การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 14
2-3 พฤศจิกายน 2543 โรงแรม โนโวเทล เชียงใหม่

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะสำหรับระบบกันสะเทือนของรถ โดยใช้อสมการเมตริกซ์เชิงเส้น

State-Feedback Controller Design for an Automotive Suspension System Based on Linear Matrix Inequalities (LMIs)

อดิรักษ์ กาญจนหฤทัย
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต
ถนนพัฒนาการ สวนหลวง กรุงเทพฯ 10250
โทร (662) 321-6930-9 ต่อ 212, 213 โทรสาร (662) 321-4444 E-mail : adkancha@hotmail.com

Adirak Kanchanaharuthai
Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University
Pattanakarn Road, Suan Luang, Bangkok 10250, Thailand
Tel : (662) 321-6930-9 Ext. 212, 213, Fax : (662) 321-4444.

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะสำหรับระบบกันสะเทือนของรถโดยใช้อสมการเมตริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequalities: LMIs) โดยตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบมีวัตถุประสงค์ (1)สามารถวางตำแหน่งโพลในบริเวณวงกลม (2)สามารถรับประกันผลของดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุด (optimal H_∞ performance) (3)สามารถรองรับผลของความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ทางกายภาพ (physical parameter uncertainty) สุดท้ายผลการจำลองระบบกันสะเทือนด้วยคอมพิวเตอร์แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสถานะที่ได้ให้ผลเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด

คำสำคัญ: ระบบกันสะเทือนของรถ/ดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุด/การวางตำแหน่งโพล

Abstract

This paper proposes a reseach concerning the state-feedback controller design for an automotive suspension system based on Linear Matrix Inequalties (LMIs). The aims of this controller design are as follows: (1) to place the pole location in the circular region, (2) to guarantee the optimal H_∞ performance index (L_2 gain), and (3) to support to impact of physical parameter uncertainty. This simulation results show that this state-feedback controller design for an automotive suspension system give the result possible with the desired purposes.

Keywords: an automative suspension system/optimal H_∞ performance/pole placement

1. บทนำ

ปัจจุบันอุตสาหกรรมยานยนต์ ได้มีการพัฒนาออกแบบระบบกันสะเทือนของรถเพื่อให้ผู้ใช้ได้รับความนุ่มนวลในขณะการขับขี่บนสภาพพื้นถนนที่แตกต่างกัน แต่เมื่อใช้งานมาระยะเวลานานมักจะเกิดปัญหาในเรื่องของความไม่แน่นอนในระบบกันสะเทือนของรถ เช่นความดันภายในยางรถและเงื่อนไขของสภาพพื้นถนนที่แปรเปลี่ยน ทั้งนี้เนื่องจากการออกแบบมีความไม่เป็นเชิงเส้นและข้อกำหนดในการออกแบบมีการขัดกัน กล่าวคือระหว่างสัญญาณเข้าควบคุมที่มีขอบเขตกับผลตอบสนองที่ต้องการให้รวดเร็ว ซึ่งเป็นผลมา

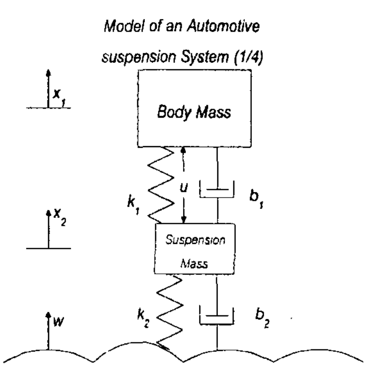
จากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์บางตัวในระบบเกิดขึ้น และการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์นี้มีผลกระทบต่อเสถียรภาพและผลตอบสนองของระบบซึ่งขึ้นกับตำแหน่งโพล

งานวิจัยนี้ศึกษาการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่สามารถรับประกันผลของดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุดของระบบและสามารถตำแหน่งโพลวงรอบปิดในบริเวณของวงกลม เพื่อสามารถรองรับผลของความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ทางกายภาพ

วัตถุประสงค์ของการศึกษาเพื่อให้ได้ตัวควบคุมที่มีความคงทนต่อความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ที่มีต่อระบบกันสะเทือนของรถ ซึ่งใช้เทคนิคอสมการเมตริกซ์เชิงเส้น ในการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ การศึกษากระทำโดยการสร้างความสัมพันธ์ของความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นของระบบกันสะเทือนในรูปของเซตกระชับที่มีความนูนที่รู้ค่า (known convex compact set) กับดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุดของระบบวงรอบปิดและการสร้างเงื่อนไขในการวางตำแหน่งโพลในวงกลม

