

## “โมย่า: โปรแกรมเพื่อวิเคราะห์การไหล”

ทวิช จิตรสมบูรณ์ และ สุวรรณ อรรธนาเมศรี  
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000  
โทร. (044)224286 E-mail: tabon@ccs.sut.ac.th

### บทคัดย่อ

โปรแกรม “โมย่า” เป็นโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นบนพื้นฐานของกลวิธีไฟไนท์วอลลุ่ม เพื่อแก้สมการนาเวียร์-สโตคในสองมิติ สมการไฟไนท์วอลลุ่มที่เกิดขึ้นถูกแก้ด้วยกรวมวิธีแบบอิมพลีซิทโดยใช้การประมาณค่าด้วยการแตกแมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมด้านบนด้านล่าง (LU Approximate Factorization) ค่าขอบเขตที่สร้างไว้ในโปรแกรมมีความหลากหลาย ทำให้สามารถแก้ปัญหาที่มีค่าขอบเขตได้ในหลายรูปแบบ เช่น ต่ำกว่าเสียง, เหนือเสียง, อุนหนุมิกงท์, ไม่มีการส่งถ่ายความร้อน, การไหลแบบไม่มีแรงเสียดทาน หรือ แนวสมมาตร เป็นต้น แม้จะเป็นโปรแกรมแบบสองมิติ แต่ก็ยังสามารถแก้ปัญหาหนึ่งมิติได้ด้วยโดยไม่ต้องสร้างกริดในสองมิติ การทดสอบโปรแกรมด้วยปัญหาที่หลากหลายแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมมีความถูกต้องในระดับที่สามารถใช้ประโยชน์ในการวิจัยและทางปฏิบัติการวิศวกรรมศาสตร์ได้

### Abstract

MOYA is a computational fluid dynamics (CFD) program that has been developed based on the finite volume methodology to solve the two dimensional Navier-Stokes equations. Lower-Upper (LU) approximate factorization implicit technique was adopted as the solution procedure. Options built into the program make it capable of solving problems with various boundary condition types such as subsonic, supersonic, adiabatic, slip, no-slip and symmetry plane. Even though MOYA is a two dimensional program it can also solve one dimensional problems without having to construct a two dimensional grid. Diversified numerical test cases have demonstrated the program's usefulness as a tool for research as well as engineering applications.

### Nomenclature

- $e$  = พลังงานจำเพาะ
- $e_i$  = พลังงานรวมจำเพาะ
- $E, F$  = ฟลักซ์เวกเตอร์ทางแกน  $x$  และ  $y$
- $J$  = จาคอบีเนียนของการเปลี่ยนแปลง
- $n$  = ตัวเลขนับระดับเวลา

- $N_x, N_y$  = จำนวนกริดในทิศทาง  $x, y$
- $p$  = ความดัน
- $q_x$  = อัตราการส่งผ่านความร้อนทางแกน  $x$
- $R$  = ปริมาณคงเหลือ (Residual)
- $t$  = เวลา
- $u, v$  = องค์ประกอบของความเร็ว
- $\bar{v}$  = เวกเตอร์ความเร็ว
- $x, y$  = สัญลักษณ์บ่งพิกัดแบบฉาก
- $\delta_{ij}$  = Kronecker's delta
- $\Delta$  = การหาค่าเต็มหน่วยแบบเดินหน้า
- $\nabla$  = การหาค่าเต็มหน่วยแบบถอยหลัง
- $\gamma$  = อัตราส่วนความร้อนจำเพาะ
- $\xi, \eta$  = สัญลักษณ์บ่งพิกัดแบบแนบกับวัตถุ
- $\mu$  = ความหนืด
- $\tau$  = เทนเซอร์ของความเค้น
- $\rho$  = ความหนาแน่น

### 1. บทนำ

สมการนาเวียร์-สโตคเป็นสมการที่สามารถให้ผลเฉลยอย่างสมบูรณ์แบบในการไหลตัวของของไหล จึงมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการศึกษากการไหลตัวของของไหล ความไม่สามารถแก้สมการนาเวียร์-สโตคได้ในรูปทั่วไปโดยแนวทางทางทฤษฎีเพราะคุณสมบัติของความเป็นสมการไม่เชิงเส้นตรงทำให้ไม่สามารถหาคำตอบให้กับการไหลในทางวิศวกรรมได้ วิศวกรในอดีตจึงไม่มีทางเลือกอื่นนอกจากการทำกริดทดลอง เช่น โดยการใช้อูโมงคัลม เป็นต้น ซึ่งทำให้กรรมวิธีการออกแบบอุปกรณ์ทางการไหลเป็นไปด้วยความล่าช้า และมีราคาแพง

ในปัจจุบันนี้สามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยแก้สมการนาเวียร์-สโตคได้ด้วยกรรมวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ เช่น ไฟไนท์ดิฟเฟอเรนซ์ ไฟไนท์อีเลเมนต์ และไฟไนท์วอลลุ่ม เป็นต้น ซึ่งเป็นที่นิยมอย่างแพร่หลายในอารยะประเทศทางตะวันตก และกำลังเริ่มแพร่เข้ามาในประเทศไทย ซึ่งสังคมวิชาการของไทยก็ต้องตัดสินใจเหมือนเช่นกรณีเทคโนโลยีชนิดอื่นๆว่า จะซื้อสำเร็จรูปหรือจะสร้างเอง การซื้อสำเร็จรูปนั้นจะทำให้ได้ของที่เร็วกว่าและราคาถูกกว่า แต่จะทำให้ไม่สามารถสร้างรากฐานทางวิชาการในด้านนี้ได้ ส่วนการสร้างเองนั้นแม้จะแพงกว่าและช้ากว่าใน

ระยะแรก แต่สามารถสร้างความเข้มแข็งทางวิชาการในระยะยาวต่อประเทศ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงเห็นสมควรสร้างโปรแกรมเพื่อการจำลองการไหลตัวของไหลขึ้น

โปรแกรมนี้ได้รับการตั้งชื่อว่า “มอยา” ซึ่งสังเคราะห์ขึ้นมาจากพยัญชนะในวลี “โปรแกรมของคนไทยเพื่อวิเคราะห์การไหล” หากสลับพยางค์ก็จะได้ชื่อสามัญของวีรสตรีแห่งจังหวัดนครราชสีมา

## 2. การสร้างโปรแกรม

ในการสร้างโปรแกรมได้เลือกใช้กลวิธีแบบไฟไนท์วอลลุ่มด้วยเห็นว่าเป็นกลวิธีที่เหมาะสมกับการไหลตัวของของไหลมากที่สุด เพราะสร้างขึ้นบนพื้นฐานของการสมดุลแห่งพลังค์ต่างๆที่วิ่งผ่านเข้าออกพื้นที่โดยรอบของก้อนมวลที่กำลังพิจารณา ซึ่งเป็นพฤติกรรมขั้นพื้นฐานที่สุดในการสร้างสมการนาเวียร์-สโตคของของไหล ดังนั้นจึงเป็นกลวิธีเพื่อการแก้ปัญหาการไหลตัวของของไหลที่นิยมใช้กันมากที่สุดในปัจจุบัน

