การประยุกต์ใช้อนุกรมวอลเตอร์ราในการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

จักร จันทลักขณา[*] และ รศ.ดร. ธนู ฉุยฉาย[**]
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์ระบบทางกลที่ไม่เป็นเชิงเส้น(nonlinear system)นั้นยังไม่มีวิธีการคำนวณแบบเบ็ด-เสร็จ(closed form)ในการวิเคราะห์ระบบประเภทนี้ ในบทความนี้จะได้นำเสนอแนวทางในการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นในอีกแนวทางหนึ่งซึ่งจะเป็นการประยุกต์ใช้อนุกรมวอลเตอร์รา(Volterra series)โดยสิ่งที่สนใจในการศึกษาคือความถี่ซูเปอร์ฮาร์โมนิค(superharmonic) และซับฮาร์โมนิค(subharmonic)ซึ่งจะทำให้เกิดปรากฎการณ์รีโซแนนซ์(resonance)ขึ้น นอกเหนือจากความถี่ธรรมชาติ(natural frequency)ของระบบ อีกทั้งการศึกษานี้ยังรวมไปถึงการแยกเทอมที่เป็นเชิงเส้นออกจากเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจะทำให้การกำหนดพารามิเตอร์(parameter)ของระบบกระทำได้ง่ายขึ้น วิธีการที่ได้นี้จะสะดวกต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ

[*] อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
[**] รองศาสตราจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

บทนำ

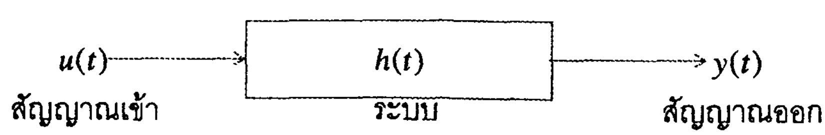
ในระบบทางกลที่ไม่เป็นเชิงเส้น ถ้าระบบนั้นมีความไม่เป็นเชิงเส้นน้อยหรือความไม่เป็นเชิงเส้นนั้นแสดงผลกระทบต่อระบบน้อยภายใต้สภาวะนั้นๆ ระบบจะสามารถถูกพิจารณาโดยทำการประมาณเชิงเส้นได้(linearization) ซึ่งทำให้การวิเคราะห์จะเหมือนกับระบบที่เป็นเชิงเส้นทั่วไป แต่ถ้าความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบมีอิทธิพลต่อระบบมากการวิเคราะห์ก็จำเป็นที่จะต้องพิจารณาถึงความไม่เป็นเชิงเส้นที่เข้ามาเกี่ยวข้องด้วยนั่นคือจะต้องใช้ทฤษฎีของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นมาวิเคราะห์ระบบ ซึ่งอนุกรมวอลเตอร์ราจะถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ผลกระทบที่มีต่อระบบเนื่องจากความไม่เป็นเชิงเส้น

การที่สามารถวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้นั้น ในศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับการสั่นสะเทือน(vibration)จะทำให้สามารถทำนายพฤติกรรมของระบบได้ แต่ในทางด้านการออกแบบเครื่องจักรแล้วศาสตร์ทางด้านการสั่นสะเทือนจะช่วยในการออกแบบเครื่องจักรไม่ให้ความถี่ในการทำงานของเครื่อง-จักรอยู่ในช่วงหรือตรงกับความถี่ธรรมชาติของเครื่องจักรเพื่อป้องกันการเกิดปรากฏการณ์รีโซแนนซ์ ในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นปรากฏการณ์รีโซแนนซ์นอกจากจะเกิดจากความถี่ธรรมชาติของระบบแล้ว ยังสามารถเกิดจากความถี่ซูเปอร์ฮาร์โมนิคหรือความถี่ซับฮาร์โมนิคได้ ซึ่งความถี่ทั้งสองนี้เป็นความถี่ที่เกิดขึ้นใหม่โดยการแทรกสอดกันของความถี่จากผลเนื่องจากความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ ถ้าความถี่ใหม่ที่เกิดขึ้นนี้มีค่าสูงกว่าความถี่ธรรมชาติ, f_nจะเรียกว่าเป็นซูเปอร์ฮาร์โมนิค$(2f_n, 3f_n, \ldots)$ แต่ถ้าความถี่ใหม่มีค่าต่ำกว่าความถี่ธรรมชาติจะเรียกว่าเป็นซับฮาร์โมนิค$(\frac{f_n}{2}, \frac{f_n}{3}, \ldots)$

