

การพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลแบบสองมิติ

Software Development for the Simulation of Two-Dimensional Flow

บุญลือ สวัสดิ์มงคล และ เอกชัย จันทสาโร

ห้องปฏิบัติการวิจัยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CFD Lab)

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000

โทร 0-4422-4410-2; โทรสาร 0-4422-4411, E-Mail : boonlues@hotmail.com

บทคัดย่อ

ซอฟต์แวร์ในงานวิจัยนี้ได้รับการพัฒนาขึ้นเพื่อวิเคราะห์การไหลในสภาวะคงตัว (Steady State) สองมิติ และความเร็วของการไหลต่ำกว่าความเร็วเสียง ซอฟต์แวร์พัฒนาขึ้นบนพื้นฐานของระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) โดยค่าของตัวแปรทั้งหมดถูกเก็บไว้ที่ตำแหน่งเดียวกัน (Collocated Grids) และใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow (Rhie and Chow Interpolation) เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการไม่เกาะเกี่ยวกันระหว่างความเร็วกับความดัน แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ (Two-Equation Turbulence Model) ถูกนำมาใช้ในการแก้การไหลเป็นแบบปั่นป่วน ซอฟต์แวร์สามารถวิเคราะห์การไหลได้หลากหลายรูปแบบ ได้แก่ การไหลแบบไม่อัดตัว (Incompressible Flow) การไหลแบบอัดตัวได้ (Compressible Flow) การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) และการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) ซอฟต์แวร์ได้รับการทดสอบโดยการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง และผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ พบว่าซอฟต์แวร์มีความถูกต้องในระดับที่สามารถนำไปใช้ในงานวิจัยได้

Abstract

The software of this research work is developed for the analysis of steady two-dimensional flow at subsonic speed. The software is developed on the basis of the finite volume method. All the variables are treated on the collocated grid system and the Rhie and Chow interpolation is used to avoid the decoupling between the velocity and the pressure. The two-equation turbulence model is used for the simulation of turbulent flow. The software can analyze various flows: incompressible flow, compressible flow, laminar flow and turbulent flow. The software is tested and validated by comparing the computed results with the analytical solution, the experimental data and the acceptable numerical solution. It is found that the software is accurately applicable for the research work.

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

- a ความเร็วเสียง หรือ $a = \frac{\tilde{T}_\delta}{T_w} \left[1 + \gamma \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right]^{-1}$
- A สัมประสิทธิ์ที่เกิดจากการจัดรูปสมการตามอย่างระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด
- b $b^2 = r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \frac{\tilde{T}_\delta}{T_w}$
- b⁺ พจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของ $\square$
- C_f สัมประสิทธิ์ความเสียดทานบนพื้นผิว
- C_p ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
- C_{pw} สัมประสิทธิ์ความดันสถิตบนพื้นผิว
- C_v ค่าความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่
- C₁ ค่าคงที่ตัวที่ 1 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- C₂ ค่าคงที่ตัวที่ 2 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- C_μ ค่าคงที่ของ μ_t
- D พจน์เสริมของสมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- e_T พลังงานรวมจำเพาะ
- E พจน์เสริมของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- f₁ ฟังก์ชันการหน่วงตัวที่ 1 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- f₂ ฟังก์ชันการหน่วงตัวที่ 2 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- f_μ ฟังก์ชันการหน่วงของ μ_t
- J จาโคเบียนของการแปลงพิกัด, $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$
- k พลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

$$k^+ \quad k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}$$

k_T สภาพนำความร้อน

K พลังงานจลน์ของการไหลเฉลี่ย

L ความยาวของแผ่นเรียบ

m_p เทอมที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของสมการความดันและสมการค่าแก้ไขความดัน

M_i เลขมัคของการปั่นป่วน

M_δ เลขมัคที่ขอบของชั้นขี้นผิว

M_∞ เลขมัคของ Free-Stream

p ความดัน

p' ค่าแก้ไขความดัน

p_0 ความดันรวม

Pr เลขพริ้นด์เทิล

r Recovery Factor

1. บทนำ

สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations) เป็นสมการที่สามารถให้ผลเฉลยอย่างสมบูรณ์แบบสำหรับปัญหาการไหลของของไหล แต่ด้วยเหตุที่สมการนาเวียร์-สโตกส์ประกอบขึ้นจากสมการหลายสมการ ซึ่งแต่ละสมการเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Non-Linear) และมีความเกี่ยวพัน (Coupled) กับสมการอื่น จึงทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์-สโตกส์ได้ในรูปทั่วไปด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ ทำให้การศึกษากฎธรรมชาติของการไหลในช่วงเวลาที่ผ่านมาต้องอาศัยการทดลองอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ เช่น การใช้อุปกรณ์วัด เป็นต้น ซึ่งการทดลองแต่ละครั้งใช้เวลาและค่าใช้จ่ายสูง จึงทำให้การศึกษากฎธรรมชาติของการไหลจำกัดอยู่เฉพาะหน่วยงานหรือองค์กรขนาดใหญ่เท่านั้น อีกทั้งการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของการทดลอง เช่น ขนาด และรูปทรง เป็นต้น เป็นไปด้วยความล่าช้า ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีสมรรถนะสูงกว่าในอดีตมาก จึงได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์-สโตกส์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ เช่น ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) ระเบียบวิธีขึ้นประกอบจำกัด (Finite Element Method) และระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) เป็นต้น พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics, CFD) เป็นศาสตร์แขนงหนึ่งที่ว่าด้วยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลยของปัญหาการไหล โดย CFD จะทำการจำลองพฤติกรรมของการไหลผ่านทางหน้าจอคอมพิวเตอร์ทำให้การปรับเปลี่ยนเงื่อนไขของการไหลทำได้สะดวกและใช้เวลาไม่นาน ค่าใช้จ่ายน้อยเป็นข้อได้เปรียบประการหนึ่งของ CFD ซึ่งทำให้การศึกษากฎธรรมชาติของการไหลไม่จำกัดอยู่แต่ในหน่วยงานและองค์กรขนาดใหญ่เท่านั้น นอกจากนี้ CFD ยังสามารถจำลองการไหลในบางสถานการณ์ที่ไม่สามารถทำการทดลองได้ เช่น การไหลภายในเตาปฏิกรณ์ปรมาณู เป็นต้น

