การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 24
20-22 ตุลาคม 2553 จังหวัดอุบลราชธานี

การวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกโดยใช้วิธี Virtual Fields Method ในกรณีการเสียรูปขนาดใหญ่

Identification of hyperelastic material parameters using Virtual Fields Method in case of large deformations

ณัฐวิทย์ พรหมมา

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จ.เชียงใหม่ 50200
ติดต่อ: โทรศัพท์: 053 944 146 ต่อ 981, โทรสาร: 053 944 145
E-mail: nattawit@dome.eng.cmu.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของกฎของพฤติกรรม (behavior laws) ของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกในกรณีของการเสียรูปขนาดใหญ่ โดยใช้ Virtual Fields Method (VFM) กระบวนการพื้นฐานคือการวัดและคำนวณหาสนามการเสียรูป (displacement fields) แบบวิวิธพันธ์ (heterogeneous) บนผิวหน้าของวัสดุทดสอบ จากนั้นทำการวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ทุกค่าจากการทดลองเพียงครั้งเดียว ซึ่งวิธีนี้มีความจำเป็นที่จะต้องใช้สนามการเสียรูปแบบ heterogeneous เนื่องจากไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่ากับสนามการเสียรูป การวิจัยในครั้งนี้ได้แสดงการพัฒนาการวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์โดยประยุกต์ใช้กับการเสียรูปขนาดใหญ่และผลของค่าพารามิเตอร์ที่วิเคราะห์ได้เป็นที่น่าพอใจเมื่อเทียบกับค่าพารามิเตอร์ของวัสดุจริงที่กำหนดไว้

คำหลัก: Virtual Fields Method, การเสียรูปขนาดใหญ่, วัสดุไฮเปอร์อีลาสติก, กฎของ Mooney

Abstract

This present paper deals with the identification of constitutive parameters of a hyperelastic law from heterogeneous stress and strain fields using the Virtual Fields Method (VFM). The main idea consists in the exploitation of heterogeneous kinematic fields in order to directly identify all the constitutive parameters from only one test. The main drawback of such an approach is the fact that no direct link between displacement measurement data and unknown parameters is available in the general case. In this paper, the VFM is applied for the first time in the case of large deformations. The approach is developed here for a hyperelastic law in order to test the performances of this method in case of large deformations. Results found in terms of constitutive parameters are in good agreement with usual values of the selected materials.

Keywords: Virtual Fields Method, large deformations, hyperelastic material, Mooney law

1. บทนำ

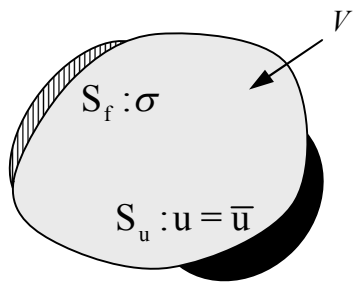
บทความนี้กล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของวัสดุชนิดไฮเปอร์อีลาสติกส์โดยใช้ข้อมูลของสนามขจัดชนิดวิวิธพันธ์ (heterogeneous) ที่ปรากฏอยู่บนพื้นผิววัสดุทดสอบประกอบกับการใช้วิธีการวิเคราะห์แบบใหม่ที่มีชื่อว่า Virtual Fields Method, VFM [1] โดยข้อได้เปรียบของวิธีดังกล่าวคือ เป็นวิธีการวิเคราะห์โดยมีพื้นฐานการคำนวณอย่างง่ายๆ และยิ่งไปกว่านั้นยังเป็นวิธีที่สามารถคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของวัสดุทุกค่าโดยใช้ข้อมูลจากการทดสอบเพียงครั้งเดียว