อนุกรมวอลเตอร์รา

ระบบที่ทำการพิจารณาไม่ว่าจะเป็นเชิงเส้นหรือไม่ก็ตามการทำนายพฤติกรรมของระบบ เช่น ระยะทางการเคลื่อนที่, $y(t)$ สามารถที่จะแทนได้ด้วยอนุกรมวอลเตอร์รา ถ้าพิจารณาระบบใดๆที่มีสัญญาณเข้าระบบ(input signal)เป็น$u(t)$ และสัญญาณออกจากระบบ(output signal)เป็น $y(t)$ โดยให้ $h(t)$ เป็นอิมพัลส์เรสปอนส์(impulse response)ของระบบดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงระบบที่มีสัญญาณเข้าและออกจากระบบ

สัญญาณที่ออกจากระบบ, $y(t)$ สามารถเขียนแทนด้วยรูปอินทิกรัลของการประสาน(convolution) กันระหว่างสัญญาณเข้า, $u(t)$ กับอิมพัลส์เรสปอนส์, $h(t)$ เป็น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

เขียน $y(t)$ อยู่ในรูปของอนุกรมวอลเตอร์ราเป็น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau + \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \ldots \tag{2}$$

ถ้าระบบเป็นเชิงเส้นสัญญาณออกจากระบบจะแทนด้วยเทอมแรกทางด้านขวาของสมการที่ (2) เพียงเทอมเดียว แต่ถ้าระบบไม่เป็นเชิงเส้นสัญญาณออกจะแทนด้วยเทอมที่หนึ่ง,สองไปจนถึงอนันต์ อย่างไรก็ตามเทอมที่อยู่ลำดับท้ายๆ จะมีผลกระทบต่อสัญญาณที่ถูกแทนด้วยอนุกรมวอลเตอร์รานี้น้อยลง จากการทดลอง[1]การแทนระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพียงสองเทอมแรกของอนุกรมวอลเตอร์ราก็เพียงพอที่จะใช้พิจารณาระบบได้

ให้ $$y_n(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int}_{n \text{ ครั้ง}} h_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n} u(t-\tau_i)d\tau_i$$

จากสมการที่(2)

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(t) + \ldots$$

นั่นคือ

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \tag{3}$$

หรือ

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int}_{n \text{ ครั้ง}} h_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n} u(t-\tau_i)d\tau_i \tag{4}$$

จากสมการที่(1) ถ้าพิจารณาสัญญาณในเทอมของความถี่จะได้เป็น

$$H(f) = \frac{Y(f)}{U(f)} \tag{5}$$

โดยที่ $H(f)$ คือฟังก์ชั่นถ่ายโอน(transfer function)ของระบบนั่นเอง เนื่องจากระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้น $H(f)$ จะไม่ใช่ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบ (เนื่องจากฟังก์ชั่นจะเปลี่ยนไปถ้าสัญญาณเข้าเปลี่ยนไป)แต่จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชั่นของผลตอบสนองทางความถี่(frequency response function)แทน

จากสมการที่(3)และ(5)

$$H(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(f)}{U(f)} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(f) \tag{6}$$

เพราะฉะนั้นการกำหนดคุณลักษณะเฉพาะของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นก็คือ ต้องทราบค่าฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่หนึ่ง(linear component transfer function), $H_1(f)$ กับฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สอง (second order transfer function), $H_2(f)$ ซึ่งความหมายของฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองสามารถอธิบายได้ดังนี้[2]