การได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายของ CFD นี้เองทำให้ประเทศในแถบตะวันตกสร้างสินค้าประเภทซอฟต์แวร์ขึ้นมามากมาย การซื้อซอฟต์แวร์เข้ามาใช้งานนั้นจะทำให้ได้ผลที่เร็วกว่าแต่มีราคาแพง และ

จะทำให้ประเทศไม่สามารถสร้างรากฐานทางวิชาการในด้านนี้ได้ ในขณะที่การสร้างซอฟต์แวร์ขึ้นเองนั้นจะมีความถูกต้องและสามารถสร้างความเข้มแข็งทางวิชาการในระยะยาวต่อประเทศ แต่ก่อนข้างจะเข้าสู่ระยะเริ่มต้น ด้วยเหตุที่ซอฟต์แวร์จากต่างชาติมีราคาสูง ดังนั้นการสร้างซอฟต์แวร์ขึ้นใช้เองจึงเป็นการลดการนำเข้าและลดการพึ่งพาสินค้าทางเทคโนโลยีจากต่างชาติ

2. สมการควบคุม

สมการนาเวียร์-สโตกส์ ประกอบด้วยสมการอนุรักษ์สามสมการ ได้แก่ สมการความต่อเนื่องที่สร้างขึ้นจากกฎอนุรักษ์มวลของสสาร สมการโมเมนตัมที่สร้างขึ้นจากกฎข้อที่สองของนิวตัน และสมการพลังงานที่สร้างขึ้นจากกฎอนุรักษ์พลังงาน โดยสมการอนุรักษ์ทั้งสามสามารถเขียนในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้ [1]

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ji} + \tau_{ji}] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{e}_T)}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{k_T}{C_v} + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \frac{\partial \bar{e}_T}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{u}_i (\bar{\tau}_{ji} + \tau_{ji})] \\ & - \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{p})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{k_T}{C_v} + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \frac{\partial (K+k)}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

โดยที่ตัวก๊อ หมายถึงค่าเฉลี่ยของ Favre ส่วนตัวก๊อ หมายถึงค่าเฉลี่ยของ Reynolds งานวิจัยนี้เลือกใช้แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ ซึ่งเสนอโดย [2] เพื่อจำลองการไหลแบบปั่นป่วนเนื่องจาก [3] ได้สรุปว่าเป็นแบบจำลองการปั่นป่วนที่ให้ผลการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นที่น่าพอใจ และการกำหนดเงื่อนไขขอบทำได้ง่าย แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการที่ใช้ในงานวิจัยนี้สามารถแสดงในรูปสมการได้ดังนี้

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{ji} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ & - \bar{\rho} (\epsilon_s + \epsilon_d + D) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j \epsilon_s)}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x_j} \right] \\ & + C_1 f_1 \frac{\epsilon_s}{k} \tau_{ji} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ & - \bar{\rho} C_2 f_2 \frac{\epsilon_s^2}{k} - \frac{4}{3} \bar{\rho} \epsilon_s \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + \bar{\rho} E \end{aligned} \quad (6)$$

โดยที่ $\varepsilon_d = M_t^2 \varepsilon_s$, $M_t^2 = 2 \frac{k}{a^2}$, $a^2 = \gamma R \tilde{T}$,

$$D = 2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right)^2, \quad \sigma_c = 0.91, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3,$$

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-R_t^2),$$

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho \rho} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_m} \right)^2, \quad R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad \text{และ} \quad \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d + D$$

สมการควบคุมที่ได้นำเสนอข้างต้น ได้แก่ สมการความต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม สมการพลังงาน สมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน และสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน ประกอบด้วย พจน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการพา (Convection Term) พจน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแพร่กระจาย (Diffusion Term) และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย (Source or Sink Term) ดังนั้นสามารถเขียนสมการควบคุมในรูปทั่วไปบนพิกัดฉากได้ดังนี้ [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi \quad (7)$$

รูปทั่วไปของสมการควบคุมในสมการ (7) นั้นสร้างอยู่ในระบบพิกัดฉากซึ่งเป็นรูปแบบที่ง่าย แต่การกำหนดเงื่อนไขขอบทำได้ยากเมื่อรูปทรงของวัตถุที่ของไหลไหลผ่านมีความซับซ้อน ดังนั้นพิกัดฉากจึงถูกแปลงไปเป็นพิกัดวัตถุ เพื่อให้การกำหนดเงื่อนไขขอบทำได้ง่าย โดยแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V \phi) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\Gamma^\phi}{J} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma^\phi}{J} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] + JS^\phi \end{aligned} \quad (8)$$