2. แบบจำลองของระบบกันสะเทือนของรถ

แบบจำลองของระบบกันสะเทือนที่ทำการพิจารณาในที่นี้จะเป็นแบบจำลองเพียงล้อเดียว (quarter-car model) ซึ่งแสดงดังในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงแบบจำลองระบบกันสะเทือนของรถ

เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ของแบบจำลองดังกล่าวโดยใช้กฎของนิวตันทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -b_1\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)-k_1\left(x_1-x_2\right)+u \\ m_2\ddot{x}_2 &= b_1\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)+k_1\left(x_1-x_2\right)+b_2\left(\dot{w}-\dot{x}_2\right) \\ &\quad +k_2\left(w-x_2\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

โดยค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้เป็นดังนี้

- body mass (m_1) = 2500 kg
- suspension mass(m_2) = 320 kg
- spring constant of suspension system (k_1)
  = 80,000 N/m
- spring constant of wheel and tire (k_2)
  = 400,000-600,000 N/m
- damping constant of suspension system (b_1)
  = 350 Ns/m
- damping constant of wheel and tire (b_2)
  = 15,020 Ns/m

จากสมการที่ 1 สามารถสร้างความสัมพันธ์ในรูปของสมการปริภูมิสถานะ (state-space equation) ได้ดังสมการที่ 2

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \ddot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-b_1b_2}{m_1m_2} & 0 & \dfrac{b_1}{m_1}\left(\dfrac{b_1}{m_1}+\dfrac{b_1}{m_2}+\dfrac{b_2}{m_2}\right)-\dfrac{k_1}{m_1} & \dfrac{-b_1}{m_1} \\ \dfrac{b_2}{m_2} & 0 & \left(\dfrac{b_1}{m_1}+\dfrac{b_1}{m_2}+\dfrac{b_2}{m_2}\right) & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & \left(\dfrac{k_1}{m_1}+\dfrac{k_1}{m_2}+\dfrac{k_2}{m_2}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \dot{x}_1\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{b_1b_2}{m_1m_2}\\ \dfrac{-b_2}{m_2}\\ \dfrac{k_2}{m_2}\end{pmatrix}w+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{m_1}\\ 0\\ \dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_2}\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \dot{x}_1\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} \quad (2)$$

3. การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะของระบบกันสะเทือนในสมการที่ 2 นั้นสามารถแทนด้วยระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (Time-invariant system) ที่รวมผลของความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ (k_2)ได้ดังสมการที่ 3

$$\dot{\xi} = A_{\Delta}\xi + B_w w + B_u u,\ \ y = C\xi \tag{3}$$

โดย เมตริกซ์ A_Δ มีคุณลักษณะเป็น matrix polytope ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 4

$$A_\Delta = \theta A_1 + (1-\theta)A_2,\ \forall\ 0 \le \theta \le 1 \tag{4}$$

โดยเมตริกซ์ A_1 และ A_2 เป็นเมตริกซ์จุดยอด (vertex matrix) ของเมตริกซ์ A_Δ และแทนความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ทางกายภาพ

จุดประสงค์ของการออกแบบแบบนี้เพื่อที่ลดผลของสัญญาณรบกวน w ที่เกิดจากพื้นถนน (road disturbance) ซึ่งเป็นสัญญาณเข้าแบบขั้นที่แทนด้วย pot hole แต่เนื่องจากไม่สามารถวัดผลของ x_1 -w (วัดได้ยาก) จึงจำเป็นต้องวัดผลความแตกต่างระหว่างค่าของ $x_1 - x_2$ แทน (x_2 -w น้อยมาก) และเมื่อใช้วิธีการรควบคุมเชิงปริพันธ์ (integral control) จึงกำหนดให้มีตัวแปรสถานะใหม่ $y_1 = x_1 - x_2$ เพื่อให้ผลของความคลาดเคลื่อนที่สภาวะคงตัวมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงกำหนดให้ $\xi = (x_1 \quad \dot{x}_1 \quad y_1 \quad y_2)^T$ แทนด้วยตัวแปรสถานะของระบบ w แทนสัญญาณรบกวนเนื่องมาจากสภาพพื้นถนนและ u แทนสัญญาณเข้าควบคุมซึ่งอยู่ในรูปของ $u=Kx$ เมื่อแทนผลของสัญญาณเข้าควบคุมลงในสมการที่ 3 จะได้ระบบวงรอบปิด (closed-loop system) ที่ใช้เทคนิคการควบคุมเชิงปริพันธ์จะได้ดังสมการที่ 5