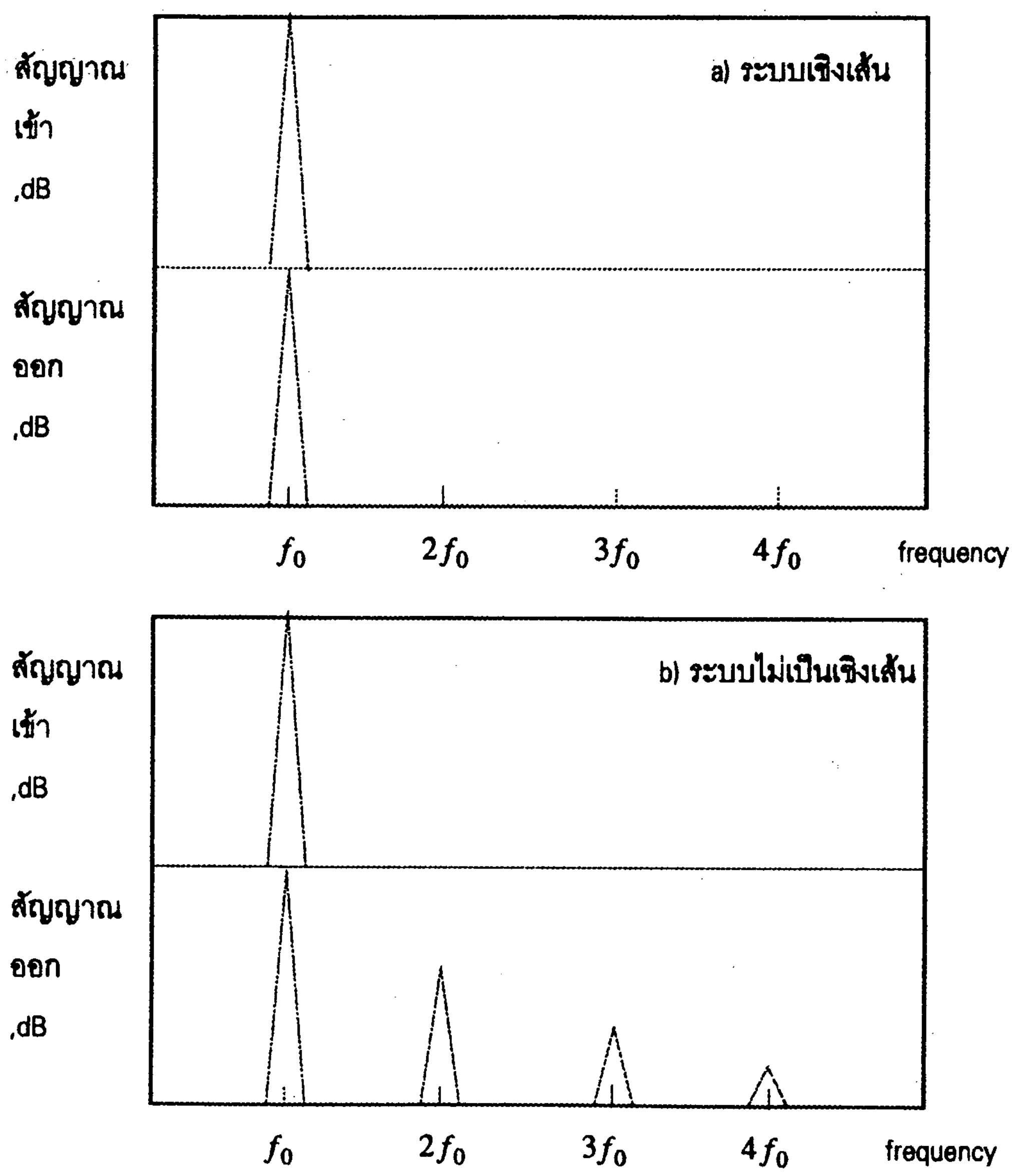
ให้สัญญาณเข้า $u(t) = \cos f_0 t$

สำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้น สัญญาณออก $y(t) = a_1 \cos f_0 t$

ถ้าระบบไม่เป็นเชิงเส้น สัญญาณออก $y(t) = a_1 \cos f_0 t + a_2 \cos 2 f_0 t + a_3 \cos 3 f_0 t + \ldots$

แสดงดังในภาพที่ 2

$$u(t) = \cos f_0 t \longrightarrow \boxed{\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^2 + dy^3} \longrightarrow y(t)$$



ภาพที่ 2 สเปคตราของสัญญาณที่เข้าและออกระบบ a) ระบบเชิงเส้น b) ระบบไม่เป็นเชิงเส้น

ในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่เป็นเชิงเส้น, $H_1(f)$ จะใช้ทำนายพฤติกรรมของระบบที่ความถี่ f_0 ส่วนความถี่ที่เกิดจากการแทรกสอด $2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$ นั้นการแทนฟังก์ชั่นถ่ายโอนเพื่อทำนายพฤติกรรมของระบบที่ความถี่ nf_0 นี้จะขึ้นอยู่กับว่าฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับใด, $H_n(f)$ จะมีผลต่อความถี่นั้น ในกรณีนี้[2]ฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองจะใช้ทำนายระบบที่ความถี่ $2f_0$ ส่วนความถี่ที่เกิดจากการแทรกสอดลำดับท้ายๆจะมีผลกระทบต่อระบบลดลง

สำหรับระบบทางกลที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะมีสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของระบบคือ

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \beta f(y, \dot{y}) = Au(t)$$

โดยที่ β เป็นค่าคงที่ที่แสดงความไม่เป็นเชิงเส้นว่ามากน้อยเพียงใด

การหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงเส้น, $H_1(f)$ ทำได้โดยการตัดเทอม $\beta f(y, \dot{y})$ ทิ้งไป ซึ่งจะพิจารณาเหมือนกับการหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนในระบบเชิงเส้น แต่การหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองนั้นจะไม่สามารถถูกหาด้วยการวิเคราะห์ได้เนื่องจากไม่สามารถแปลงลาปลาซ(Laplace transform)ได้ ซึ่งในระบบจริงนั้นความไม่เป็นเชิงเส้นอาจจะเกิดขึ้นโดยไม่ได้ตั้งใจ เช่นในการออกแบบระบบทางทฤษฎีให้เป็นระบบเชิงเส้น แต่เมื่อสร้างระบบขึ้นจริงจะมีผลของความไม่เป็นเชิงเส้นเกิดขึ้น ไม่ว่าจะเป็นจากรอยต่อระหว่างชิ้นส่วนที่ไม่แนบสนิท หรือวัสดุที่ใช้มีความไม่เป็นเชิงเส้น เป็นต้น นั่นคือในทางปฏิบัติเป็นการยากที่จะทราบฟังก์ชั่นของเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้น, $\beta f(y, \dot{y})$ ของระบบ เพราะฉะนั้นในการศึกษานี้จะประยุกต์อนุกรมวอลเตอร์ราเพื่อจะใช้คำนวณฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองจากข้อมูลที่สามารถวัดได้ในทางปฏิบัติ กล่าวคือจะใช้การวิเคราะห์โมดัล(modal analysis)วิเคราะห์ระบบ

ถ้าให้สัญญาณเข้าระบบเป็น $au(t)$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

จากสมการที่(2) สัญญาณออก $y(t) = ay_1(t) + a^2 y_2(t) + a^3 y_3(t) + \ldots + a^n y_n(t) + \ldots$

ซึ่งเมื่อพิจารณาในเชิงความถี่จะได้เป็น

$$Y(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n Y_n(f) \tag{7}$$

แทน(7)ใน(6)

$$H(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n Y_n(f)}{aU(f)} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{(n-1)} H_n(f) \tag{8}$$

ถ้าให้ขนาดของ a ที่สัญญาณเข้าเปลี่ยนไปจะทำให้ฟังก์ชั่นของผลตอบสนองทางความถี่ $H(f)$ นี้เปลี่ยนแปลงไปด้วย

ถ้าให้ขนาดของสัญญาณเข้าเป็น a_k โดยที่ $k = 1,2,3,\ldots$ กระทำกับระบบ สมการที่(8)จะเขียนได้เป็น

$$H^k(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n-1)} H_n(f) \tag{9}$$

นั่นคือฟังก์ชั่น $H^k(f)$ จะเปลี่ยนไปตามขนาดของ a_k

$$\begin{aligned}
H^1(f) &= H_1(f) + a_1 H_2(f) + a_1^2 H_3(f) + \ldots + a_1^{(n-1)} H_n(f) + \ldots \\
H^2(f) &= H_1(f) + a_2 H_2(f) + a_2^2 H_3(f) + \ldots + a_2^{(n-1)} H_n(f) + \ldots \\
H^3(f) &= H_1(f) + a_3 H_2(f) + a_3^2 H_3(f) + \ldots + a_3^{(n-1)} H_n(f) + \ldots \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
H^k(f) &= H_1(f) + a_k H_2(f) + a_k^2 H_3(f) + \ldots + a_k^{(n-1)} H_n(f) + \ldots
\end{aligned}$$