โดยที่

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (9)$$

$$U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad V = v \frac{\partial x}{\partial \xi} - u \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (10)$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (11)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2$$

3. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

3.1 ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด

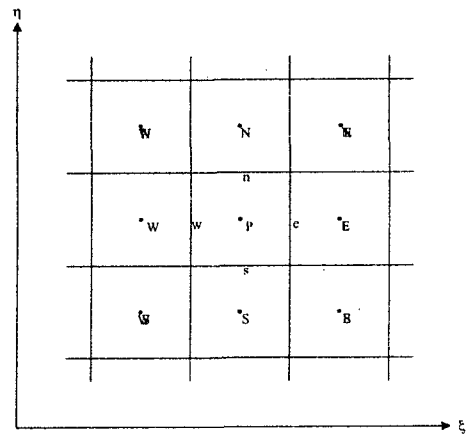
ขั้นแรกทำการหาปริพันธ์ของสมการควบคุมตลอดทั้งปริมาตรควบคุม ตัวอย่างเช่น ปริมาตรควบคุมรอบจุด P ของรูปที่ 1 โดยกำหนดให้ $\Delta \xi = \Delta \eta$ ซึ่งสามารถแสดงในรูปสมการได้ดังนี้ [5, 6]

$$\begin{aligned} &(\rho U \Delta \eta)_e \phi_e - (\rho U \Delta \eta)_w \phi_w + (\rho V \Delta \xi)_n \phi_n - (\rho V \Delta \xi)_s \phi_s \\ &= \left(\frac{\Gamma^\phi \alpha \Delta \eta}{J} \right)_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e - \left(\frac{\Gamma^\phi \alpha \Delta \eta}{J} \right)_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w \\ &+ \left(\frac{\Gamma^\phi \gamma \Delta \xi}{J} \right)_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n - \left(\frac{\Gamma^\phi \gamma \Delta \xi}{J} \right)_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s \\ &- \left[\left(\frac{\Gamma^\phi \beta}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_e + \left(\frac{\Gamma^\phi \beta}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_n \right] + JS^\phi \Delta \xi \Delta \eta \end{aligned} \quad (12)$$

S^ϕ คือค่าเฉลี่ยของพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย จากนั้นใช้ระเบียบวิธีแบบด้นลมอันดับที่หนึ่ง (First Order Upwind Differencing Scheme) กับพจน์ $\phi_e, \phi_w, \phi_n, \phi_s$ ในสมการ (12) และใช้ระเบียบวิธีแบบผลต่างกลาง (Central Differencing Scheme) กับพจน์ $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e, \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w, \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n, \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s$ หลังจากนั้นจัดสมการให้อยู่ในรูปต่อไปนี้

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b^\phi \quad (13)$$

โดยที่ b^ϕ คือผลรวมระหว่างพจน์ในวงเล็บเหลี่ยมกับพจน์สุดท้ายของสมการ (12)



รูปที่ 1 ปริมาตรควบคุมบนพิกัดวัตถุ

3.2 สมการค่าแก้ไขความดัน

ค่าความเร็วและความดันที่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนในรูปผลรวมของค่าที่ไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องกับค่าแก้ไขเพื่อให้สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \\ p &= p^* + p' \end{aligned} \quad (14)$$

โดยที่ u', v' และ p' คือค่าแก้ไขความเร็วตามทิศการไหล ค่าแก้ไขความเร็วในทิศตั้งฉากกับการไหล และค่าแก้ไขความดัน ตามลำดับ ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_p^* &= \sum_{EWNs} \frac{A^u u^*}{A_p^u} + \frac{\bar{S}_1^u}{A_p^u} + \left(B^u \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right) \\ v_p^* &= \sum_{EWNs} \frac{A^v v^*}{A_p^v} + \frac{\bar{S}_1^v}{A_p^v} + \left(B^v \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

โดยที่ $B^u = -\frac{\Delta \xi \Delta \eta}{A_p^u} \frac{\partial y}{\partial \eta}$, $C^u = \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{A_p^u} \frac{\partial y}{\partial \xi}$, $B^v = \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{A_p^v} \frac{\partial x}{\partial \eta}$, $C^v = -\frac{\Delta \xi \Delta \eta}{A_p^v} \frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\bar{S}_1^u$ และ $\bar{S}_1^v$ คือค่าเฉลี่ยของพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย โดยไม่คิดผลจากเกรเดียนต์ของความดันของสมการ x-momentum และสมการ y-momentum ตามลำดับ ด้วย * หมายถึงค่าที่ยังไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง โดยจะทำให้เกิดการสร้างมวลส่วนเกินขึ้นมาในระหว่างการคำนวณ การกำจัดมวลส่วนเกินดังกล่าวทำได้โดยการปรับแก้ค่าความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัม ซึ่งแสดงในรูปสมการต่อไปนี้ [7]

$$\begin{aligned} u &= u^* + \left(B^u \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \\ v &= v^* + \left(B^v \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

แทนค่าสมการ (16) ลงในสมการ (10) จะได้สมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U &= U^* + \left(B^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - B^v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \left(C^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - C^v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial p'}{\partial \eta} \\ V &= V^* + \left(C^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - C^u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial p'}{\partial \eta} + \left(B^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - B^u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial p'}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (17)$$