$$\begin{gathered}\dot{\zeta} = (A_{\Delta I} + B_{uI}K)\zeta + B_{wI}w,\ \ y_I = C_I\zeta \\ A_I = \begin{pmatrix} A_\Delta & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, B_{uI} = \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix}, B_{wI} = \begin{pmatrix} B_w \\ 0 \end{pmatrix} \\ C_I = \begin{pmatrix} C_I & 0 \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} \xi & x_I \end{pmatrix}^T\end{gathered} \tag{5}$$

โดย x_I แทนตัวแปรสถานะของตัวอินทิเกรเตอร์ (integrator)

3.1 ดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุด

เราสมมติว่ามีฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) $V(\xi) = \xi^T P\xi$, $P > 0$ และ $\gamma \ge 0$ ซึ่งทำให้ได้เงื่อนไขดังต่อไปนี้สำหรับทุก ๆ เวลา t

$$\frac{d}{dt}V(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w \le 0 \tag{6}$$

สำหรับทุก ๆ ค่าตัวแปรสถานะ x และสัญญาณรบกวน w

เราสามารถอินทิเกรตในสมการที่ 6 จากศูนย์ถึงค่าอนันต์โดยพิจารณาช่วงเวลาที่ศูนย์ถึงค่าอนันต์ซึ่งจะได้ดังในสมการที่ 7

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(z_I^T z_I - \gamma^2 w^T w\right)dt + \int_0^\infty \frac{d}{dt}x^T Pxdt \\ &= \int_0^\infty \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \Lambda(P) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} dt \le 0\end{aligned} \tag{7}$$

โดยกำหนดให้

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} + C_I^T C_I & PB_{wI} \\ B_{wI}^T P & -\gamma^2 \end{pmatrix} \le 0 \tag{8}$$

และ

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{d}{dt}x^T Pxdt = \\ &x^T(\infty)Px(\infty) - x^T(0)Px(0) = 0\end{aligned} \tag{9}$$

ซึ่งจากสมการที่ 6 และ 7 จะได้ว่า

$$\begin{gathered}\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \le \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \\ \leftrightarrow \sup_{\|w\|_2 \ne 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt}{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt}} \le \gamma\end{gathered} \tag{10}$$

โดยสมการที่ 10 เรียกว่า ดัชนีสมรรถนะ H_∞ หรือ L_2 gain หรือ RMS gain จากเงื่อนไขในสมการที่ 8 นั้นสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในเงื่อนไขบังคับของอสมการเมตริกซ์เชิงเส้นซึ่งสมมูลซึ่งกันและกันโดยการใช้วิธีการ Schur complement [2] และ [3] ได้ดังสมการที่ 11

$$\begin{pmatrix} A_{cl}P + PA_{cl}^T & B_{wI} & PC_I^T \\ B_{wI}^T & -\gamma I & 0 \\ C_I P & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \le 0 \tag{11}$$

โดย $A_{cl}=A_{\Delta I}+B_{uI}K$

3.2 การวางตำแหน่งโพลภายในวงกลม

การวางตำแหน่งโพลภายในวงกลมจะเป็นตัวบ่งบอกถึงผลตอบสนองชั่วครู่รวมถึงการจำกัดค่าของสัญญาณเข้าควบ

คุมไม่ให้มีค่ามากเกินไป แม้ว่าระบบดังกล่าวจะมีความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ซึ่งจะมีผลกระทบต่อเสถียรภาพและผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบ

การออกแบบต้องการวางตำแหน่งโพลของระบบวงรอบปิด $\lambda\left(A_{\Delta_i}+B_{u_i}K\right)$ ให้อยู่ภายในบริเวณวงกลมรัศมี r และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-q,0)$ ได้ก็ต่อเมื่อมีเมตริกซ์ $P = P^T > 0$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของอสมการเมตริกซ์เชิงเส้นดังในสมการที่ 12

$$\begin{pmatrix} -rP & qP+PA_{cl}^T \\ qP+A_{cl}P & -rP \end{pmatrix} \le 0 \qquad (12)$$