เขียนในรูปเมตริกซ์เป็น

$$\begin{Bmatrix} H^1(f) \\ H^2(f) \\ H^3(f) \\ \vdots \\ H^k(f) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_1^{(n-1)} \ldots \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots a_2^{(n-1)} \ldots \\ 1 & a_3 & a_3^2 \ldots a_3^{(n-1)} \ldots \\ & \vdots & \vdots \\ 1 & a_k & a_k^2 \ldots a_k^{(n-1)} \ldots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1(f) \\ H_2(f) \\ H_3(f) \\ \vdots \\ H_n(f) \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

นั่นคือ $$\left\{H^k(f)\right\} = [A]\left\{H_n(f)\right\} \tag{10}$$

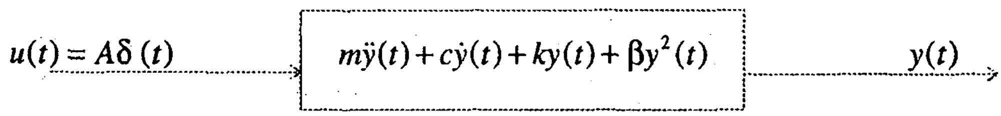
ในทางปฏิบัติเมตริกซ์ A จะทราบค่าและเมตริกซ์ $H^k(f)$ สามารถทราบค่าได้จากการวัดข้อมูลในการทดลองด้วยการวิเคราะห์โมดัล คือ การนำสัญญาณออกและสัญญาณเข้าที่วัดได้แปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)เป็นฟังก์ชั่นในเทอมของความถี่จากนั้นจับสัญญาณออกหารด้วยสัญญาณเข้าจะเป็นฟังก์ชั่น $H^k(f)$ ที่ขนาดของสัญญาณเข้า a_k ใดๆ

จากสมการที่(10)นี้เองที่สามารถใช้แยกฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับต่างๆ, $H_n(f)$ ออกจากกันได้ ซึ่งในที่นี้จะสนใจเฉพาะ $H_1(f)$ และ $H_2(f)$ การที่สามารถแยกฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับต่างๆออกจากกันได้จะทำให้การหาพารามิเตอร์ของระบบกระทำได้ง่ายขึ้นแต่จากสมการที่(2)จะสังเกตได้ว่าฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่มากกว่าหนึ่งจะอยู่ในเทอมของความถี่หลายมิติ

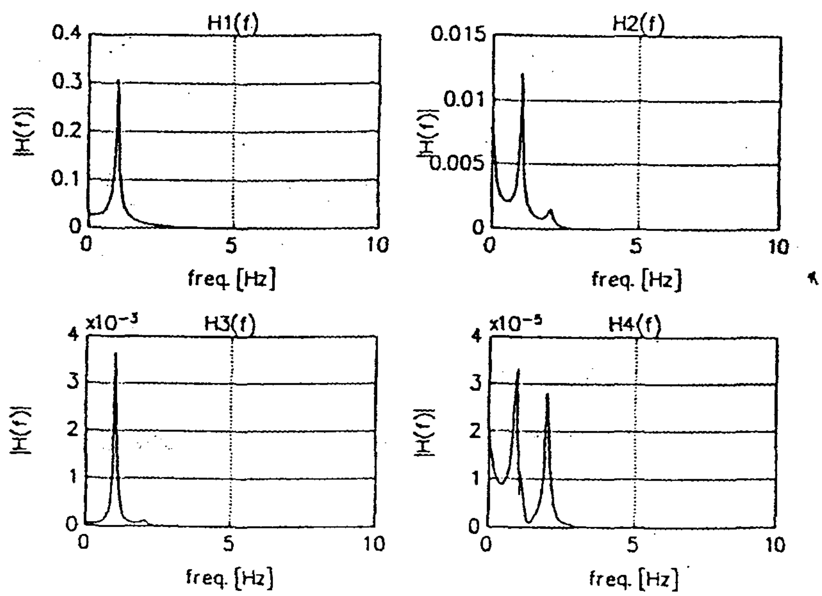
$$H_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

สำหรับฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองจะต้องอยู่ในเทอมของระนาบความถี่ $H_2(f_1, f_2)$ แต่จากการศึกษาพบว่าการพิจารณาเพียงแนวไดโกนอล(diagonal)ของระนาบความถี่ก็จะสามารถพิจารณาถึงซู-เปอร์ฮาร์โมนิคและซับฮาร์โมนิคที่เกิดขึ้นได้

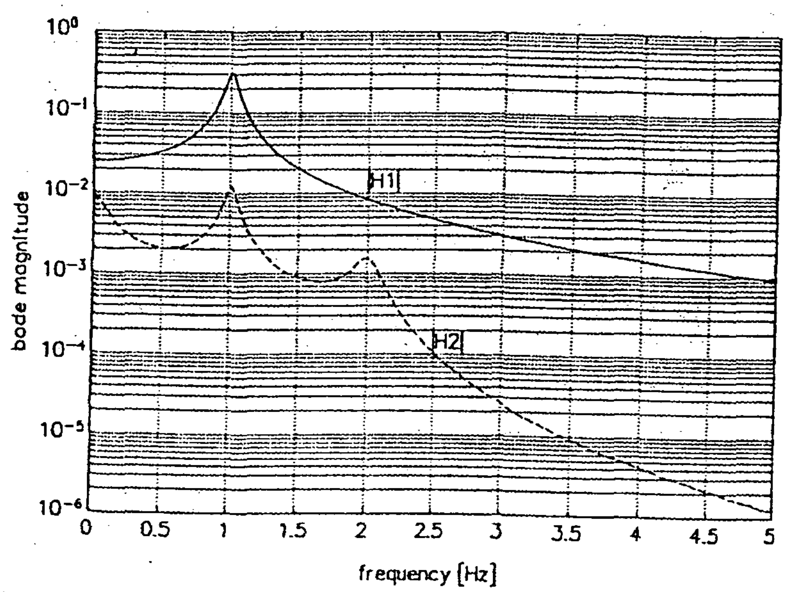
ตัวอย่าง[3]ของการแยกฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับต่างๆออกจากกันในทางทฤษฎีดังแสดงในภาพที่ 3 โดยให้สัญญาณเข้าเป็นอิมพัลส์, $\delta(t)$ โดยเปลี่ยนขนาดของ A ไป4ค่า จากสมการที่(9)จะได้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่หนึ่งถึงลำดับที่สี่



ระบบ



(a)



(b)

ภาพที่ 3 a) แสดงการแยกฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับต่างๆออกจากกัน

b) แสดงฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่เป็นเชิงเส้นและลำดับที่สองเปรียบเทียบกัน

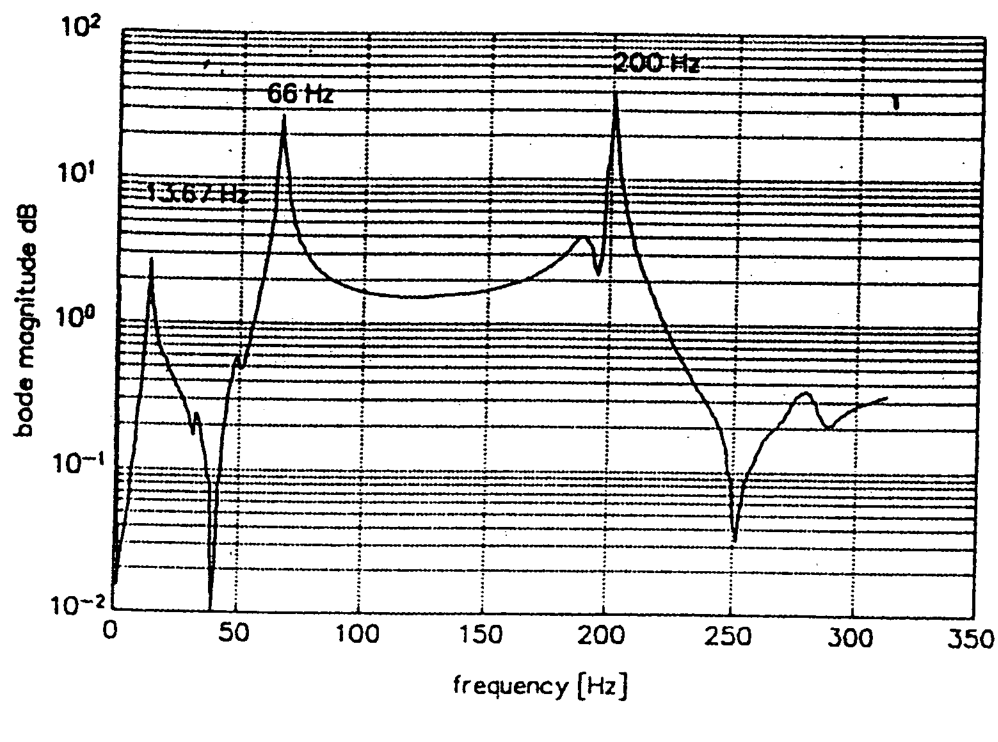
จากภาพที่3(b)จะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองมีซูเปอร์ฮาร์โมนิคเกิดขึ้นเป็นสองเท่าของความถี่ธรรมชาติ