เนื่องจากค่าของพจน์สุดท้ายในสมการ (17) ขึ้นอยู่กับการวางตัวของเส้นกริด กล่าวคือ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อเส้นกริดวางตัวตั้งฉากกัน และมีค่าน้อยมากเมื่อเส้นกริดวางตัวเกือบตั้งฉากกัน ดังนั้นจึงไม่พิจารณาค่าจากพจน์ดังกล่าว จึงเขียนสมการ (17) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} U &= U^* + B \frac{\partial p'}{\partial \xi} \\ V &= V^* + C \frac{\partial p'}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (18)$$

โดยที่ $B = B^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - B^v \frac{\partial x}{\partial \eta}$ และ $C = C^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - C^u \frac{\partial y}{\partial \xi}$ แทนค่าจากสมการ (18) ลงในสมการความต่อเนื่องจะได้สมการปัวส์ซองดังนี้

$$\begin{aligned} &\left(\rho B \frac{\partial p'}{\partial \xi} \Delta \eta \right)_e - \left(\rho B \frac{\partial p'}{\partial \xi} \Delta \eta \right)_w \\ &+ \left(\rho C \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Delta \xi \right)_n - \left(\rho C \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Delta \xi \right)_s + m_p = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ใช้ระเบียบวิธีแบบผลต่างกลางกับพจน์ $\frac{\partial p'}{\partial \xi}$ และ $\frac{\partial p'}{\partial \eta}$ ในสมการ (19) จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$A_p^p p' = A_E^p p'_E + A_W^p p'_W + A_N^p p'_N + A_S^p p'_S + m_p \quad (20)$$

สมการ (20) เรียกว่า สมการค่าแก้ไขความดัน m_p คือมวลที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมยังไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง และเพื่อให้ความเร็วที่ได้สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง จึงต้องทำการปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังแสดงในสมการ (16)

3.3 สมการความดัน

หัวข้อที่ 3.2 ได้กล่าวถึงการปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน เพื่อให้ความเร็วสอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง แต่ยังไม่ได้กล่าวถึงการหาค่าของความดัน ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าของความดัน เพื่อให้ความเร็วและความดันสอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง ขั้นแรกเขียนความเร็วในรูปของสมการต่อไปนี้ [5]

$$\begin{aligned} u_p &= \hat{u} + \left(B^u \frac{\partial p}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \\ v_p &= \hat{v} + \left(B^v \frac{\partial p}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

โดยที่ $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ คือ Pseudovelocity ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \sum_{EWNs} \frac{A^u u}{A_p^u} + \frac{\bar{S}_1^u}{A_p^u} \\ \hat{v} &= \sum_{EWNs} \frac{A^v v}{A_p^v} + \frac{\bar{S}_1^v}{A_p^v} \end{aligned} \quad (22)$$

แทนค่าสมการ (22) ลงในสมการ (10) ขั้นตอนหลังจากนี้ทำเช่นเดียวกันกับสมการค่าแก้ไขความดัน จะได้สมการความดันดังนี้

$$A_p^p p = A_E^p p_E + A_W^p p_W + A_N^p p_N + A_S^p p_S + m_p \quad (23)$$

3.4 การประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow

การหาค่า m_p ในสมการ (20) นั้นต้องหาค่าฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุม การหาค่าฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมโดยการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่คนละด้านของหน้าปริมาตรควบคุม ซึ่ง

เปรียบได้กับการแตกตัวอย่างสมมาตรจากจุด (Central Difference) สำหรับระเบียบวิธีผลต่างจำกัด ในการทำเช่นนี้กระบวนการหาค่าตอบอาจเสียเสถียรภาพได้ง่าย เพราะเกิดการไม่เกาะเกี่ยวกัน (Decoupling) ระหว่างจุดที่มีค่าเลขบอกพิกัดเป็นเลขคู่กับจุดที่มีค่าเลขบอกพิกัดเป็นเลขคี่ ซึ่งคำตอบของทั้งสองระบบพิกัดอาจเป็นอิสระต่อกัน (Out of Phase) อย่างสิ้นเชิง โดยที่ต่างก็ยังเป็นผลเฉลยของสมการนาเวียร์-สโตค [19] เพื่อสร้างกลไกให้มีการเกาะเกี่ยวกันระหว่างระบบพิกัดข้างต้น [8] จึงนำระบบกริดแบบจุดเยื้อง (Staggered Grid System) มาใช้ควบคู่ไปกับการใช้ Contravariant Velocity แต่กรรมวิธีข้างต้นทำให้การเขียนรหัสโปรแกรมมีความยุ่งยากอย่างมาก ส่วน [9] ใช้ระบบกริดแบบจุดร่วม (Collocated Grid System) ควบคู่ไปกับการประมาณค่าในช่องของ Rhie and Chow [7] แทนการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่บนละตάνของหน้าปริมาตรควบคุม โดยรายละเอียดแสดงได้ดังนี้

แทนค่าสมการ (15) ลงในสมการ (10) จะได้

$$\begin{aligned} U^* &= B \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \dots \\ V^* &= C \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