กระบวนการสร้างโปรแกรมสามารถอธิบายเป็นขั้นตอนตามลำดับโดยเริ่มตั้งแต่การนำเสนอสมการนาเวียร์-สโตคแบบสองมิติ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ได้ดังนี้ [1, 2]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (1)$$

เมื่อ  $U$ ,  $E$  และ  $F$  คือเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

$$U = [p, pu, pv, pe, J]^T \quad (2)$$

$$E = \begin{bmatrix} pu \\ puu + p - \tau_{xx} \\ puv - \tau_{xy} \\ (pe_i + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$F = \begin{bmatrix} pv \\ puv - \tau_{xy} \\ pvv + p - \tau_{yy} \\ (pe_i + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

เมื่อ  $p = (\gamma - 1)pe$  (5)

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

$$q_x = k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (7)$$

สมการนี้เป็นสมการที่สร้างอยู่ในพิกัดฉาก (Rectangular coordinates) ซึ่งเป็นรูปแบบสมการที่ง่ายที่สุด แต่หากใช้ในรูปแบบนี้จะทำให้การกำหนดค่าขอบเขตในรูปทรงการไหลต่างๆได้ลำบากมาก จึงปรับเปลี่ยน

พิกัดให้เป็นพิกัดวัตถุ (body-fitted coordinates) ซึ่งในที่นี้จะเป็นการเปลี่ยนจาก  $x, y$  เป็น  $\xi, \eta$  ซึ่งจะทำให้เกิดการเน็ตรงกันข้ามคือสมการจะยุ่งยากขึ้นแต่การกำหนดค่าขอบเขตสามารถกระทำได้ง่าย จึงสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

เมื่อ

$$q = J^{-1}U \quad (9)$$

$$\bar{E} = J^{-1}(\xi_x E + \xi_y F) \quad (10)$$

$$\bar{F} = J^{-1}(\eta_x E + \eta_y F) \quad (11)$$

และให้นิยาม  $J$  ดังนี้

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (12)$$

อนุพันธ์ทุกตัวประเมินในพิกัดวัตถุเท่านั้นเช่น

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x) \quad (13)$$

เพื่อความสะดวกในการสื่อความหมายสามารถเขียนสมการ (8) โดยสัญลักษณ์ย่อเสียใหม่ได้ว่า

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -R \quad (14)$$

เมื่อ  $R$  หมายถึงพลังค์สุทธิทั้งหมด พลังค์ในที่นี้สร้างขึ้นโดยการกระจายไฟไนท์วอลลุ่ม สามารถที่จะอินทิเกรตสมการในมิติเวลาได้ด้วยกรรมวิธีเชิงตัวเลขคือ

$$\frac{(q^{n+1} - q^n)}{\Delta t} = \frac{\Delta^t q}{\Delta t} = -R \quad (15)$$

ในที่นี้ได้ใช้กรรมวิธีแบบ Euler's ในการกระจายมิติเวลา ซึ่งทำให้ได้ความถูกต้องแบบระดับ 1 (first order) เท่านั้น หากต้องการกระจายในระดับความถูกต้องสูงขึ้นก็สามารถกระทำได้ง่าย เช่นโดยการใช้การกระจายแบบรังกะคัตตะ(Runge-Kutta) เป็นต้น อย่างไรก็ตามค่า  $R$  ซึ่งเป็นค่าในมิติของเนื้อที่นั้น อาจตีค่าที่ระดับเวลา  $n$  หรือ  $n+1$  หรือ ในระหว่างกลางของระดับเวลาก็ได้ หากตีค่าที่  $n$  ก็จะกลายเป็นการหาค่าตอบแบบโอดเด่น (explicit) แต่หากตีค่าที่  $n+1$  ก็จะเป็นการหาค่าตอบแบบซ่อนเร้น (implicit) ซึ่งในอย่างแรกเป็นกรรมวิธีที่ง่ายกว่า (แต่ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า) ในการวิจัยและพัฒนาจะใช้กรรมวิธีแบบซ่อนเร้นในการหาค่าตอบ

เนื่องจาก R แปรผันกับ q ในลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรง การจะหาค่า  $q^{n+1}$  โดยตรงจากสมการไม่สามารถกระทำได้ จึงต้องทำการแปลงสมการให้เป็นเชิงเส้นตรง โดยการกระจายรอบจุดที่ระดับเวลา n ดังนี้

$$R^{n+1} = R^n + \frac{\partial R^n}{\partial q} \Delta^n q \quad (16)$$

เมื่อแทนค่ากลับเข้าไปในสมการ (15) และจัดสมการเสียใหม่ จะได้

$$\left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial R^n}{\partial q} \right) \Delta^n q = -R^n \quad (17)$$

เมื่อ  $\partial R/\partial q$  คือ Jacobian ซึ่งมีค่าดังนี้คือ

$$\frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial \eta} \quad (18)$$

$$\text{เมื่อ } \bar{A} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} = (\xi_x A + \xi_y B) \quad (19)$$

$$\bar{B} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} = (\eta_x A + \eta_y B) \quad (20)$$

และ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{v}^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ -u[\gamma E - (\gamma-1)\bar{v}^2] & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(\bar{v}^2 + 2u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma v \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{v}^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -v[\gamma E - (\gamma-1)\bar{v}^2] & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(\bar{v}^2 + 2v^2) & \gamma v \end{pmatrix} \quad (22)$$

จาก (17) จะเห็นได้ว่าหากให้  $\Delta t$  เข้าหา  $\infty$  พจน์ที่เหลือจะเป็นเสมือนการกำหนดให้ค่า  $R^{n+1}$  เป็นศูนย์ตามกรรมวิธีการหาค่าแบบ Newton iteration ซึ่งเป็นกรรมวิธีการหาค่าตอบที่รวดเร็วมาก และการทำเช่นนี้จะกระทำได้เฉพาะเมื่อใช้วิธีหาค่าตอบแบบช้อนเร้นเท่านั้น ซึ่งหากพิจารณาสมการข้างบนอีกครั้งจะเห็นได้ว่าในกรรมวิธีแบบนี้จะต้องแก้สมการไปพร้อมกัน (ต้อง invert matrix) เพราะทุกสมการเกี่ยวพันกัน แต่ในการแก้ปัญหาแบบโคดเด่นนั้นไม่มีพจน์ของ  $\partial R/\partial q$  ทำให้สามารถแก้สมการทีละสมการได้โดยง่าย ในกรรมวิธีแบบช้อนเร้นสามารถที่จะใช้  $\Delta t$  ค่าใหญ่ๆได้ โดยไม่ทำให้เกิดการเสถียร (instability) แต่ในแบบโคดเด่นจำเป็นจะต้องใช้ค่า  $\Delta t$  เล็กๆเท่านั้น เพื่อดำรงความเสถียรของสมการไว้ ในระบบสมการ 2 มิติที่มีสมการทั้งหมด 4 สมการ การจะแก้สมการ (17) โดยตรงจะทำให้ต้องแก้สมการพีชคณิตที่มีขนาด  $(N_x + N_y) \times (N_x + N_y)$  โดยแต่ละจุดของเมทริกซ์