ส่วนในการทดลอง[3] ระบบที่นำมาทดสอบคือแหนบรถสามล้อเครื่องที่มีลักษณะเป็นสปริงแข็ง (hard spring)ซึ่งจากการศึกษาทางทฤษฎีได้ทำนายว่าจะเกิดซูเปอร์ฮาร์โมนิคที่ $3f_n, 5f_n$.... ซึ่งตรงกับผลที่ได้จากการทดลอง แต่ผลจากการแยกฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับต่างๆออกจากกันนั้นไม่เห็นผลที่ชัดเจนอันเนื่องมาจากซูเปอร์ฮาร์โมนิคที่เกิดขึ้นไปตรงกับโมด(mode)ข้างเคียง(ภาพที่ 4) และวิธีที่ใช้จากการประยุกต์อนุกรมวอลเตอร์ราพิจารณาเพียงระดับความเสรีของการเคลื่อนที่เท่ากับหนึ่ง(single degree of freedom,SDOF)

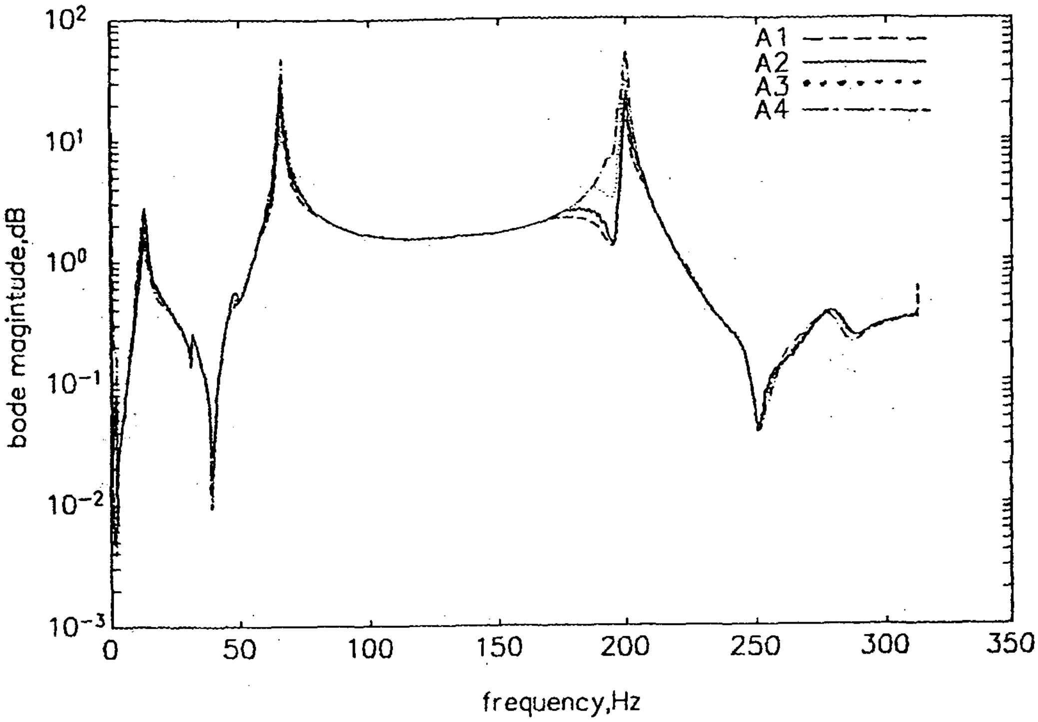
สรุป

การประยุกต์ใช้อนุกรมวอลเตอร์ราในการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนี้สามารถที่จะนำไปใช้ช่วยในการวิเคราะห์โมดัลเพื่อหาพารามิเตอร์ของระบบได้ แต่เพื่อที่จะให้ใช้กับระบบจริงได้ดีจะต้องพัฒนาให้ใช้กับระบบที่มีระดับความเสรีของการเคลื่อนที่มากกว่าหนึ่ง(multi degree of freedom) ซึ่งอนุกรมวอลเตอร์รานี้สามารถที่จะประยุกต์ใช้ได้