เพื่อความสะดวกในการอธิบายจึงจะพจน์อื่น ๆ ที่ไม่เกี่ยวข้องกับการพิจารณา เนื่องจากการหาฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมโดยการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่บนละตάνของหน้าปริมาตรควบคุม ทำให้ฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมไม่สามารถตรวจจบการเปลี่ยนแปลงความดันใน 1 ช่วงปริมาตรควบคุมได้ ($\Delta \xi$ and $\Delta \eta$ - Pressure Variation) โดยสามารถตรวจจบได้เพียงการเปลี่ยนแปลงความดันใน 2 ช่วงปริมาตรควบคุมเท่านั้น ดังนั้นการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow จะทำการแก้ไขการหาฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมเพื่อให้สามารถตรวจจบการเปลี่ยนแปลงความดันใน 1 ช่วงปริมาตรควบคุมได้ ซึ่งแสดงในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (\rho U^*)_E &= \overline{\rho U^*} + \rho B \left(\frac{p_E^* - p_P^*}{\Delta \xi} - \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right) \\ (\rho U^*)_W &= \overline{\rho U^*} + \rho B \left(\frac{p_P^* - p_W^*}{\Delta \xi} - \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right) \\ (\rho V^*)_N &= \overline{\rho V^*} + \rho C \left(\frac{p_N^* - p_P^*}{\Delta \eta} - \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right) \\ (\rho V^*)_S &= \overline{\rho V^*} + \rho C \left(\frac{p_P^* - p_S^*}{\Delta \eta} - \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

โดยที่เส้นตรงที่อยู่เหนือตัวแปรแทนการหาค่าที่หน้าของปริมาตรควบคุมโดยการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่บนละตάνของหน้าปริมาตรควบคุม จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงความดันใน 2 ช่วงปริมาตรควบคุมถูกแทนที่ด้วยการเปลี่ยนแปลงความดันใน 1 ช่วงปริมาตรควบคุม

3.5 เงื่อนไขขอบ

เนื่องจากปัญหาที่ทำการศึกษเป็นการไหลที่สภาวะคงตัว และความเร็วของการไหลอยู่ในย่านต่ำกว่าความเร็วเสียง ทำให้คุณลักษณะของสมการนาเวียร์-สโตคส์เป็นแบบอิลลิปติก ดังนั้นเงื่อนไขขอบที่ทางเข้าของโดเมนกำหนดเป็น Subsonic Inflow โดยที่ทางออกกำหนดเป็น Subsonic Outflow ส่วนที่พื้นผิวของวัตถุที่ของไหลไหลผ่านกำหนดเป็น No-Slip Condition [10, 11]

เกรเดียนต์ของค่าแก้ไขความดันในทิศทางตั้งฉากกับทางเข้าของโดเมน และพื้นผิวของวัตถุที่ของไหลไหลผ่านมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากทราบค่าความเร็วจนถึงบริเวณดังกล่าว ส่วนค่าแก้ไขความดันที่ทางออกมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากทราบค่าความดันที่ทางออก

3.6 ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนการคำนวณทั้งหมดเป็นไปตามขั้นตอนวิธี SIMPLER [5] ซึ่งสรุปได้ดังนี้

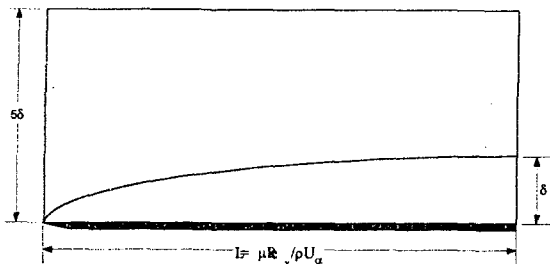
- 1) คำนวณสมการโมเมนต์เพื่อหาความเร็ว
- 2) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
- 3) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
- 4) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ด้วยค่าแก้ไขความดันดังสมการ (16)
- 5) คำนวณค่าพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนและอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนโดยใช้แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทหนึ่งสมการของ [12]
- 6) คำนวณสมการพลังงานเพื่อหาพลังงานรวมจำเพาะ
- 7) คำนวณความหนาแน่นจากสมการสภาวะ
- 8) คำนวณความหนืดพลวัตจากกฎของ Sutherland
- 9) คำนวณสภาพนำความร้อนจากนิยามของเลขพรันด์เทิล
- 10) กลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1 ใหม่จนกระทั่งการคำนวณครบ 500 รอบ เพื่อสร้างเงื่อนไขเริ่มต้น
- 11) คำนวณสมการโมเมนต์เพื่อหาความเร็ว
- 12) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
- 13) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
- 14) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากขั้นตอนที่ 11 ด้วยค่าแก้ไขความดันดังสมการ (16)
- 15) คำนวณสมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนเพื่อหาพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- 16) คำนวณสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนเพื่อหาอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
- 17) คำนวณสมการพลังงานเพื่อหาพลังงานรวมจำเพาะ
- 18) คำนวณความหนาแน่นจากสมการสภาวะ
- 19) คำนวณความหนืดพลวัตจากกฎของ Sutherland
- 20) คำนวณสภาพนำความร้อนจากนิยามของเลขพรันด์เทิล
- 21) กลับไปทำตามขั้นตอนที่ 11 ใหม่จนกระทั่งผลการคำนวณเข้าสู่หาค่าตอบ