ก็เป็นเมทริกซ์เล็กที่มีขนาด  $4 \times 4$  การแก้สมการอย่างถูกต้องโดยตรงเป็นการสิ้นเปลืองมากเพราะในแต่ละระดับการคำนวณที่ n ใดๆ จะต้องทำการคำนวณย่อยในระดับ  $(4N_x + 4N_y)^3$  ครั้ง ในทางปฏิบัติจึงนิยมที่จะทำการแก้สมการโดยการประมาณการในลักษณะต่างๆ เช่นโดยวิธีการแตกตัวในเชิงเส้น (spatial approximate factorization) [3] โดยวิธีการ Block-Line Gauss-Sidel [4] เป็นต้น ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธี Lower-Upper approximate factorization [5] เพราะเห็นว่าเป็นวิธีที่รวดเร็วมาก และมีการคำนวณอยู่ในระดับ  $4^2 N_x + 4^2 N_y$  ครั้งต่อรอบ

การใช้การประมาณการนั้นทำให้จำนวนครั้งของการคำนวณน้อยลงก็จริง แต่ก็ทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการคำนวณด้วยซึ่งเรียกว่า Approximate factorization error (AFE) ค่า AFE นี้ทำให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบช้ากว่าอัตราการลู่เข้าตามปกติของกรรมวิธี Newton iteration (ซึ่งตามทฤษฎีจะลู่เข้าถึงสองระดับต่อรอบของการคำนวณ) นอกจากนี้ AFE ยังทำลายความถูกต้องของคำตอบในแต่ละระดับเวลาอีกด้วย ทำให้กรรมวิธีแบบนี้เหมาะสำหรับการหาค่าสุดท้ายที่ไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลาเท่านั้น (Steady state solution)

เพื่อความสะดวกต่อการให้ความหมายต่อไป จะเขียนสมการ (17) ในสัญลักษณ์ตัวใหม่ได้ดังนี้

$$[L + D + U] \Delta^n q = -R^n \quad (23)$$

ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า L (lower) คือพจน์ทุกพจน์ที่มีผลรวมของดัชนีบ่งพิกัดต่ำกว่าผลรวมของดัชนีบ่งพิกัด ณ จุด ตัวอย่างเช่น ณ จุดพิกัด i, j ใดๆ ผลรวมของดัชนีบ่งพิกัด ณ จุดจะได้เป็น i + j ดังนั้นพจน์ A ที่มีดัชนีบ่งพิกัดเป็น (i-1, j), (i, j-1) และ (i-1, j-1) จะถูกจัดให้เป็นพจน์ในกลุ่ม L ในเชิงตรงกันข้ามพจน์ในกลุ่ม U (upper) คือพจน์ที่มีผลรวมของดัชนีบ่งพิกัดสูงกว่าผลรวมของดัชนีบ่งพิกัด ณ จุด ส่วน D (diagonal) ก็คือพจน์ที่มีผลรวมของดัชนีบ่งพิกัดเท่ากับผลรวมของดัชนีบ่งพิกัด ณ จุด ในการแก้สมการจะแบ่งออกเป็นสองขั้นตอนคือ

$$(L + D) \Delta^n q = -R^n \quad (24)$$

$$(D + U) \Delta^n q = -R^n - L \Delta^n q = D \Delta^n q \quad (25)$$

ซึ่งในแต่ละขั้นตอนนั้นจะเห็นว่าไม่มีการอินเวอร์ทเมทริกซ์เลย หากแก้สมการตามแนวเส้น i+j เท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง ทำให้สามารถทำการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว หากรวมขั้นตอนทั้งสองเข้าด้วยกันจะได้สมการรวมดังนี้

$$[L + D] D^{-1} [D + U] \Delta^n q = -R^n \quad (26)$$

$$[L + D + U] \Delta^n q + [LD^{-1}U] \Delta^n q = -R^n \quad (27)$$

ซึ่งทำให้เห็นว่า AFE ที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ  $[LD^{-1}U] \Delta^n q$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปขั้นตอนในการคำนวณเชิงตัวเลขได้ดังนี้

1) คำนวณพจน์  $R^n$  ในพิกัดวัตถุ ด้วยการหาฟลักซ์สุทธิตามกรรมวิธี

ไฟในทวอลลุม

- 2) กำหนดค่า  $\Delta t$  ซึ่งในโปรแกรมนี้ค่า  $\Delta t$  ถูกกำหนดโดยค่า CFL (Courant-Freidrich-Lewy) ซึ่งยังผลให้  $\Delta t$  แปรผันไปในแต่ละจุดพิกัด
- 3) สร้างพจน์  $L, D, U$  ในทุกพิกัดจุด ซึ่งแต่ละพจน์จะเป็นเมทริกซ์ย่อยขนาด  $4 \times 4$
- 4) แก้มการ (24) และ (25) ตามลำดับ
- 5) หา  $q^{n+1}$
- 6) เริ่มต้นการคำนวณในระดับเวลาถัดไป ( $n+1$ ) โดยวนซ้ำกลับไปทำในขั้นตอนที่ 1) ถึง 5) อีกเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าตอบลู่เข้า (converge) เกณฑ์ในการพิจารณาว่าค่าตอบลู่เข้านั้นใช้การพิจารณาค่า rms ของ  $R$  ซึ่งให้คำนิยามได้ดังนี้

$$R_{rms} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} R_{ij}^2}}{N_x \times N_y} \quad (28)$$

### 3. ค่าความหนืดจำลอง (Artificial Viscosity)

เนื่องจากการหาฟลักซ์ที่หน้าของวอลลุมเป็นการหาค่าเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่คนละด้านของหน้าวอลลุม ซึ่งเปรียบได้กับการทำการแตกตัวอย่างสมมาตรจากจุด (central difference) สำหรับกลวิธีแบบไฟในทวอลลุม ในการทำเช่นนี้กระบวนการหาค่าตอบอาจไม่เสถียรได้ง่ายเพราะเกิดการไม่เกาะเกี่ยวกัน (decoupling) ระหว่างจุดที่มีค่าเลขบอกพิกัดเป็นเลขคู่กับจุดที่มีค่าเลขบอกพิกัดเป็นเลขคี่ ซึ่งค่าคำตอบในทั้งสองระบบพิกัดอาจเป็นอิสระต่อกัน (out of phase) โดยสิ้นเชิง โดยที่ต่างก็ยังเป็นผลเฉลยของสมการนาเวียร์สโตค เพื่อสร้างกลไกให้มีการเกาะเกี่ยวกันระหว่างระบบพิกัดดังกล่าว จึงจัดสร้างระบบความหนืดจำลองขึ้น โดยที่ขนาดของพจน์เหล่านี้มีค่าน้อย จึงไม่กระทบต่อความแม่นยำของผลเฉลยมากนัก

