตช์) และเมื่อ อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการจากเวลาที่ศูนย์ถึงเวลาที่มี ค่าเป็นอนันต์ จะได้

$$\begin{aligned} x^T(\infty) P x(\infty) - x^T(0) P x(0) \\ \leq - \int_0^\infty x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt \end{aligned} \quad (25)$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} J = \int_0^\infty x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt \\ \leq x_0^T P x_0, x^T(\infty) P x(\infty) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (26)$$

จากสมการที่ 24 จะได้

$$\frac{d}{dt}(x^T(t) P x(t)) = x^T(t) (A^T P + P A) x(t) \quad (27)$$

สมการที่ 22 สามารถแสดงถึงความสมมูลได้ดังต่อไปนี้

$$A^T P + P A + Q + K^T R K \leq 0 \quad (28)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $u = -Kx$ ลงในสมการที่ 21 จะได้ดังนี้

$$\dot{x} = A_{cl} x = (A - BK) x, \quad x(0) = x_0 \quad (29)$$

และแทนเมตริกซ์ $(A - BK)$ ในสมการที่ 29 ลงในเมตริกซ์ A ของสมการที่ 28 จะได้

$$\begin{aligned} (A - BK)^T P + P(A - BK) \\ + Q + K^T R K \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

จากสมการที่ 30 จะเห็นได้ว่ามีตัวแปรเมตริกซ์อัตราขยาย ป้อนกลับสถานะ K และเมตริกซ์ลิยาปูนอฟ P ซึ่งทำให้เป็น ปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน (Semidefinite programming :SDP) รายละเอียดสามารถหาได้จาก [1] และ [3] ตามลำดับ และสามารถทำการแปลงไปสู่ปัญหา SDP ได้โดยการกำหนด ให้มีเมตริกซ์ใหม่ Y และ W นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์กัน ดังนี้ $Y = P^{-1}$, $W = K P^{-1}$ ($P > 0$, $Y > 0$) ดังนั้นจะได้ $P = Y^{-1}$, $K = W Y^{-1}$ และแทนค่าผลลัพธ์ได้ในสมการที่ 30 จะได้ดังสมการที่ 31

$$\begin{aligned} (A - B W Y^{-1})^T Y^{-1} + Y^{-1} (A - B W Y^{-1})^T \\ + Q + K^T R K \leq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

จากสมการที่ 31 ทำการคูณด้วย Y ทั้งด้านซ้ายและด้านขวา และใช้ความสัมพันธ์ข้างต้นจัดรูปได้ดังสมการที่ 32

$$\begin{aligned} Y A^T - W^T B^T + A Y - B W + Y Q Y \\ + W^T R W \leq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

สามารถเขียนใหม่ได้ดังในสมการที่ 33

$$\begin{aligned} Y A^T - W^T B^T + A Y - B W \\ + \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

เมื่อใช้คุณสมบัติส่วนเติมเต็มของ schur (schur complement) (รายละเอียดสามารถหาได้จาก [1]) ทำการจัดรูปใน สมการที่ 33 จะได้ข้อสมการเมตริกซ์กำลังสอง (quadratic matrix inequality) ซึ่งเป็นข้อสมการเมตริกซ์เชิงเส้น (LMI) ดังในสมการที่ 34

$$\begin{aligned} L(Y, W) = \\ \begin{pmatrix} -Y A^T + W^T B^T - A Y + B W & Y & W^T \\ Y & Q^{-1} & 0 \\ W & 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

และจากสมการที่ 26 สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของ LMI ได้ ดังนี้ (ใช้ schur complement)

$$x_0^T P x_0 = x_0^T Y^{-1} x_0 \leq \gamma$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