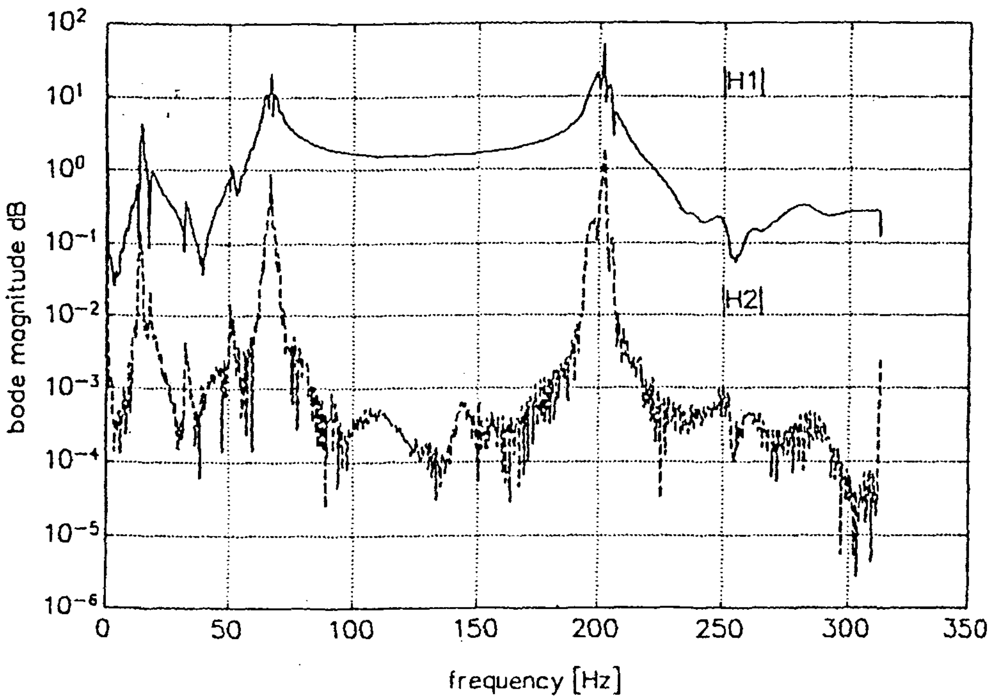
ข้อจำกัดของระบบที่นำมาวิเคราะห์โดยใช้อนุกรมของวอลเตอร์ราจะต้องมีความเสถียร(stability)พอสมควร



<u>ภาพที่ 4a</u> แสดงฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบที่นำมาทดสอบ



ภาพที่ 4b แสดงฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบเมื่อมีการเปลี่ยนในขนาดของสัญญาณเข้า



ภาพที่ 4c แสดงผลจากการแยกฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่หนึ่งและสองของระบบที่ทดสอบ

เอกสารอ้างอิง

1. ธนู ฉุยฉาย. เอกสารประกอบการสอนวิชาการวิเคราะห์โมดัล:กรุงเทพมหานคร; สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ(อัดสำเนา).
2. Tomlinson,Geoffrey. Dynamique des Systemes Non-lineaires. Seminar at I.S.M.C.M.: University of Manchester,1990(Mimeographed).
3. จักร จันทลักขณา. การหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนลำดับที่สองของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต:สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ,2537