กำหนดให้พจน์ของความหนืดจำลองในแกน  $\xi$  เป็นดังนี้ [6]

$$D_\xi = \nabla_\xi \left( \frac{\lambda_\xi}{J} (\varepsilon_2 \Delta_\xi - \varepsilon_1 \Delta_\xi \nabla_\xi \Delta_\xi) \right) (Jq) \quad (29)$$

เมื่อ  $\varepsilon_2 = \kappa_2 \delta_p$  (30)

$$\delta_p = \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{\omega p_i} \quad (31)$$

$$\varepsilon_1 = \text{Max}(0, \kappa_1 - \varepsilon_2) \quad (32)$$

$$\lambda_\xi = |\bar{u}| + |\bar{a}| \quad (33)$$

$$\bar{u} = \xi_x u + \xi_y v \quad (34)$$

$$\bar{a} = \sqrt{(\xi_x^2 + \xi_y^2) \gamma P / \rho} \quad (35)$$

ค่า  $\delta_p$  ใน (31) เป็นค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนของความดัน ซึ่งเสนอโดย [7] และพบว่า เป็น  $\delta_p$  ที่มีคุณลักษณะดีกว่าเดิมที่เสนอไว้ใน [6]  $\omega$  มีค่าประมาณ 1.0 พจน์ในแกน  $\eta$  สามารถเขียนได้ในทำนองเดียวกัน โดยเปลี่ยน  $\xi$  เป็น  $\eta$  จะเห็นว่าความหนืดจำลองมีอยู่สองระบบคือระบบที่เป็นอนุพันธ์อันดับสองและระบบอนุพันธ์อันดับสี่ ระบบแรกสามารถสร้างความเสถียรได้สูงในกรณีที่มีการกระโดดของคำตอบแบบรุนแรงเฉพาะจุด ส่วนระบบหลังเป็นการควบคุมการไม่เสถียรขั้นพื้นฐานในทุกๆจุดโดยทั่วไป ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดจำลองในทั้งสองระบบ ( $\kappa_2, \kappa_4$ ) มาจากการวิเคราะห์คลื่นฟูเรียร์ และกำหนดค่า  $\kappa_2 = 1/2$  และ  $\kappa_4 = 1/6$  เพื่อให้สามารถกำจัดขนาดคลื่นฟูเรียร์ที่มีความถี่สูงสุดได้ดีที่สุด

### 4. ค่าขอบเขต (Boundary Condition)

ค่าขอบเขตนับว่าเป็นหัวใจสำคัญประการหนึ่งในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข หากค่าขอบเขตไม่ถูกต้องก็จะทำให้คำตอบไม่ถูกต้องตามไปด้วย การให้ค่าขอบเขตต้องคำนึงถึงคุณลักษณะของสมการที่กำลังหาค่าตอบว่าเป็นสมการประเภทใดในสามประเภท กล่าวคือ อีลิปติก พาราโบลิก หรือ ไฮเพอร์โบลิก ซึ่งในแต่ละประเภทต้องการค่าขอบเขตที่แตกต่างกันทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ การจะให้ค่าขอบเขตที่ถูกต้องสมบูรณ์เป็นไปได้ยากมาก ในการคำนวณจริงวิศวกรมักใช้ "วิศวกรรมญาณ" (Engineering Intuition) ประกอบด้วย โดยพยายามให้ได้คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของคณิตศาสตร์เท่าที่จะสามารถกระทำได้

ในโปรแกรมโมยาได้ทำการสร้างตัวเลือกให้แก่ผู้ใช้ในการกำหนดค่าขอบเขตในกรณีดังต่อไปนี้คือ

1. Subsonic Inflow
2. Subsonic outflow
3. Supersonic Inflow
4. Supersonic outflow
5. Solid wall (no slip, no penetration)
6. Adiabatic wall
7. Constant temperature wall
8. Plane of symmetry
9. Slip wall (สำหรับการไหลแบบไม่คิดความหนืด)
10. Cylindrical plane (สำหรับการจำลองการไหลในพิกัดทรงกระบอก)

### 5. การทดสอบโปรแกรม (Code Validation)

ก่อนที่จะนำโปรแกรมไปใช้งานจริงได้อย่างมั่นใจ จะต้องทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมในปัญหาที่หลากหลายเสียก่อน โดยเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับค่าคำตอบโดยกรรมวิธีอื่น เช่น คำตอบเชิงทฤษฎี หรือคำตอบที่ได้จากการทดลอง เป็นต้น ในการนี้ได้ทำการทดสอบโปรแกรมในปัญหาต่างๆดังต่อไปนี้

- 1) การไหลในชั้นผิวบาง (boundary layer) ในย่านความเร็วต่ำ
- 2) การไหลแบบความเร็วต่ำในท่อภายใต้แรงดัน (Poiseuille flow)
- 3) การไหลแบบไม่คิดความหนืดด้วยความเร็วเหนือเสียงผ่านพื้นเอียง

แบบลิ้ม

- 4) การไหลแบบไม่คิดความหนืดอย่างอัดตัวได้ในท่อลู่เข้าบานออก (convergent-divergent nozzle)
- 5) การไหลแบบการพาความร้อนอิสระข้างผ่านความร้อนในแนวตั้ง ซึ่งจะเห็นว่าได้ทำการทดสอบในปัญหาที่มีความหลากหลายในหลายแง่มุม เช่น ความเร็วต่ำ และความเร็วสูง, การไหลแบบด้านนอกและด้านใน, การขับของไหลด้วยแรงดัน แรงเฉือน และ แรงโน้มถ่วง, การไหลแบบอัดตัวได้ และอัดตัวไม่ได้

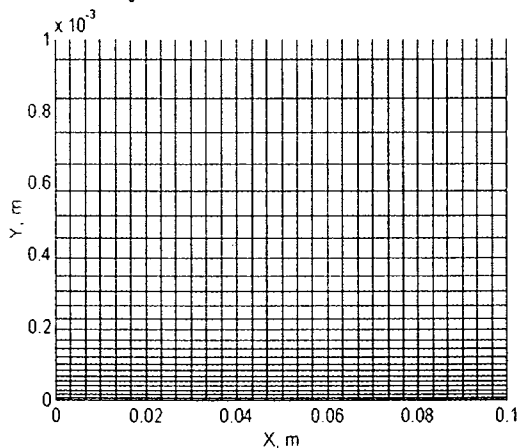
### 6. ผลลัพธ์ที่ได้

ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบโปรแกรมจะได้นำเสนอเป็นกรณีไปดังนี้