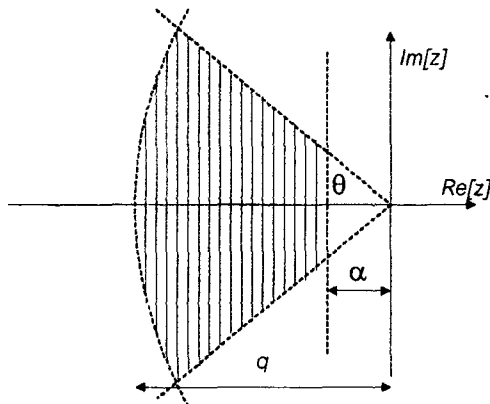
ดังนั้นการพิจารณาค่าที่น้อยที่สุดของสมการที่ 22 (23) จะเหมือนกับสมการที่ 5 และ 13 แต่จะต่างกันที่ใช้เทคนิค LMI ในการหาผลเฉลยแทน และระบบที่พิจารณาสมการที่ 21 และ 22 จะแสดงรูปแบบของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้ดังนี้

(minimize) γ
 (subject to) สมการที่ (34) และ (35)

(36)

5. เงื่อนไขบังคับในการวางตำแหน่งโพล

โดยทั่วไปการออกแบบตัวควบคุม PID ยังไม่สามารถบังคับการวางตำแหน่งโพลซึ่งจะเป็นสิ่งบ่งบอกถึงผลตอบสนองชั่วคราวรวมถึงสามารถจำกัดสัญญาณเข้าควบคุมไม่ให้ค่ามากจนเกินไป สำหรับในการออกแบบตัวควบคุม PID ในที่นี้จะมีการวางตำแหน่งโพลใน 3 ลักษณะคือ การวางในบริเวณวงกลม บริเวณแถบแนวตั้งและบริเวณส่วนวง และนำบริเวณทั้งสามมาทำการอินเตอร์เซกชันดังในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงการอินเตอร์เซกชันของบริเวณต่าง ๆ

นิยามที่ 1 (บริเวณที่มีเสถียรภาพ LMI) [2] เซตย่อย D ของระนาบเชิงซ้อนจะเรียกว่าบริเวณ LMI ถ้ามีเมตริกซ์สมมาตร $\alpha = [\alpha_{kl}] \in R^{m \times m}$ และเมตริกซ์ $\beta = [\beta_{kl}] \in R^{m \times m}$ ที่ทำให้ $D = \{z \in C : f_D(z) < 0\}$

ซึ่งสมการคุณลักษณะ $f_D(z)$ เป็นดังนี้

$$f_D(z) = [\alpha_{kl} + \beta_{kl} z + \beta_{kl} \bar{z}]_{1 \leq k, l \leq m} \quad (37)$$

ดังนั้นการพิจารณาในที่นี้จะมีสมการคุณลักษณะด้วยกัน 3 ลักษณะคือ สมการคุณลักษณะของวงกลม แถบแนวตั้งและบริเวณส่วนวงดังในสมการที่ 38, 39 และ 40 ตามลำดับ

1. บริเวณวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลาง (0,0) และรัศมีเท่ากับ q

$$D_{\text{circle}} = \{x + yi \in C : x^2 + y^2 < q^2\}$$

$$f_{D_{\text{circle}}}(z) = \begin{pmatrix} -q & z \\ \bar{z} & -q \end{pmatrix} \quad (38)$$

2. บริเวณแถบแนวตั้งที่ α

$$D_\alpha = \{x + yi \in C : x < -\alpha < 0\}$$

$$f_{D_\alpha}(z) = z + \bar{z} + 2\alpha < 0 \quad (39)$$

3. บริเวณส่วนวง

$$D_\theta = \{x + yi \in C : x \tan \theta < -|y|\}$$

$$f_\theta(z) = \begin{pmatrix} (z + \bar{z}) \sin \theta & (z - \bar{z}) \cos \theta \\ (\bar{z} - z) \cos \theta & (z + \bar{z}) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (40)$$

ทฤษฎีที่ 1 เมตริกซ์ A_{cl} มีคุณสมบัติ D-stable [2] ได้ก็ต่อเมื่อมีเมตริกซ์สมมาตรที่สอดคล้องกับสมการดังนี้

$$M_D(A_{cl}, X) < 0, X > 0 \text{ โดยการแทนเมตริกซ์ดังนี้}$$

$$(P, A_{cl} P, P A_{cl}^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z}) \quad (41)$$

โดย $A_{cl} = A - BK$ เหมือนในสมการที่ 29

ดังนั้นสมการที่ 38 ถึง 40 สามารถใช้คุณสมบัติในทฤษฎีที่ 1 ซึ่งจะได้ผลดังในสมการที่ 42 ถึง 44