หลังจากทำการค้นคว้าจากงานวิจัยที่เกียวข้องแล้วพบว่า วิธีการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์วิธีนี้ได้ถูกพัฒนาเพื่อใช้ในกรณีของการเสียรูปขนาดใหญ่บนพื้นผิวทดสอบเป็นครั้งแรก อีกทั้งในงานวิจัยครั้งนี้ได้ทำการปรับปรุงให้วิธี VFM สามารถประยุกต์ใช้กับแบบจำลองไฮเปอร์อีลาสติกมูนนี โดยการวิจัยขั้นตอนแรกจะทำการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลที่ได้จากการคำนวณของโปรแกรมไฟไนอีลิเมนต์ (ผู้วิจัยทำการป้อนค่าพารามิเตอร์ที่ทราบค่าลงในโปรแกรมดังกล่าว) ซึ่งจุดประสงค์ความงานวิจัยครั้งนี้คือ การศึกษาถึงความสามารถของวิธี VFM เพื่อวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ในกรณีการเสียรูปขนาดใหญ่

2. VFM ในกรณีของการเสียรูปขนาดใหญ่

2.1 หลักแนวคิดของ VFM

วิธีการวิเคราะห์แบบ VFM สำหรับกรณีการเสียรูปขนาดใหญ่ เป็นวิธีการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของวัสดุที่สำคัญและแฝงอยู่ในรูปแบบสมการ constitutive law พิจารณาวัสดุทดสอบทั่วๆ ไปซึ่งมีปริมาตร V และมีพื้นที่ผิวทั้งหมด $\mathbf{S}$ โดยวัสดุทดสอบถูกกระทำโดยแรงภายนอกแสดงในรูปที่ 1 พิจารณาพื้นที่ $\mathbf{S}_u$ เป็นส่วนหนึ่งของพื้นที่ $\mathbf{S}$ ซึ่งมีการขจัด (displacements) $\mathbf{u}$ ภายใต้แรงกระทำภายนอก และ $\mathbf{S}_f$ คือ ความหนาแน่นของแรงกระทำภายนอกบนพื้นผิววัสดุทดสอบโดยมีค่า $\vec{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$ และทราบค่าชัดเจน ส่วน $\vec{n}$ คือ normal vector กระทำอยู่บนพื้นผิววัสดุ



รูปที่ 1 แบบจำลองทางแมคคานิกส์กรณีศึกษาทั่วไป

2.2 สมการงานเสมือนกับการเสียรูปขนาดใหญ่

พิจารณาเป็นกรณีกึ่งสถิตศาสตร์ (Quasi-static) และไม่คิดแรงดันที่กระทำกับผิววัสดุภายนอก ความสัมพันธ์ที่เขียนในรูปของงานเสมือน (Principle of Virtual Work, PVW) แสดงดังสมการที่ 1

$$-\int_{Vo} \boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial \vec{\boldsymbol{U}}^*}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} d\boldsymbol{Vo} = \int_{S_o^f} \left(\boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{N}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{U}}^* d\boldsymbol{S}_o \,, \quad \forall \vec{\boldsymbol{U}}^* \quad \textit{kinematic admissible} \tag{1}$$

โดย $\boldsymbol{\Pi}$ คือ 1st tensor ของความเค้น Piola-Kirchhoff, $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{U}}^*}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}}$ คือ ดิริเวทีฟของสนามขจัดเสมือนเทียบกับขนาดของรูปร่างที่ยังไม่เสียรูป (undeformed or reference configuration)

พิจารณาการเสียรูปแบบความเค้นบนระนาบ (plane stress) สมการที่ 1 ถูกเปลี่ยนรูปแบบและแสดงในสมการที่ 2

$$t\int_{So} \Pi_{XX} \frac{\partial U_X^*}{\partial X} d\boldsymbol{So} + t\int_{So} \Pi_{YY} \frac{\partial U_Y^*}{\partial Y} d\boldsymbol{So} + t\int_{So} \Pi_{XY} \frac{\partial U_X^*}{\partial Y} d\boldsymbol{So} + t\int_{So} \Pi_{YX} \frac{\partial U_Y^*}{\partial X} d\boldsymbol{So} = \int_{S_o^f} \left(\boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{N}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{U}}^* d\boldsymbol{S}_o \tag{2}$$

โดย t คือความหนาของวัสดุทดสอบ

3. ไฮเปอร์อิลาสติกซิตี้ (Hyperelasticity)