#### 6.1 การไหลในชั้นผิวบางในย่านความเร็วต่ำ

การไหลนี้เป็นการไหลในชั้นผิวบางผ่านแผ่นเรียบ กำหนดให้ความเร็วตรงทางเข้ามีค่า Mach number เท่ากับ 0.2 และมีความดัน 101325 Pa มีอุณหภูมิ 308K และความเร็วเข้าเป็นความเร็วที่มีค่าเดียว (uniform flow) เมื่อของไหลมากระทบแผ่นเรียบความเร็วที่ติดกับแผ่นเรียบจะมีค่าเป็นศูนย์และไม่เม้นต์ที่มีค่าน้อยจะคืบคลาน (diffuse) เข้าไปข้างในเนื้อของไหลและในขณะเดียวกันก็ถูกพา (convect) ไปยังด้านท้ายของการไหลด้วยความเร็วของของไหล การสมดุลกันของการคืบคลานและการพาทำให้เกิดเป็นเยื่อชั้นผิวบาง ซึ่งมีค่าตอบเชิงทฤษฎีที่มีความถูกต้องสูงเรียกว่าคำตอบของบลาสีซ (Blasius's solution) ซึ่งอาจหาได้ในตำรามาตรฐานทางกลศาสตร์ของไหลเป็นส่วนมากเช่นใน [8]

รูปที่ 6.1.1 แสดงกริดที่ใช้ในการคำนวณซึ่งเป็นกริดขนาด 51x51 โดยกริดในทางแกน x (ซึ่งมีขนาด 10 ซม.) ถูกแบ่งออกในขนาดที่เท่ากัน ส่วนกริดในทางแกน y นั้น มีความหนาแน่นแตกต่างกันไป โดยกริดมีความหนาแน่นสูงในย่านใกล้แผ่นเรียบ ทั้งนี้เพื่อให้สามารถแก้สมการได้อย่างถูกต้องมากยิ่งขึ้นในย่านใกล้แผ่นเรียบซึ่งการไหลมีความชันของความเร็วสูงกว่าด้านนอก

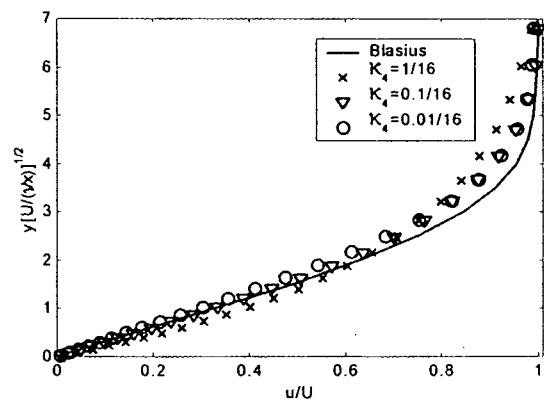


รูปที่ 6.1.1 กริด (บางส่วน) สำหรับปัญหาการไหลในชั้นผิวบาง

ในขั้นแรกได้ทำการประเมินความหนา ของชั้นผิวบางโดยทฤษฎีว่า  $\delta = 5.5x/\sqrt{Re_x} \approx 0.00075$  และจัดให้มีจำนวนกริดอยู่ในย่านนี้ 22 กริด ในการนี้ได้จัดให้กริดที่หนึ่งมีความหนา  $8 \times 10^{-4}$  ซม.และกริดถัดไปมีความหนาเพิ่มขึ้นครั้งละ 12% จนกระทั่งไม่สามารถที่จะขยายตัวได้

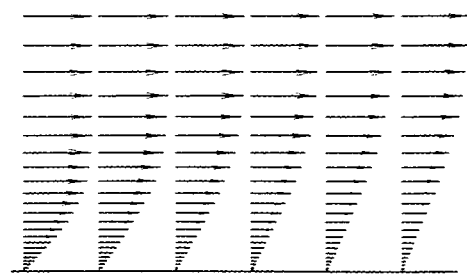
อีกเพราะหากขยายตัวต่อไปจะทำให้ยาวเกินความหนาของค่าทางแกน y ซึ่งกำหนดให้มีความหนาประมาณ 5 เท่าของ  $\delta$

ค่าคำตอบที่ได้ได้พล็อตเปรียบเทียบกับคำตอบของบลาสีซในรูปที่ 6.1.2 โดยได้แสดงคำตอบเชิงตัวเลขในหลายๆค่าของค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดจำลอง ( $K_\nu$ ) ซึ่งจะเห็นได้ว่าในแต่ละค่าของความหนืดจำลองนั้นค่าคำตอบมีความเร็วเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อยที่ค่า  $K_\nu = 1/6$  ซึ่งเป็นค่ามาตรฐานที่ใช้ในโปรแกรมนั้น ความเร็วช้าลงเพราะถูกหน่วงไว้ด้วยความหนืดที่สูงกว่าปกติ จึงได้ทำการทดลองลดค่าความหนืดจำลองลงเรื่อยๆซึ่งทำให้ค่าความเร็วใกล้เคียงคำตอบของบลาสีซมากขึ้น เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลที่ค่อนข้างง่ายจึงทำให้สามารถใช้ค่า  $K_\nu$  เล็กๆได้ ในปัญหาที่มีการไหลที่ยังยากพบว่าไม่สามารถลดค่า  $K_\nu$  ลงได้ ดังนั้นจึงจะต้องทำการสำรวจหาวิธีที่จะให้ได้คำตอบอันถูกต้องมากยิ่งขึ้นแม้จะใช้ค่าความหนืดจำลองมาตรฐานก็ตาม



รูปที่ 6.1.2 ความเร็วเทียบกับคำตอบของบลาสีซ

รูปที่ 6.1.3 แสดงให้เห็นลูกศรความเร็วที่ระยะ x ต่างๆ ซึ่งบ่งให้เห็นถึงรูปทรงของชั้นผิวบางที่ค่อยๆหนาขึ้น และเป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้



รูปที่ 6.1.3 เวกเตอร์ความเร็วที่ระยะ x ต่างๆ

#### 6.2 การไหลแบบความเร็วต่ำในท่อภายใต้แรงดัน (Poiseuille Flow)

การไหลนี้เป็นการไหลแบบความเร็วขนาน (parallel flow) ซึ่งจะทำได้สามารถหาค่าตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ได้สำหรับการไหลแบบราบเรียบโดยการอินทิเกรตสมการนาเวียร์-สโตคโดยตรง ซึ่งจะทำให้ได้คำตอบดังนี้

$$\text{กรณีพิทักดาจ: } u = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

เมื่อ  $h$  คือกึ่งหนึ่งของระยะห่างระหว่างผนังท่อ

$$\text{กรณีพิทักแบบทรงกระบอก: } u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$$