1. บริเวณวงกลม

$$M_{D_{\text{circle}}}(A_{cl}, P) =$$

$$\begin{pmatrix} -qP & (A - BK)P \\ P(A - BK)^T & -qP \end{pmatrix} \quad (42)$$

2. บริเวณแถบแนวตั้งที่ α

$$M_{D_\alpha} =$$

$$(A - BK)P + P(A - BK)^T + 2\alpha P \quad (43)$$

3. บริเวณส่วนวง

$$M_{D_\theta} =$$

$$\begin{pmatrix} (A_{cl}P + PA_{cl}^T) \sin \theta & (A_{cl}P - PA_{cl}^T) \cos \theta \\ (PA_{cl}^T - A_{cl}P) \cos \theta & (A_{cl}P + PA_{cl}^T) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (44)$$

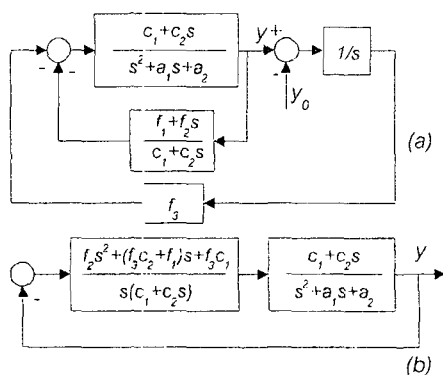
และในทำนองเดียวกันจะเห็นว่าปัญหาดังในสมการที่ 42 ถึง 44 ไม่เป็นปัญหา SDP ดังนั้นเราสามารถทำการแปลงไปสู่ปัญหา SDP ได้โดยใช้การแปลงเหมือนในตอนที่ผ่านมา

ดังนั้นในการออกแบบตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุดพร้อมทั้งเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับในการวางตำแหน่งโพลที่ได้จากการอินเตอร์เซกชันดังเงื่อนไขบังคับเหล่านี้

$$\begin{aligned} & (\text{minimize}) \quad \gamma \\ & (\text{subject to}) \quad \text{สมการที่ (34), (35), (42), (43) และ (44)} \end{aligned} \quad (45)$$

6. ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

สำหรับที่พิจารณาในที่นี้เป็นระบบอันดับสอง ดังนั้นเราใช้คุณสมบัติการควบคุมเชิงปริพันธ์ในการสร้างแบบจำลองที่ประกอบด้วยกระบวนการ (plant) และตัวควบคุม PID ดังในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดง block diagram ของการขยายระบบเชิงเส้นที่มีความสัมพันธ์กับการออกแบบตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุด

ระบบที่พิจารณาในที่นี้เป็นระบบอันดับสองซึ่งมีโครงสร้างดังต่อไปนี้

$$G_p(s) = \frac{c_1 + c_2 s}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (46)$$

โครงสร้างของตัวควบคุมที่ได้จากการควบคุมเชิงปริพันธ์มีดังนี้

$$G_{PID}(s) = \frac{f_3 c_1 + (f_3 c_2 + f_1) s + f_2 s^2}{s(c_1 + c_2 s)} \quad (47)$$

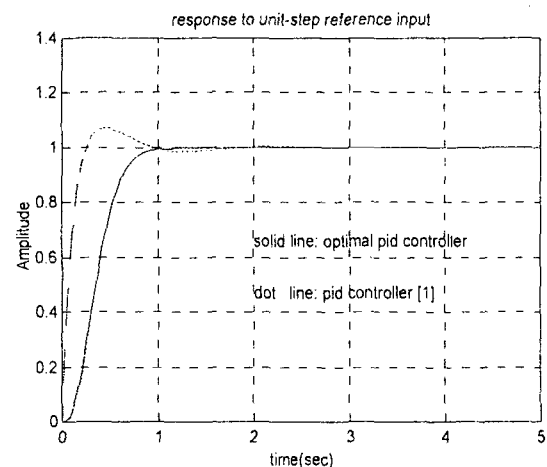
และตัวอย่างของระบบที่พิจารณา [5] เป็นดังต่อไปนี้