จากการค้นคว้าพบว่า พฤติกรรมทางกลของวัสดุชนิดไฮเปอร์อิลาสติกนั้นขึ้นอยู่กับ strain energy density function ($\boldsymbol{W}$) [2] ซึ่งพิจารณาในกรณีที่วัสดุเสียรูปแล้ว โดยความสัมพันธ์ระหว่าง strain และ Cauchy stress แสดงในสมการที่ (3)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{B}} \tag{3}$$

โดยที่ p คือ hydrostatic pressure, $\boldsymbol{B}$ คือ right Cauchy-Green deformation tensor เมื่อนำสมการ (3) เขียนใน principle direction จะเป็นรูปแบบสมการเป็นสมการ (4)

$$\sigma_i = 2\left(\lambda_i^2 \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right) - p \tag{4}$$

โดย λ_i คือ principle elongation และ $\boldsymbol{I_1}$ กับ $\boldsymbol{I_2}$ คือ 1st และ 2nd invariant ของ left Cauchy-Green deformation tensor, $\boldsymbol{C}$ พิจารณาความเค้นบนระนาบ $(\sigma_3 = 0)$, ค่าแตกต่างของ $\sigma_i - \sigma_3$ สำหรับ *i*=1,2 พบว่าสามารถตัดค่า p ทิ้ง(อ้างอิง) ดังนั้น สมการที่ 4 จึงเปลี่ยนรูปเป็น

$$\sigma_i = 2\left[\left(\lambda_i^2 - \lambda_3^2\right)\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} - \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_3^2}\right)\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right] \tag{5}$$

จากนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง 1st tensor ของความเค้น Piola-Kirchhoff และ Cauchy stress คือ

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} J \boldsymbol{F}^{-1T} \tag{6}$$

โดยที่ $J = \det(\boldsymbol{F}) = 1$ สำหรับวัสดุที่อัดตัวไม่ได้ (incompressible material)

สำหรับรูปแบบของ $\boldsymbol{W}$ นั้น ในงานวิจัยครั้งนี้ได้เลือกแบบจำลองของมูนนี (Mooney model) [3] ซึ่งเป็นแบบจำลองที่มีพารามิเตอร์ 2 ค่า (C_1, C_2) และเป็นแบบจำลองที่เหมาะกับวัสดุไฮเปออิลาสติกที่มีขนาดการเสียรูปปานกลาง (ประมาณ 300-400%) [4] พิจารณาในกรณีของวัสดุอัดตัวไม่ได้ แบบจำลองของมูนนีเป็นฟังก์ชันของ 2 พารามิเตอร์ แสดงในสมการที่ 7

$$\boldsymbol{W} = C_1\left(I_1 - 3\right) + C_2\left(I_2 - 3\right) \tag{7}$$

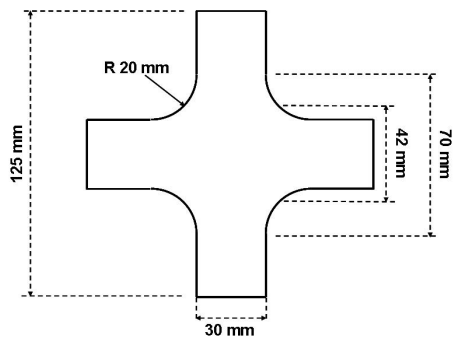
4. วิธีการวิเคราะห์ของ VFM

จุดประสงค์ในส่วนนี้คือ แสดงวิธีการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของวัสดุจากข้อมูลการทดสอบที่ได้จากโปรแกรมไฟไนอีลิเมนต์ ซึ่งขนาดของวัสดุที่กำหนดในโปรแกรมนี้จะต้องมีขนาดเดียวกันกับวัสดุที่จะนำไปทดสอบเพื่อหาข้อมูลสนามขจัดบนพื้นผิวจริง

วิธี VFM นี้มีหลักการพื้นฐานคือ การเขียนสมการงานเสมือนในรูปแบบสมการที่ 2 กับสนามขจัดเสมือน $\left(U_X^*, U_Y^*\right)$ หลายๆ ค่า ซึ่งในแต่ละค่าของสนามขจัดเสมือนจะให้สมการงานเสมือนอันใหม่ สำหรับวิธีการสร้างสนามขจัดเสมือน อธิบายได้ในหัวข้อต่อไป