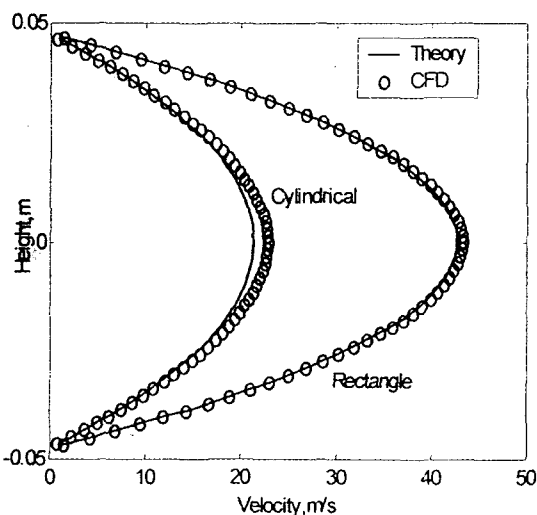
เมื่อ  $R$  คือรัศมีของท่อและ  $r$  คือระยะจากจุดศูนย์กลาง

ในการคำนวณกรณีหนึ่งได้กำหนดให้เป็นการไหลผ่านแผ่นขนานที่มีความยาว 1 เมตร และระยะห่างระหว่างแผ่น 10 ซม. โดยกำหนดให้  $(1/\mu)dp/dx$  มีค่าตัวเลขเป็น 40,000 ซึ่งจะทำให้ได้  $\Delta p$  ระหว่างทางเข้าและทางออกเท่ากับ 0.72 Pa (โดยใช้  $\mu$  ของอากาศมาตรฐาน)

ในการคำนวณกรณีที่สองกำหนดให้ทุกอย่างเหมือนเดิมยกเว้นเป็นท่อกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 ซม. (กรณีนี้ได้สร้างกริดเป็นรูปสี่เหลี่ยม)

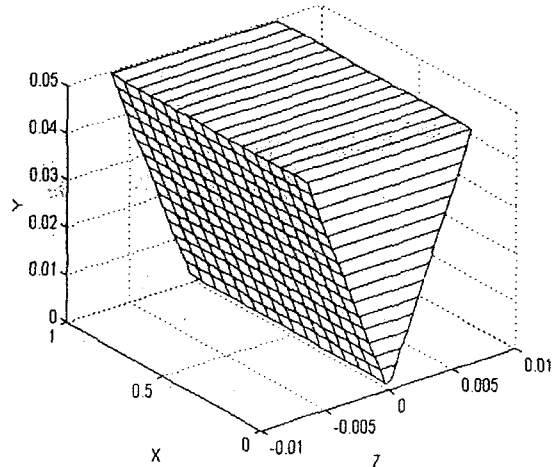
ในการคำนวณระยะแรกได้คำตอบที่ไม่สมจริงเป็นอย่างยิ่ง จึงได้ทำการค้นหาค่าข้อผิดพลาดและพบว่าข้อผิดพลาดอันเนื่องมาแต่การตัดค่าทิ้งของคอมพิวเตอร์ (round-off error) ประเมินว่าคอมพิวเตอร์ PC ใช้ระบบ 24 บิตในการแทนค่าตัวเลขซึ่งทำให้มีความถูกต้องในระดับ 8 ตัวในเลขฐานสิบ และในการคำนวณกรณีนี้เป็นกริดการไหลด้วยความดันที่มีค่ามากแต่มีความแตกต่างน้อยมาก (ความดันในระดับ 100,000 แต่ค่าความแตกต่างระหว่างกริดในระดับ 0.01) ซึ่งทำให้เป็นการบวกเลขตัวเลขในอันดับ 8 หรือสูงกว่า ค่าที่ได้จึงมีความผิดพลาดสูงมาก เพื่อแก้ปัญหาหนึ่งเป็นการเฉพาะหน้าได้ลดค่าสัมบูรณ์ของความดันตรงทางเข้าลงมา 20 เท่า (จาก 101325 เป็น 5066 Pa) โดยที่ยังคงความแตกต่างความดันตรงทางเข้าและออกไว้ดังเดิม ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ

การคำนวณในกรณีหนึ่งได้ใช้กริดขนาด 31x31 และมีขนาดเท่ากันตลอดแนวราบและแนวตั้ง โดยแก้ปัญหาเพียงครั้งหนึ่งในทางพิทัก  $y$  เพราะอีกครึ่งหนึ่งเป็นการสมมาตร เมื่อได้ใช้ความดันที่เล็กลงแล้วได้นำคำตอบมาเปรียบเทียบกับคำตอบทางทฤษฎีดังปรากฏในรูปที่ 6.2.1



รูปที่ 6.2.1 ความเร็วของการไหล

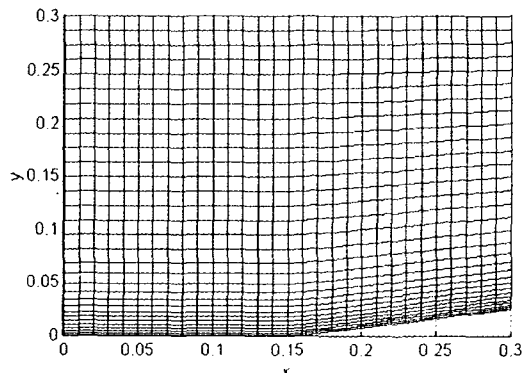
ซึ่งสังเกตเห็นได้ว่าความเร็วตรงกลางมีความเร็วสูงสุดประมาณ 45 m/s ในระบบพิทักดาจและ 22 m/s ในพิทักทรงกระบอก ซึ่งลดลงมาประมาณกึ่งหนึ่งของกรณีพิทักดาจ และการเปรียบเทียบกับค่าถูกต้องสมบูรณ์ให้ผลดีพอสมควร ค่าที่แตกต่างกันนั้นอาจเป็นผลจากการอัปเดตค่าที่ไม่ได้นำมาคิดในคำตอบเชิงทฤษฎี ค่าตอบที่ถูกต้องที่ได้รับในกรณีนี้ทำให้มั่นใจได้ว่ากรรมวิธีการแก้ปัญหาในพิทักทรงกระบอกโดยใช้สมการแบบพิทักดาจนี้สามารถกระทำได้หากใช้กริดที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมของทรงกระบอกดังที่แสดงให้เห็นในรูปที่ 6.2.2 การทำเช่นนี้เป็นการประหยัดมาก เพราะไม่ต้องเขียนโปรแกรมเพิ่มเติม



