สัมมนาวิชาการวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 13
2-3 ธันวาคม 2542 โรงแรมรอยัลคลิฟบีชรีสอร์ท พัทยา ชลบุรี

การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับเชิงเส้นสำหรับระบบเพนดูลัมผกผันสองชั้น

Design of Linear Feedback Controllers for Motor Driven Inverse Double Pendulums

สุริยา ทองเชตุ*, จารุรัตน์ อู่สิงห์สวัสดิ์*, เรืองฤทธิ์ เอกชัยวรสิน* และ สุวัฒน์ กุลธนปรีดา**
ศูนย์วิจัยและพัฒนาระบบอัจฉริยะ คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

บทคัดย่อ

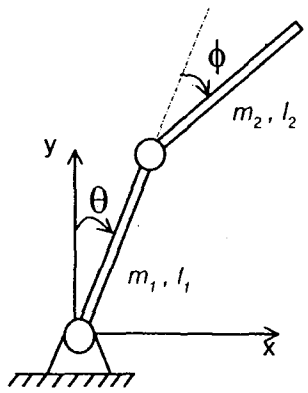
งานนี้ออกแบบและสร้างระบบควบคุมแบบเชิงเส้นสำหรับสร้างเสถียรภาพให้ระบบเพนดูลัมผกผันสองชั้นที่ขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรง ระบบควบคุมประกอบด้วยตัวควบคุมเชิงเส้นแบบป้อนกลับสถานะและตัวสังเกตการณ์แบบลดรูปลำดับที่หนึ่ง ตัวควบคุมเป็นแบบดิจิตอลโปรแกรมด้วยพีซีคอมพิวเตอร์และมีค่าความถี่สุ่มสำหรับการควบคุมเท่ากับ 1 kHz ในขณะที่ตัวสังเกตการณ์เป็นแบบอนาลอกสร้างขึ้นจากอนาลอกคอมพิวเตอร์ ผลการทดสอบทั้งด้วยการจำลองการทำงานในคอมพิวเตอร์และการควบคุมระบบจริงให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ โดยการควบคุมระบบจริงมีพฤติกรรมการแกว่งเกิดขึ้นซึ่งคาดว่าเนื่องมาจากผลของส่วนที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ เช่น แรงเสียดทาน เป็นต้น

Abstracts

This work designs and implements a linear feedback control system to stabilize a DC-motor driven double inverted pendulum. The control system consists of a state feedback controller and a first-order observer. The controller is digital and programmed in a PC-computer with the control-sampling rate of 1 kHz while the observer is an analog observer implemented using an analog computer. The results of both the computer simulation and the real control system are satisfactory. The real control system presents some limit cycle behavior which is possibly caused by its nonlinear parts such as frictions.

1. บทนำ

ระบบเพนดูลัมผกผันสองชั้น (double inverted pendulum) เป็นระบบพลศาสตร์ที่น่าสนใจอย่างยิ่งระบบหนึ่ง ประกอบขึ้นด้วยตัวเพนดูลัมผกผัน 2 ชิ้นต่อกันแบบอิสระในระนาบการเคลื่อนที่เดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 1 ตำแหน่งที่เพนดูลัมทั้งสองตั้งตรงขึ้นในแนวดิ่งคือ จุดสมดุลของระบบที่สนใจซึ่งเป็นจุดสมดุลแบบที่ไม่เสถียร [1-2] เพราะเมื่อระบบถูกรบกวนให้เคลื่อนที่ออกจากจุดสมดุลเพียงเล็กน้อย ตัวเพนดูลัมทั้งสองจะไม่สามารถตั้งตรงกลับมาเข้าสภาวะสมดุลเองเดิมได้ ดังนั้นการเพิ่มระบบควบคุมให้กับเพนดูลัมจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งเพื่อเป็นการสร้างเสถียรภาพให้กับระบบ



รูปที่ 1 ระบบเพนดูลัมผกผันแบบสองชั้น

การควบคุมแบบเชิงเส้น (Linear Control) โดยการป้อนกลับสถานะ (state feedback) เป็นการควบคุมที่ได้รับการสนใจอย่างกว้างขวางเนื่องจากความสามารถในการกำหนดพฤติกรรมของระบบควบคุมได้อย่างสะดวก[3-4] โดยทั่วไปขั้นตอนในการออกแบบระบบควบคุมประกอบด้วย 3 ขั้นตอนหลัก คือ การหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ การออกแบบตัวควบคุม และการทดสอบประสิทธิภาพ

การหาสมการการเคลื่อนที่เป็นกระบวนการเปลี่ยนความสัมพันธ์ของระบบในเชิงกายภาพไปเป็นความสัมพันธ์ในเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยทั่วไปสมการการเคลื่อนที่ที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของสมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Differential Equation) ดังนั้นสำหรับในกรณีนี้จะต้องทำการประมาณสมการที่ได้เป็นสมการระบบเชิงเส้นก่อนเพื่อจะใช้ในการออกแบบระบบควบคุมแบบเชิงเส้นต่อไป