4. การทดสอบซอฟต์แวร์

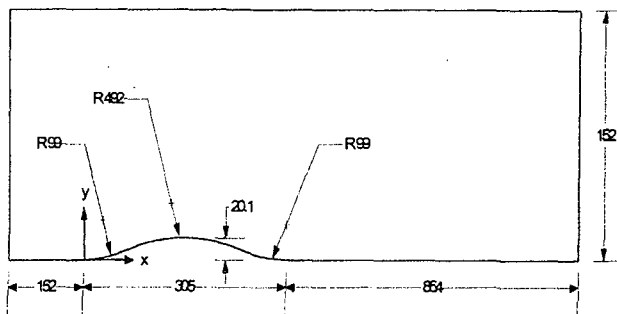
ความถูกต้องของซอฟต์แวร์ได้รับการทดสอบโดยนำผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ และข้อมูลที่ได้จากการทดลอง โดยเลือกการไหลผ่านแผ่นเรียบเป็นกรณีศึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและแบบจำลองการปั่นป่วนที่เลือกใช้ และเลือกการไหลผ่านส่วนโค้งกลมเป็นกรณีศึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow

5. ผลการคำนวณ

รูปที่ 2 และรูปที่ 3 แสดงรายละเอียดของแผ่นเรียบและส่วนโค้งกลม [13] ตามลำดับ

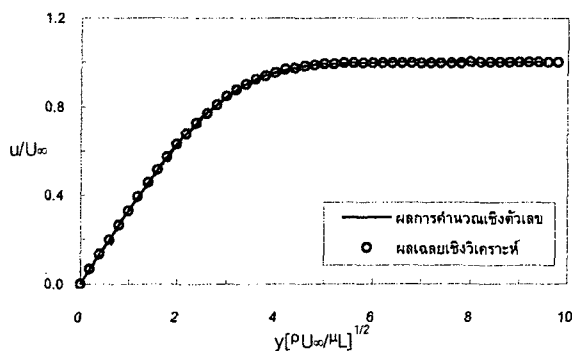


รูปที่ 2 รายละเอียดของแผ่นเรียบ



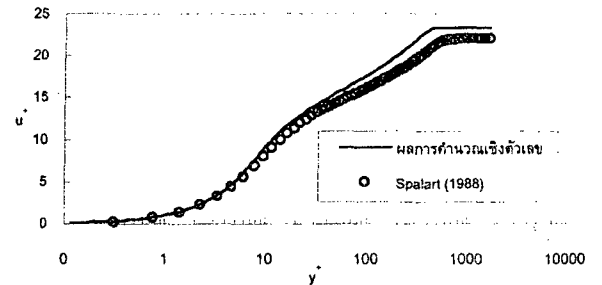
รูปที่ 3 รายละเอียดของส่วนโค้งกลม (หน่วยเป็นมิลลิเมตร)

รูปที่ 4 แสดงการกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นขีดผิวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบ ที่เลขมัค 0.1 โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ [14]

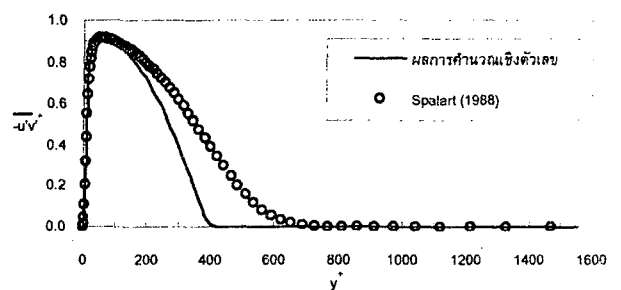


รูปที่ 4 การกระจายตัวของความเร็วเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

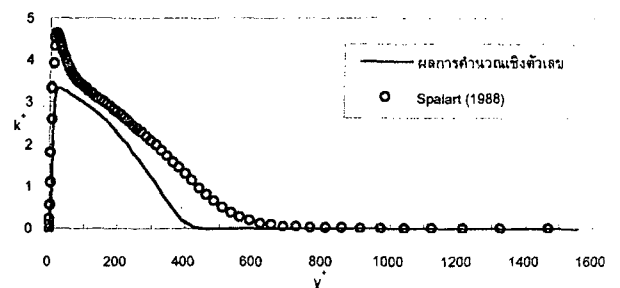
รูปที่ 5-7 แสดงผลการคำนวณของการไหลของชั้นขีดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบ ที่ $Re_\theta = 1410$ โดยเปรียบเทียบกับข้อมูล DNS ของ [15] รูปที่ 5 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว รูปที่ 6 แสดงการกระจายตัวของความเค้น $-\overline{u'v'}$ และรูปที่ 7 แสดงการกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน



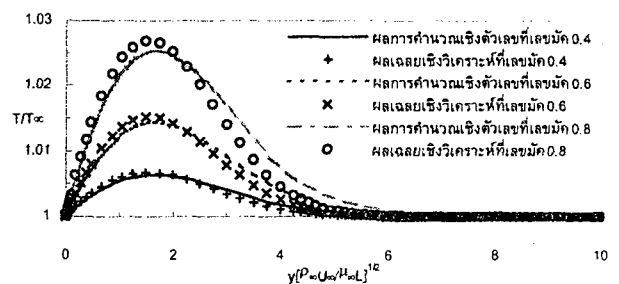
รูปที่ 5 การกระจายตัวของความเร็วเทียบกับข้อมูล DNS