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 3.6s + 9} \quad (48)$$

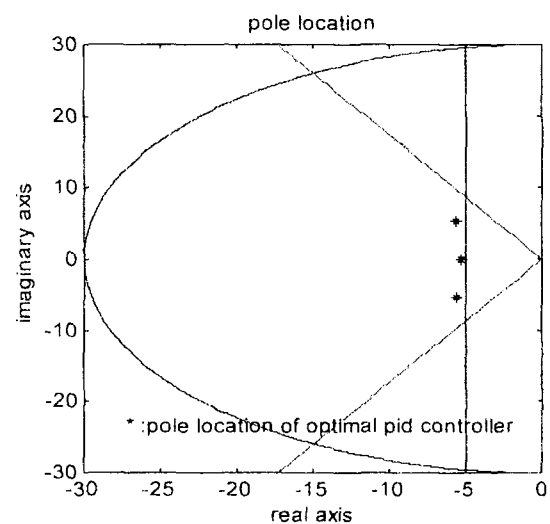
โดยต้องการให้ settling time เท่ากับ 2-3 วินาที และมี damping ratio มากกว่า 0.5 ($\theta < 60$ องศา) และทำการออกแบบให้สามารถวางตำแหน่งโพลวงรอบปิดอยู่ในวงกลมรัศมี 30 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และแถบแนวตั้งตั้งแต่ -5 เป็นต้นไป ดังนั้นการออกแบบสามารถหาได้จากสมการ (45) จะได้ผลดังนี้คือ $\gamma = 162.2383$ ($Q = \text{diag}(1 \ 1 \ 1)$, $R = 1$)

$$K = [Ff] = [f_1 \ f_2 \ f_3] = [110.1 \ 129.42 \ -314.9]$$

โดยนำค่า K ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ LMI Toolbox Control [3] มาแทนค่าในสมการที่ 47 จะทำให้ได้ตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุดตามต้องการและผลตอบสนองเชิงเวลาที่มีสัญญาณเข้าเป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย (step response) และตำแหน่งโพล (pole location) ในรูปที่ 4 และ 5 ตามลำดับ



รูปที่ 4 แสดง step response ของ optimal PID controller และ PID controller [1]



รูปที่ 5 แสดงตำแหน่งโพลวงรอบปิดที่อยู่ภายในบริเวณที่ได้จากการอินเตอร์เซกชันของบริเวณต่าง ๆ

7. สรุป

ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาการออกแบบตัวควบคุม PID ที่เหมาะสมที่สุดด้วยเงื่อนไขบังคับในการวางตำแหน่งโพลโดยอาศัยเทคนิคของสมการเมตริกซ์เชิงเส้น (LMIs) ทำให้การออกแบบมีความสะดวกและง่ายยิ่งขึ้นโดยไม่จำเป็นต้องทดสอบการปรับแต่งค่าจากการทดลอง ทั้งยังสามารถเลือกกำหนดผลตอบสนองเชิงเวลาได้ตามต้องการ แต่การออกแบบดังกล่าวในที่ใช้ระบบที่มีอันดับสอง ซึ่งถ้ามีอันดับมากขึ้นต้องทำการลดทอนอันดับให้เป็นอันดับสองก่อน นอกจากนี้เราสามารถพัฒนาการออกแบบตัวควบคุม PID ให้มีความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์โดยใช้เทคนิคของ LMIs ได้ต่อไป

8. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยพัฒนานี้สำเร็จได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับการสนับสนุนทางโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ LMI Optimization : *LMI Control Toolbox* [3] จากห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม สาขาวิชาระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยและอุปกรณ์จากห้องปฏิบัติการ Electronics Simulation คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต อาจารย์ภิราภรณ์ ก้อนคำ เลขานุการคณะวิศวกรรมศาสตร์และอาจารย์ชัยวัฒน์ จามจริกุล หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต จึงใคร่ขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [2] M. Chilali and P. Gahinet, " H_∞ Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.41, No.3, pp. 358-367, 1996.
- [3] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The MathWork, 1995.
- [4] S. Marsili-Llibelli, "Optimal design of PID regulators," *Int. J. Control*, vol. 33, No. 4, pp.606-616, 1981.
- [5] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Inc. 1990.