ระบบควบคุมในที่นี้จะประกอบไปด้วยตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและตัวสังเกตการณ์ลดรูปลำดับที่หนึ่ง หลังจากที่ระบบควบคุมได้รับการออกแบบแล้ว ระบบควบคุมจะถูกทดสอบประสิทธิภาพ ซึ่งในลำดับแรกจะทำการทดสอบโดยการจำลองการทำงานในคอมพิวเตอร์ (simulation) จากนั้นจึงทำการทดสอบกับระบบจริง

2. สมการการเคลื่อนที่

การหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบพลศาสตร์หนึ่งๆ สามารถกระทำได้หลายวิธีด้วยกัน เช่น วิธีการประยุกต์ใช้กฎข้อที่สองของ

---

* นักศึกษาระดับปริญญาโทภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
** อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

Newton วิธีหลักการทรงโมเมนต์ตัมและพลังงาน และวิธีเชิงพลังงานในรูปของสมการ LaGrange's เป็นต้น ในการเลือกว่าจะใช้วิธีการใดนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของงานเป็นหลัก สำหรับบทความนี้ได้ใช้วิธีเชิงพลังงานในรูปของสมการ LaGrange's [4-5] ในการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ เนื่องจากว่าเพนดูลัมแบบสองชั้นเป็นระบบที่ค่อนข้างจะซับซ้อนมากระดับหนึ่ง

จากความสัมพันธ์ทางพลศาสตร์ระหว่างพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และ Generalized Force ใน Generalized Coordinate ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ สามารถเขียนเป็นสมการ LaGrange's ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i \qquad (1)$$

โดยที่ T คือ พลังงานจลน์ของระบบ, V คือ พลังงานศักย์ของระบบ, q_i คือ Generalized Coordinate ที่ i ของระบบ, Q_i คือ Generalized Force ที่ i ของระบบ ซึ่งสำหรับระบบเพนดูลัมนี้มี Generalized Coordinate เป็น θ และ ϕ ตามลำดับ (ดูรูปที่ 1) และมี Generalized Force ที่ 1 เป็น τ ซึ่งคือแรงบิดจากมอเตอร์ที่กระทำต่อแท่งเพนดูลัมชิ้นล่าง และ Generalized Force ที่ 2 มีค่าเป็นศูนย์เนื่องเพนดูลัมทั้งสองชิ้นต่อกันแบบอิสระ

จากทฤษฎีทางพลศาสตร์ จะได้พลังงานจลน์และพลังงานศักย์รวมของระบบดังนี้

$$T=\frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{6}m_2l_2^2(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}(\dot{\phi}+\dot{\theta})\cos\phi$$

และ

$$V=\frac{1}{2}m_1l_1g\cos\theta+m_2l_1g\cos\theta+\frac{1}{2}m_2l_2g\cos(\phi+\theta)$$

และเมื่อนำพจน์ต่างๆ ข้างต้นแทนลงในสมการที่ (1) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมเขียนในรูปสมการเมตริกดังนี้

$$\begin{bmatrix}I_{11}(\phi) & I_{12}(\phi)\\ I_{21}(\phi) & I_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\phi}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}G_1(\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi})\\ G_2(\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau\\ 0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

โดยที่

$$I_{11}(\phi)=\frac{1}{3}m_1l_1^2+m_2l_1^2+\frac{1}{3}m_2l_2^2+m_2l_1l_2\cos\phi$$

$$I_{12}(\phi)=I_{21}(\phi)=\frac{1}{3}m_2l_2^2+\frac{1}{3}m_2l_1l_2\cos\phi$$

$$I_{22}=\frac{1}{3}m_2l_2^2$$

$$G_1(\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi})=-\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\phi}(2\dot{\theta}+\dot{\phi})\sin\phi-\left(\frac{1}{2}m_1l_1+m_2l_1\right)g\sin\theta-\frac{1}{2}m_2l_2g\sin(\theta+\phi)$$

$$G_2(\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi})=\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}^2\sin\phi-\frac{1}{2}m_2l_2g\sin(\theta+\phi)$$

สำหรับสมการการเคลื่อนที่ของมอเตอร์กระแสตรงที่ใช้เป็นอุปกรณ์ขับเคลื่อนสำหรับควบคุม (actuator) สามารถเขียนได้เป็น [3]

$$J\ddot{\theta}+\frac{k_Tk_b}{R}\dot{\theta}+\tau=\frac{k_T}{R}v_i \qquad (3)$$

โดยที่ v_i คือค่าแรงดันไฟฟ้าอินพุท J คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรวมของมอเตอร์ R คือค่าความต้านทานของแกนขดลวดมอเตอร์ และ k_T และ k_b คือค่าคงที่แรงบิดและค่าคงที่ back-emf ของมอเตอร์ตามลำดับ