รูปที่ 6 การกระจายตัวของความเค้น $-\overline{u'v'}$ เทียบกับข้อมูล DNS

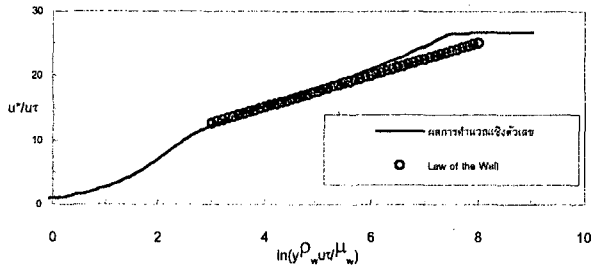


รูปที่ 7 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

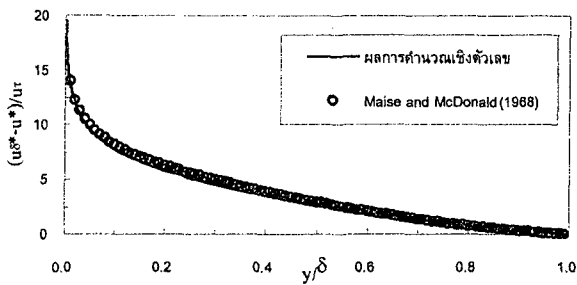


รูปที่ 8 การกระจายตัวของอุณหภูมิเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

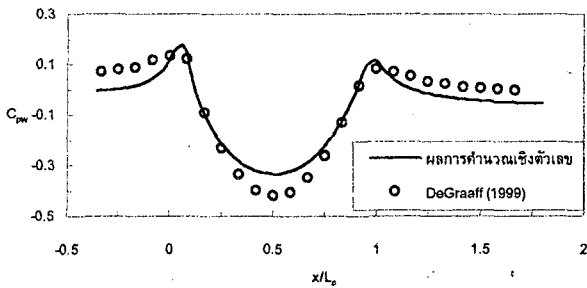
รูปที่ 8 แสดงการกระจายตัวของอนุกรมของการไหลของชั้นขีดผิวแบบราบเรียบและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบ ที่เลขมัค 0.4, 0.6 และ 0.8 โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ [14, 16]



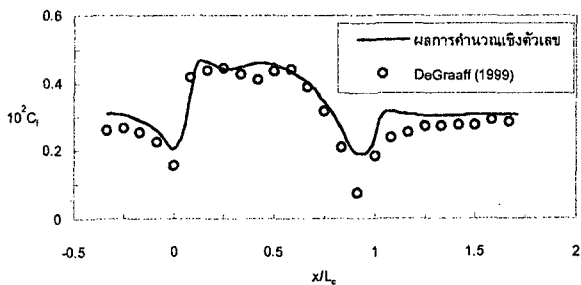
รูปที่ 9 การกระจายตัวของความเร็วเทียบกับ Law of the Wall



รูปที่ 10 การกระจายตัวของความเร็วเทียบกับข้อมูลจากการทดลอง



รูปที่ 11 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความดันสถิตที่พื้นผิว

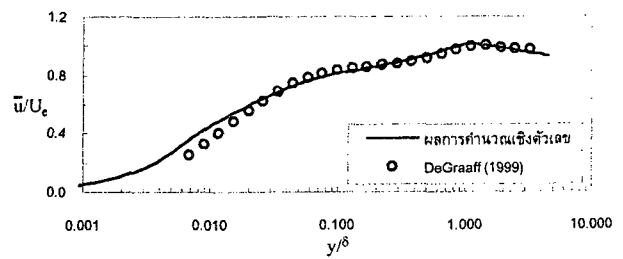


รูปที่ 12 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิว

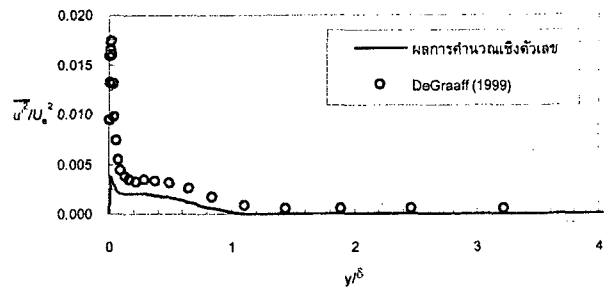
รูปที่ 9 และรูปที่ 10 แสดงการกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นขีดผิวแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบ ที่เลขมัค

0.824 โดยเปรียบเทียบกับ Law of the Wall และข้อมูลที่ได้จากการทดลอง [17, 18]

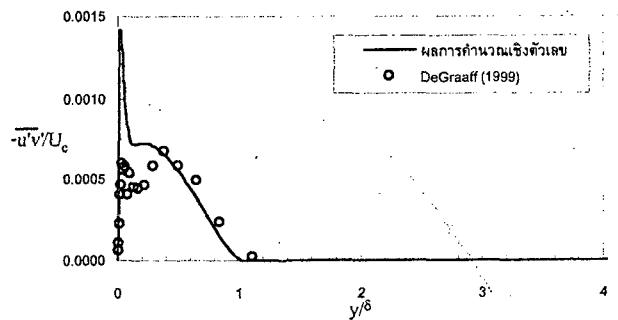
รูปที่ 11-16 แสดงผลการคำนวณของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมเปรียบเทียบกับ [13] โดยที่ $U_\infty = 14.4 \text{ m/s}$ ซึ่งเงื่อนไขขอบที่ทางเข้าของโดเมนสร้างขึ้นจากการไหลผ่านแผ่นเรียบ โดยกำหนดให้ความสูงของชั้นขีดผิวที่บริเวณดังกล่าวมีขนาด 1.5 เท่าของความสูงของส่วนโค้งกลม รูปที่ 11 แสดงการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความดันสถิตที่พื้นผิว รูปที่ 12 แสดงการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิว รูปที่ 13-16 แสดงการกระจายตัวของค่าต่าง ๆ ได้แก่ ความเร็ว ความเค้น u'^2 ความเค้น $-u'v'$ และพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน ที่บริเวณจุดยอดของส่วนโค้งกลม