จากสมการที่ 12 เมื่อใช้ส่วนเต็มของ schur (schur complement) จะได้ผลตามสมการที่ 13 [4]

$$-r^2P+\left(qI+A_{cl}^T\right)P\left(qI+A_{cl}\right)\le 0 \qquad (13)$$

กำหนดให้ $\lambda = x+yi$ และ v แทนด้วยค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมตริกซ์ A_{cl} โดยนำค่า v^T และ v ทำการคูณทั้งทางซ้ายมือและขวามือจะได้ผลดังนี้ [6]

$$-r^2+\left(x+q-yi\right)\left(x+q+yi\right)\le 0 \qquad (14)$$

และ

$$-r^2+\left(x+q\right)^2+y^2\le 0 \qquad (15)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าในสมการที่ 15 สามารถแทนค่าเจาะจงหรือตำแหน่ง โพลวงรอบปิดในบริเวณวงกลมรัศมี r และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-q,0)$

ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะของระบบกันสะเทือนที่มีผลของความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์สามารถทำการคำนวณได้จากเงื่อนไขบังคับ LMIs ในสมการที่ 11 และ 12 ตามลำดับ ซึ่งต้องพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของเมตริกซ์ A_Δ

การพิจารณาหาค่าที่น้อยที่จะสามารถแสดงได้ในรูปการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้ดังนี้

(minimize) γ
(subject to) สมการที่ (11) และ (12), $P > 0$

(16)

โดย $i = 1, 2$ จะแทนด้วย A_1 และ A_2 ในสมการที่ 4

การหาผลเฉลยในสมการที่ 16 พบว่าไม่เป็นปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน (Semidefinite programming: SDP) รายละเอียดสามารถหาได้จาก [1] และ [2] ตามลำดับ และสามารถทำการแปลงไปสู่ปัญหา SDP ได้โดยการกำหนดให้มีเมตริกซ์ใหม่ Y และ W นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์กันดังนี้ $Y = P^{-1}$, $W = KP^{-1}(P > 0,\ Y > 0)$ ดังนั้นจะได้ $P = Y^{-1}$, $K = WY^{-1}$ และแทนค่าผลที่ได้นี้ในสมการที่ 16 และใช้ *LMI Control Toolbox [4]* ในการหาผลเฉลยต่อไป

4. ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

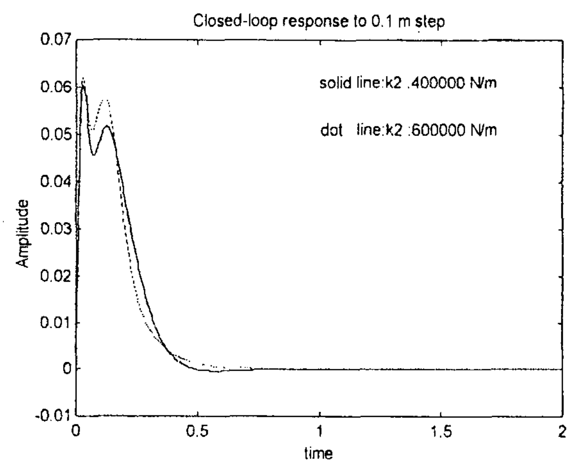
กำหนดให้ $w = 0.1\ u(t)$ (unit step input) ,settling time = 5 วินาทีและการแกว่งลดลงอย่างรวดเร็ว โดยมีการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ k_2 ที่อยู่ในช่วงระหว่าง 400,000 ถึง 600,000 Ns/m

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสถานะที่สามารถสามารถรับประกันดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุดพร้อมกันนั้นยังให้ผลตอบสนองชั่วครู่ที่ต้องการโดยมีเงื่อนไขบังคับในโพลวงรอบปิดอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (–100,0) และมีรัศมีเท่ากับ 90 หน่วย