รูปที่ 6.2.2 กริดสำหรับการไหลในท่อกลม

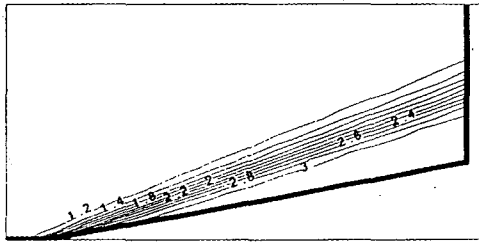
### 6.3 การไหลแบบไม่คิดความหนืดด้วยความเร็วเหนือเสียงผ่านพื้นเอียงแบบสี่เหลี่ยม

กริดที่ใช้มีขนาด 31x31 พื้นที่การไหลมีขนาด  $x=30$  ซม. และ  $y=30$  ซม. ที่ระยะ  $x=16$  ซม. พื้นด้านล่างเอียงขึ้นเป็นมุม 10 องศา กริดในทาง  $x$  เป็นกริดที่มีขนาดเท่ากันโดยตลอด ส่วนทาง  $y$  มีความละเอียดมากเมื่ออยู่ใกล้พื้นด้านล่าง กริดแรกมีขนาด 0.002 และขยายตัว 15% ในกริดถัดๆ ไปจนกระทั่งไม่สามารถขยายได้อีก กริดที่ใช้ได้แสดงให้เห็นในรูปที่ 6.3.1 ของไหลไหลเข้าด้วยค่าบรรยากาศ (101325 Pa, 300K) และมี Mach number = 5 เมื่อการไหลมาเจอลิ้มก็จะต้องเอียงสู่ตามลิ้มทำให้เกิดการสะดุดของการไหลส่งผลให้เกิดคลื่นกระแทกแบบเอียง (Oblique shock wave)



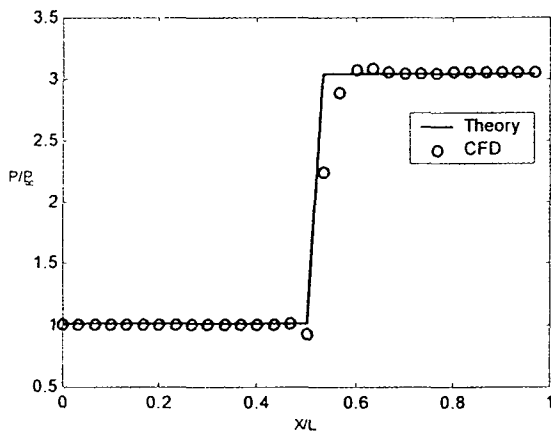
รูปที่ 6.3.1 กริดสำหรับการไหลผ่านพื้นเอียงแบบสี่เหลี่ยม

ซึ่งทำให้คุณสมบัติทางด้านหลังเปลี่ยนไปเช่น ความดัน และอุณหภูมิสูงขึ้นอย่างรวดเร็ว เส้นแนวความดันที่แสดงในรูปที่ 6.3.2 แสดงให้เห็นแนวของคลื่นกระแทกนี้



รูปที่ 6.3.2 เส้นแนวของความดันที่เกิดขึ้นบริเวณลิ้น (รูปขยายเฉพาะบริเวณที่เกิดคลื่นกระแทก)

ความดันที่พื้นด้านล่างได้ถูกพล็อตเทียบเคียงกับค่าความดันที่ได้จากตารางค่ามาตรฐาน [9] ดังปรากฏในรูปที่ 6.3.3 ซึ่งจะเห็นว่าโปรแกรมสามารถทำนายความเข้มและจุดที่เกิดของคลื่นกระแทกได้แม่นยำพอสมควร แต่จะสังเกตเห็นได้ว่าการกระโดดขึ้นของความดันช้ากว่าในทฤษฎี (ซึ่งเป็นการกระโดดแบบฉับพลัน) และนอกจากนี้ยังมีลักษณะของการ "สั่น" (oscillation) ของคำตอบ ซึ่งเป็นปกติวิสัยของการคำนวณผ่านคลื่นกระแทกโดยการใช้ "central differencing"

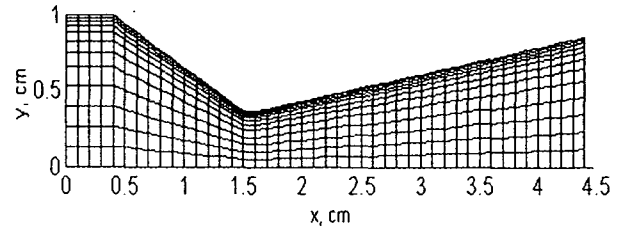


รูปที่ 6.3.3 ความดันเทียบกับทฤษฎี

#### 6.4 การไหลแบบไม่คิดความหนืดอย่างอัดตัวได้ในท่อสู่เข้าบานออก (Convergent-Divergent Nozzle)

การไหลนี้เป็นการไหลในหลายย่านความเร็วเพราะมีตั้งแต่ความเร็วต่ำกว่าเสียง เท่ากับเสียง และเหนือเสียง ซึ่งทำให้สถานะของสมการแม่บทเปลี่ยนจากอิลลิปติก เป็นพาราโบลา และกลายเป็นไฮเพอร์โบลิก ในที่สุด กำหนดให้ย่านการไหลเป็นดังในรูปที่ 6.4.1 โดยมีขนาดความยาว 4.4 ซม. คอคอดอยู่ตรงระยะ  $x=1.6$  ซม. ตรงคอคอดมีขนาด  $A^* = 0.0036$  เมตร ทางเข้ามีขนาด  $A_1/A^* = 2.7403$  และทางออกมีขนาด  $A_2/A^* = 2.3288$  กริดมีขนาด 45x25 มีความหนาแน่นกริดสูงบริเวณส่วนบนของท่อและเนื่องจากมีความสมมาตรจึงคำนวณเพียงครึ่งเดียว โดยให้มีอัตราขยายตัว 15% คอคอดอยู่กริดที่ 17

ทางแกน x การสร้างท่อกำหนดการสู่เข้าด้วยมุม 30 องศาและบานออกด้วยมุม 10 องศา

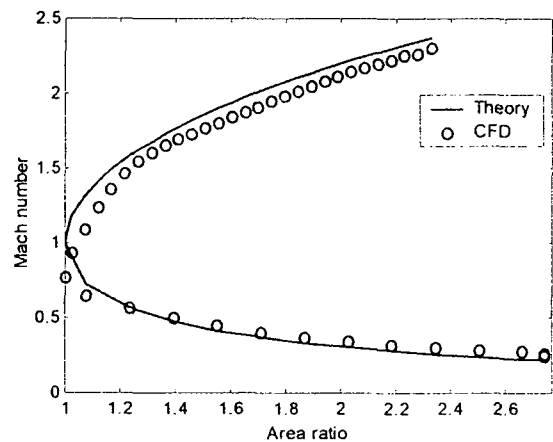


รูปที่ 6.4.1 กริดสำหรับท่อสู่เข้าบานออก

ค่าการไหลตรงทางเข้ากำหนดให้มีความดันรวมสถิตย์ (Total pressure)=104 kPa อุณหภูมิรวมสถิตย์ (Total temperature)=302K ส่วนตรงทางออกไม่กำหนดค่าใดเพราะเป็นการไหลแบบเหนือเสียง