4.1 กำหนดรูปร่างของวัสดุทดสอบ

ก่อนที่จะสร้างสนามขจัดเสมือน ต้องทำการออกแบบวัสดุที่ใช้ทดสอบ โดยในงานวิจัยครั้งนี้ได้เลือกรูปร่างแบบกากบาดดังแสดงในรูปที่ 2 ความยาวทั้งสองด้านของวัสดุทดสอบมีค่า 125 มม. และมีส่วนโค้งรัศมี 20 มม.เพื่อป้องกันการคั่งของความเค้น และในการทดสอบวัสดุจริงนั้น จะเลือกการทดสอบแบบการดึงสองแนว (biaxial traction) บนเครื่องทดสอบการดึง (Universal testing machine) เพื่อให้การเสียรูปของวัสดุเป็นแบบวิวิธพันธ์ แต่ในระยะเริ่มแรกของการวิจัย จะศึกษาพฤติกรรมและรวบรวมข้อมูลของการเสียรูปของวัสดุในโปรแกรมไฟไนอีลิเมนต์ ซึ่งรายละเอียดจะขอกล่าวในหัวข้อต่อไป



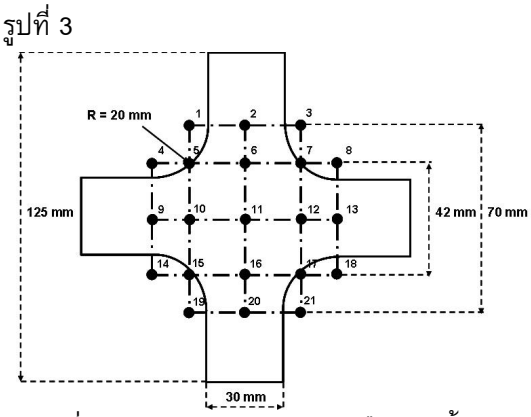
รูปที่ 2 ขนาดของวัสดุที่ใช้ทดสอบ

4.2 การสร้างสนามขจัดเสมือน

สนามขจัดเสมือนนั้นเป็นฟังก์ชั่นแบบ Kinematic admissible ซึ่งถูกกำหนดในส่วนของงานเสมือนภายนอกพร้อมกับค่าความเค้นที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก แต่ในความเป็นจริง การทดสอบทางวัสดุเราจะทราบได้แค่แรงกระทำที่ตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดของวัสดุทดสอบเท่านั้น ดังนั้นสมการงานเสมือนภายนอกถูกลดรูป แสดงในสมการที่ 8

$$W_{ext}^{*} = \int_{\partial S_o^f} (\Pi \cdot \mathrm{n}) U^{*} dl \qquad (8)$$

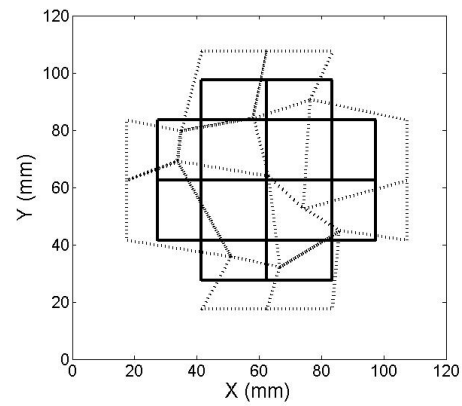
เป็นการยากที่จะสร้างสนามขจัดเสมือนเพียงสนามเดียวที่สามารถประยุกต์ใช้ได้ทุกตารางพื้นที่ผิวของวัสดุ ซึ่งรูปร่างของวัสดุที่เลือกไว้เป็นแบบกากบาด ดังนั้นจึงต้องสร้างสนามขจัดเสมือนแบบโซน (pieceswise virtual fields) [5] กำหนดให้มี 12 โซน ครอบคลุมเฉพาะพื้นที่ที่ทำการศึกษาเท่านั้น แสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 การกำหนดสนามขจัดเสมือนบนชิ้นวัสดุ