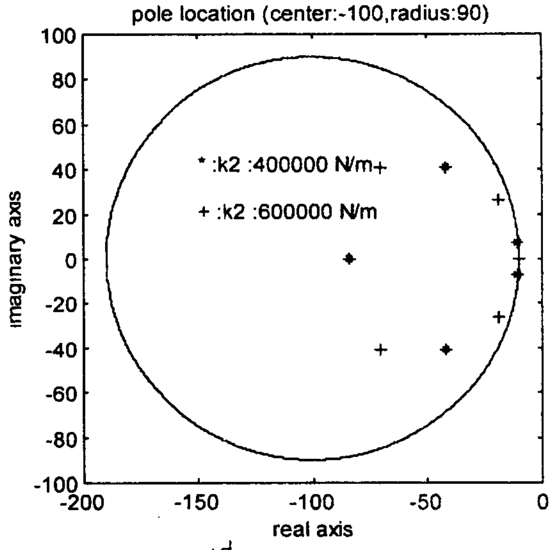
ผลการจำลองระบบกันสะเทือนจะได้ดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุดเท่ากับ 1.961 และอัตราขยายป้อนกลับตัวแปรสถานะ (K) เป็นดังนี้

K = [-1.174e7 0.009e7 –0.03e7 –0.005e7 –9.35e7]

โดยผลตอบสนองเชิงเวลาสามารถคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ k_2 และตำแหน่งโพลวงรอบปิดที่สามารถบังคับในโพลดังกล่าวอยู่ภายในบริเวณวงกลมดังแสดงในรูปที่ 2 และ 3 ตามลำดับ



รูปที่ 2 Step response ($w := 0.1u(t)$)



รูปที่ 3 Pole location

5. สรุป

ผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ชี้ให้เห็นว่า การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะของระบบกันสะเทือนโดยใช้ LMIs สามารถรับประกันดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะที่สุด วางตำแหน่งโพลภายในวงกลมและคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ นอกจากนี้ทำให้เชื่อมั่นได้ว่าระบบจะมีเสถียรภาพและสัญญาณเข้าควบคุมจะมีค่าไม่มากเกินไปซึ่งเป็นผลจากขนาดรัศมีและจากจุดศูนย์กลางของวงกลม รวมทั้งทำให้การออกแบบมีความสะดวกและง่ายยิ่ง และเราสามารถพัฒนาการออกแบบตัวควบคุมที่มีลักษณะของสัญญาณออกแบบป้อนกลับ (output feedback) ได้เพื่อสามารถกำหนดคุณสมบัติอื่น ๆ ที่เป็นข้อจำกัดของการควบคุมแบบป้อนกลับสถานะได้ต่อไป

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยพัฒนานี้สำเร็จได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับการสนับสนุนทางโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ LMI Optimization : *LMI Control Toolbox [4]* จากห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม สาขาวิชาระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และอุปกรณ์จากห้องปฏิบัติการ Electronic Simulation คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต อาจารย์ภิราภรณ์ ก้อนคำ เลขานุการคณะวิศวกรรมศาสตร์และอาจารย์ชัยวัฒน์ จามจรีกุล หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็คทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต จึงใคร่ขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

เอกสารอ้างอิง

[1] S. Boyd, V. Balakrishnan, E. Feron, and L. El. Ghaoui, *"Control System Analysis an Synthesis via Linear Matrix Inequalities,"* Proc. ACC. pp. 2147-2154, 1993.

[2] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994

[3] M. Chilali and P. Gahinet, "H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, No. 3, pp. 358-367, 1996.

[4] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The MathWork, 1995

[5] P. R. Belanger, *Control Engineering: A Modern Approach*, Saunders College Publishing, 1995.

[6] K. Furuta and S. B. Kim, "Pole assignment in a specified disk," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.32, pp. 423-427, 1987.

List of Symbols

R, R^n แทนด้วยจำนวนจริงและเวกเตอร์จำนวนจริงที่มีมิติขนาด n

M^T แทนด้วยการทรานสโพส (Transpose) ของเมตริกซ์ M ด้วยที่ $(M^T)_{ij} = M_{ji}$

$M > 0$ แทนด้วย M เป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) และบวกแน่นอน (positive matrix) เช่น $M = M^T$ และ $z^T M z > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $z \in R^n$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$\lambda(M)$ แทนด้วยค่าเจาะจง (eigenvalue) ของเมตริกซ์ $M = M^T$

$\in$ "belongs to"

$\forall$ "for all"

$\|\cdot\|_2$ นอร์ม L_2 ของสัญญาณ