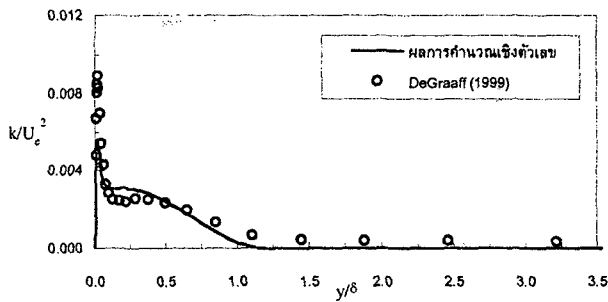
รูปที่ 13 การกระจายตัวของความเร็วที่จุดยอดของส่วนโค้งกลม



รูปที่ 14 การกระจายตัวของความเค้น u'^2 ที่จุดยอดของส่วนโค้งกลม



รูปที่ 15 การกระจายตัวของความเค้น $-u'v'$ ที่จุดยอดของส่วนโค้งกลม



รูปที่ 16 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนที่จุดยอดของ ส่วนโค้งกลม

6. สรุปและวิจารณ์

ซอฟต์แวร์ที่สร้างขึ้นได้แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข แบบจำลองการปั่นป่วน และการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow ที่ใช้ในงานวิจัยนี้สามารถใช้ศึกษาพฤติกรรมของการไหลได้อย่างแม่นยำพอสมควร ในอนาคตจะเพิ่มความสามารถให้กับซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลในสามมิติได้ รวมทั้งเปลี่ยนแบบจำลองการปั่นป่วนเพื่อให้ผลการคำนวณมีความถูกต้องมากกว่าในปัจจุบัน

7. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ คุณคงเทพ บุญมี ที่ให้คำปรึกษาเกี่ยวกับการโปรแกรมคอมพิวเตอร์

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการทำวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เอกสารอ้างอิง

- [1] Wilcox, D. C., "Turbulence Modeling for CFD," DCW, California, 1993.
- [2] Launder, B. E., and Sharma, B. I., "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc," Letters in Heat and Mass Transfer, Vol.1, 1974, pp.131-138.
- [3] Patel, V. C., Rodi, W., and Scheuerer, G., "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review," AIAA Journal, Vol.23, No.9, 1985, pp.1308-1319.
- [4] Varangrat, S., "Computational Study of Compressible Flow in an S-Shaped Duct," Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, University of London, 1999.
- [5] Patankar, S. V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere, U.S.A., 1980.
- [6] Versteeg, H. K., and Malalasekera, W., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method," Longman Scientific & Technical, Malaysia, 1995.

- [7] Rhie, C. M., and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," AIAA Journal, Vol.21 No.11, 1983, pp.1525-1532.
- [8] Karki, K. C., and Patankar, S. V., "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations," AIAA Journal, Vol.27, No.9, 1989, pp.1167-1174.
- [9] Demirdzic, I., Lilek, Z., and Peric, M., "A Collocated Finite Volume Method for Predicting Flows at All Speeds," International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.16, 1993, pp.1029-1050.
- [10] Nicholas, J., Chitsomboon, T., and Zhu, J., "Modification of the Two-Equation Turbulence Model in NPARC to a Chien Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Formulation," NASA Technical Memorandum 106710, 1994.
- [11] Uslu, S., "Numerical Prediction of Transonic Flow in Turbine Blade Passages," Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, University of London, 1994.
- [12] Hassid, S., and Poreh, M., "A Turbulent Energy Dissipation Model for Flows with Drag Reduction," ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol.100, 1978, pp.107-112.
- [13] DeGraaff, D. B., "Reynolds Number Scaling of the Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate and on Swept and Unswept Bumps," Ph.D. Dissertation, Stanford University, California, 1999.
- [14] White, F. M., "Viscous Fluid Flow," McGraw-Hill, Singapore, 1991.
- [15] Spalart, P. R., "Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to $Re_\theta = 1410$," Journal of Fluid Mechanics, Vol.187, 1988, pp.61-98.
- [16] Juntasaro, E., and Sawatmongkhon, B., "Compressible Laminar Flow towards a Numerical Wind Tunnel," Proceedings of the 13th National Mechanical Engineering Conference, 2-3 December 1999, Royal Cliff Beach Resort Hotel, South Pattaya, Chonburi, Thailand, Vol.1, pp.132-137.
- [17] Motallebi, F., "Reynolds Number Effects on the Prediction of Mean Flow Data for Adiabatic 2-D Compressible Boundary Layers," Aeronautical Journal, 1996, pp.53-59.
- [18] Maise, G., and McDonald, H., "Mixing Length and Kinematic Eddy Viscosity in a Compressible Boundary Layer," AIAA Journal, Vol.6, No.1, 1968, pp.73-80.
- [19] ทวิช จิตรสมบูรณ์ และ สุวรรณา อรรฐาเมตร์, "โมย้า: โปรแกรมเพื่อวิเคราะห์การไหล," ใน สัมมนาวิชาการวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 13, ปี พ.ศ. 2542, หน้า 124-131.