คำตอบของค่าเลขมัคที่ได้จากการคำนวณได้เปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎี [10] ดังในรูปที่ 6.4.2 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความใกล้เคียงกันมากระหว่างคำตอบทั้งสอง

ความแตกต่างที่เกิดขึ้นนั้นน่าจะเป็นผลของการที่ทางทฤษฎีเป็นคำตอบแบบหนึ่งมิติ ส่วนคำตอบเชิงตัวเลขเป็นการคำนวณแบบสองมิติ



รูปที่ 6.4.2 ค่าเลขมัคเทียบกับทฤษฎี

#### 6.5 การไหลแบบการพาความร้อนหรือสระข้างแผ่นความร้อนในแนวตั้ง

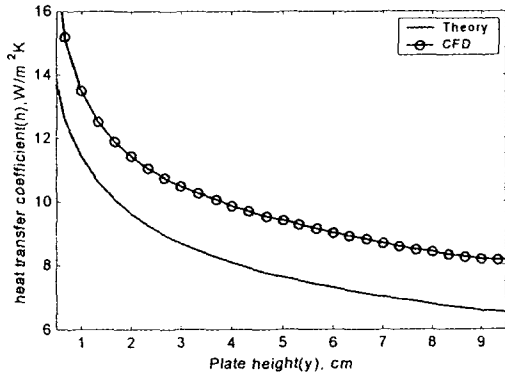
การไหลแบบนี้มีลักษณะพิเศษที่แตกต่างไปจากกรณีอื่นตรงที่การขับเคลื่อนของไหลมีที่มาจากแรงลอยตัวอันเป็นผลพวงของแรงโน้มถ่วงของโลก และเป็นการไหลที่มีความเร็วต่ำมาก แผ่นราบในแนวตั้งมีอุณหภูมิ 500K ทำให้บรรยากาศโดยรอบซึ่งในตอนแรกเป็นอากาศนิ่งเริ่มร้อนและลอยตัวสูงขึ้นมีลักษณะเป็นชั้นผิวบางทั้งของความเร็วและของอุณหภูมิ การสร้างกริดในกรณีนี้คล้ายกับในกรณีการไหลชั้นผิวบางผ่านแผ่นราบโดย ในชั้นแรกได้ประเมินหาความหนาของชั้นผิวบางตาม

$$\frac{\delta}{y} = 3.93 \left( \frac{0.952 + Pr}{Pr^2} \right)^{\frac{1}{4}} Gr^{-1/4} \quad [11] \text{ จะได้ } \delta \approx 0.013$$

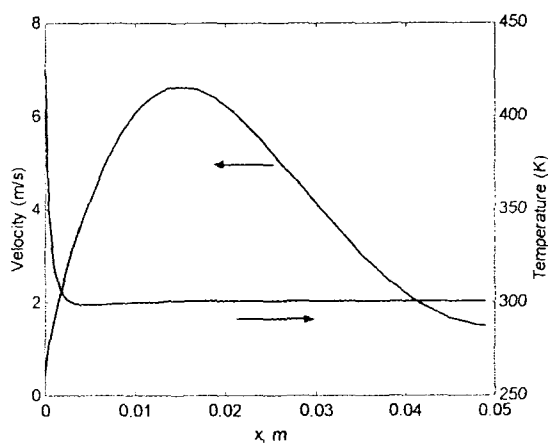
จากนั้นสร้างกริดให้หนาประมาณ 5 เท่าของ  $\delta$  ให้มีกริดขนาด 51x31

กรณีมีความหนาแน่นที่บริเวณใกล้ผนังความร้อนแล้วขยายตัว 15% เริ่มจาก  $\Delta x = 0.0005$  เมตร

ได้คำนวณหาเป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎี [11] ซึ่งปรากฏว่าได้ค่าที่คล้ายกันมากแต่ไม่เท่ากันนัก (รูปที่ 6.5.1) โดยมีความแตกต่างที่คงตัวตลอดแนวตั้งในรูป ซึ่งจะได้ทำการศึกษาวิจัยต่อไปในโอกาสหน้า รูปที่ 6.5.2 แสดงให้เห็นถึงรูปด้านข้าง (profile) ของความเร็วและอุณหภูมิ



รูปที่ 6.5.1 ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเทียบกับทฤษฎี



รูปที่ 6.5.2 ความเร็วและอุณหภูมิ

## 7. สรุปและวิจารณ์

โปรแกรมโมย่าได้แสดงให้เห็นว่ามีความสามารถที่จะแก้ปัญหาในหลากหลายรูปแบบได้อย่างแม่นยำพอสมควร ข้อแตกต่างเล็กน้อยที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎีน่าจะสามารถแก้ไขได้ไม่ยากนัก ในอนาคตจะได้ทำการศึกษาวิจัยเพื่อให้โปรแกรมมีความถูกต้องสูงขึ้น และจะได้ขยายมิติออกให้เป็นสามมิติ รวมทั้งจัดให้มีการจำลองความปั่นป่วนด้วยแบบจำลอง  $k - \epsilon$

## 8. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยและพัฒนาี้ได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อ.เมือง จ.นครราชสีมา

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External flows," Vol.2, Wiley, New York, 1990, p.143.
- [2] Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, New York, 1984, pp. 186-253.
- [3] Beam, R. M. and Warming, R. F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," American Institute of Aeronautics and Astronautics, Paper No. 95-2166, 1995.
- [4] Napolitano, M. and Walters R.W., "An Incremental Block-Line-Gauss-Seidel Method for the Navier-Stokes Equations," AIAA Journal, Vol.24, No. 5, pp.770-776.
- [5] Jameson, A. and Turkel, E., "Implicit Schemes and LU Decompositions," Mathematics of Computational, Vol. 37, No. 156, 1981, pp.385-397.
- [6] Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E., "Numerical Solution of Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes," AIAA Paper No. 81-1259, June 1981.
- [7] Chitsomboon, T., "Improved Artificial Viscosity for High-Reynolds-Number  $\kappa - \epsilon$  Turbulence Model," AIAA Paper No. 95-2166, 1995.
- [8] White, F.M., "Fluid Mechanics," 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1994, p.397.
- [9] Liepmann, H.W. and Roshko, A., "Elements of Gasdynamics," Wiley, 1957, pp.418-424.
- [10] Joseph, H. K. and Joseph, K., Gas Tables, Wiley, New York, 1945, pp.139-142.
- [11] Kays, W.M. and Crawford, M.E., "Convective Heat and Mass Transfer," 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1980, pp.313-319.