ซึ่งในแต่ละโซนของสนามขจัดเสมือนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสประกอบด้วย 4 โหนดในแต่ละมุม การสร้างสนามขจัดเสมือนนั้นใช้รูปแบบของ shape function เพื่อกำหนดระยะขจัดเสมือนของแต่ละโหนด จึงมั่นใจได้ว่าในแต่ละสนามขจัดเสมือนนั้นเป็น kinematic admissible

รูปที่ 4 แสดงตัวอย่างของสนามขจัดเสมือน โดยเส้นทึบแสดงโซนเริ่มต้นของสนามขจัดเสมือนและเส้นประแสดงตัวอย่างสนามขจัดเสมือน



รูปที่ 4 ตัวอย่างของสนามขจัดเสมือน

4.3 การคำนวณเพื่อหาค่าพารามิเตอร์

จากสมการ 2 และ 7 พบว่าสมการงานเสมือนจะเป็นฟังก์ชันเส้นตรงโดยมีพารามิเตอร์ของแบบจำลองมูนนีทั้งสองค่าเป็นตัวแปร ดังนั้นเลือกสนามขจัดเสมือนสองค่าจะได้ระบบสมการเส้นตรงดังแสดงในสมการ 9

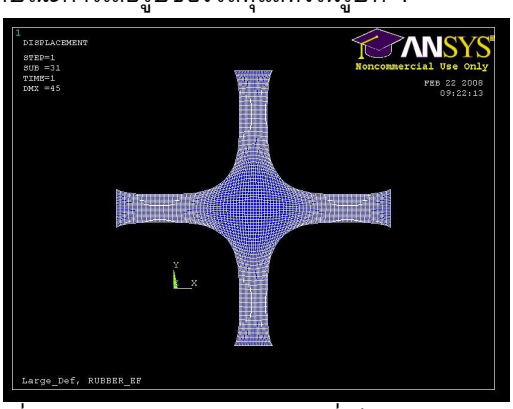
$$[A]\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ext}^{1} \\ W_{ext}^{2} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

โดยที่ W_{ext}^{1}, W_{ext}^{2} คือ งานเสมือนภายนอกสำหรับในแต่ละสนามขจัดเสมือน U_{ext}^{1}, U_{ext}^{2} และ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริก 2x2 ดังนั้นพารามิเตอร์ของวัสดุได้จากการแก้ปัญหาเชิงเส้นจากสมการที่ 9

5. ผลของพารามิเตอร์จากการวิเคราะห์ โดยใช้ VFM

5.1 ข้อมูลและพฤติกรรมการเสียรูปของวัสดุตัวอย่างจากโปรแกรมไฟไนอีลิเมนต์

การทดสอบในระยะแรกของการวิจัยครั้งนี้ จะศึกษาพฤติกรรมและรวบรวมข้อมูลของการเสียรูปของวัสดุในโปรแกรมไฟไนอีลิเมนต์ ANSYS v.10 ในส่วนของโปรแกรม แบบจำลองชนิด plan 183, 4 โหนดต่ออีลิเมนต์, จำนวน 8064 อีลิเมนต์และความเค้นบนระนาบถูกเลือกเป็นกรณีศึกษาเพื่อให้ได้ข้อมูลของการเสียรูปในแต่ละโหนด (deformation at nodes) โดยลักษณะการเสียรูปของวัสดุแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 ลักษณะรูปร่างของวัสดุที่เสียรูป (deformed configuration)

ในรูปที่ 4 เป็นการเสียรูปแบบสองแนว (ทั้ง x และ y) โดยลักษณะการดึงคล้ายกับการดึงโดยใช้หัวจับของเครื่องทดสอบ กำหนดระยะการดึงเท่ากันทั้ง 4 ด้าน ซึ่งลักษณะการดึงชนิดนี้เรียกว่า equibiaxial traction ขนาดของระยะดึงกำหนดให้มี 4 ค่า และคำนวณหาค่าการยืด (elongation, λ_a) ได้คือ 1.24, 1.40, 1.56 และ 1.72

ในการศึกษาครั้งนี้จะเลือกค่าพารามิเตอร์ $C_1 = 0.4$ MPa และ $C_2 = 0.04$ MPa ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์สำหรับยางอีลาสโตเมอร์และเป็นค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นในการคำนวณในโปรแกรมไฟไนอีลิเมนต์ในกรณีการเสียรูปของวัสดุที่มีขนาดใหญ่

5.2 ผลของพารามิเตอร์ C_1 และ C_2

ในตารางที่ 1 แสดงผลของค่าพารามิเตอร์ของมูนนีที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ VFM พร้อมกับค่าความผิดพลาดสัมพันธ์ (relative error) จากตารางนี้เห็นได้ชัดว่า ค่าความผิดพลาดสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ C_1 มีค่าลดลงเมื่อ λ_a มีค่าเพิ่มขึ้น สังเกตุค่าความผิดพลาดสัมพันธ์ของ C_2 จะเห็นว่ามีค่ามากกว่ากว่ากรณีของ C_1 ประมาณ10 เท่า แต่เมื่อสังเกตุค่าความผิดพลาดนี้เห็นว่ามีค่าน้อยมากสำหรับทุกๆ λ_a

ตารางที่ 1 ผลของพารามิเตอร์ที่ได้จากการวิเคราะห์โดย VFM

λ_a	1.24	1.40	1.56	1.72
C_1 (MPa)	0.3995	0.3995	0.3996	0.3997
error	-0.12%	-0.12%	-0.10%	-0.07%
C_2 (MPa)	0.0405	0.0407	0.0405	0.0403
error	1.25%	1.75%	1.75%	0.75%

อีกนัยหนึ่ง การวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีดังกล่าวจะมีข้อจำกัดบางประการคือ ประการแรก ค่าพารามิเตอร์ที่ได้นั้น เป็นค่าที่ได้จากจุดตัดของสมการเส้นตรง 2 เส้น (จากสมการ 9) จะเห็นได้ว่าค่าพารามิเตอร์จะใกล้เคียงกับค่าจริงของวัสดุได้ก็ต่อเมื่อ สมการเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นอิสระต่อกัน หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งคือ สนามขจัดเสมือนทั้งสองสนามต้องมีความเป็นอิสระต่อกันมากที่สุด ประการที่สองคือ จุดประสงค์หลักของการศึกษาถึงประสิทธิภาพการวิเคราะห์ค่าพารามิเตอร์โดย VFM นั้น จะใช้วัสดุจริงทดสอบกับเครื่องทดสอบการดึง ดังนั้นข้อมูลการเสียรูปจริงที่แสดงบนผิวของวัสดุจะมีความผิดพลาดบนอยู่อาจเกิดจาก noise ของเครื่องมือวัด ลักษณะวิธีการวัดหรือจากสาเหตุอื่นๆ ทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการวิเคราะห์นั้นเกิดความผิดพลาดมากขึ้น ข้อจำกัดทั้งสองประการนี้จะทำการศึกษาหาวิธีแก้ไขในโอกาสต่อไป

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการ Mechanical Engineering Research Group (LaMI), Institut Francais de Mecanique Avancee (IFMA), Blaise Pascal Universite, FRANCE ที่ได้เอื้อเฟื้อข้อมูลจากการคำนวณในโปรแกรม ANSYS v.10 ที่เป็นประโยชน์ต่อการวิจัยในครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง

[1] Grédiac, M., Toussaint, E. and Pierron, F. (2002). Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1 - Principle and definition, International Journal of Solids and Structures, 39 (10), 2691–2705.

[2] Ogden R.W. (1984). *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester.

[3] Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation, J. Appl. Phys., Vol. 11, 582 – 592.

[4] Treloar, L.R.G. (1990). Stress-strain data for vocalnised rubber under various types of deformation. Trans. Faraday. Soc., 63, 792-805

[5] Toussaint, E., Grédiac, M. and Pierron, F. (2006). The virtual fields method with piecewise virtual fields. International Journal of Mechanical sciences, 48(3), 256-264.