แทนค่า τ จากสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (2) จะได้สมการการเคลื่อนที่รวมของระบบเพนดูลัมดังนี้

$$\begin{bmatrix}I_{11}+J & I_{12}\\ I_{21} & I_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\phi}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}G_1+\frac{k_Tk_b}{R}\dot{\theta}\\ G_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k_T}{R}\\ 0\end{pmatrix}v_i \qquad (4)$$

ซึ่งชัดเจนว่าเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องทำการประมาณเป็นระบบแบบเชิงเส้น โดยการประมาณรอบจุดสมดุลที่มีค่ามุมและค่าการเปลี่ยนแปลงของมุม θ และ ϕ มีค่าเป็นศูนย์ และสมมุติว่าค่าเหล่านี้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยๆ จะได้

$$\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \beta_1\\ 0\\ \beta_2\end{pmatrix}v_i \qquad (5a)$$

โดยที่ α และ β เป็นค่าคงที่ซึ่งได้จากการประมาณเชิงเส้น และเขียนในรูปแบบมาตราฐานเป็น

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad (5b)$$

โดยที่ $x=(\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi})^T$ เรียกว่าตัวแปรสถานะ (state variable) และ $u=v_i$ คืออินพุทที่ใช้ควบคุม (control command)

3. ระบบควบคุม

ระบบควบคุมประกอบด้วยตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและตัวสังเกตการณ์ ตัวควบคุมเป็นตัวควบคุมแบบดิจิตอลด้วยค่าความถี่การสุ่มเท่ากับ 1 kHz และแปรแกรมไว้ในคอมพิวเตอร์พีซีโดยติดต่อสื่อสารกับระบบเพนดูลัมผ่านทาง data acquisition card ส่วนตัวสังเกตการณ์เป็นตัวสังเกตการณ์ลำดับที่หนึ่งสร้างขึ้นจาก analog computer ทำหน้าที่ประมาณค่าตัวแปร ϕ ซึ่งในระบบไม่มีอุปกรณ์ที่ใช้วัดค่าตัวแปรนี้

จากการแทนค่าตัวแปรต่างๆ ของระบบในตารางที่ 1 ในสมการระบบเชิงเส้นของระบบ (5) จะได้

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 36.88 & -9.61 & -18.24 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -35.24 & 31.55 & 147.75 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 19.97 & 0 & -65.56\end{pmatrix}^T$$

ซึ่งจากการแปลงเป็นระบบเทียบเท่าสำหรับการควบคุมแบบดิจิตอล [4]

$$x(k+1)=A_Dx(k)+B_Du(k)$$

จะได้

$$A_D=\begin{bmatrix}1.00002 & 0.00100 & -0.00001 & 0.00000\\ 0.03670 & 0.99045 & -0.01816 & 0.00001\\ -0.00002 & 0.00002 & 1.00007 & 0.00100\\ -0.03266 & 0.03139 & 0.14747 & 1.00007\end{bmatrix}$$

$$B_D=\begin{pmatrix}0.00001 & 0.01987 & -0.00003 & -0.06525\end{pmatrix}^T$$

ตารางที่ 1 รายการแสดง Parameters ของระบบ

สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
m_1	0.157	kg
m_2	0.062	kg
l_1	25.50×10^{-2}	m
l_2	16.75×10^{-2}	m
J	3.766×10^{-3}	$kg\cdot m^2$
R	3.77	Ω
k_b	0.48128	volt·s/rad
k_T	0.48000	N·m/amp

โดยมีกฎการควบคุม (Control Law) แบบป้อนกลับสถานะดังนี้

$$u(k) = -Gx(k) = -\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \\ \phi(k) \\ \dot{\phi}(k) \end{pmatrix}$$

ซึ่งในการออกแบบตัวควบคุมเพื่อหาค่า control gain G ทำได้หลายวิธี ซึ่งในที่นี้ใช้วิธี pole placement design [3-4] เป็นหลัก โดยการกำหนดค่า discrete poles ของระบบควบคุมดังนี้

$$(0.971+0.031i \quad 0.971-0.031i \quad 0.993 \quad 0.996)$$

ซึ่งสอดคล้องกับค่า poles ใน s-domain

$$(-29+31i \quad -29-31i \quad -6.71 \quad -4.43)$$

และได้

$$G = -[99 \quad 20 \quad 71 \quad 7]$$

โดยเทคนิคในการเลือก poles ในที่นี้ ได้เริ่มต้นจากการหา poles ด้วยวิธี LQR [3] โดยกำหนดค่า weight ของตัวแปรใน cost function เท่ากันหมด เนื่องจากการสมมุติฐานให้ความสำคัญของทุกตัวแปรเท่ากัน จากนั้นจึงได้ทำการปรับแต่งค่า poles เพื่อให้ระบบมีพฤติกรรมที่เหมาะสมมากขึ้น เช่น มีผลตอบสนองที่เร็วขึ้น เป็นต้น

ในส่วนของการออกแบบตัวสังเกตการณ์ เนื่องจากระบบมีอุปกรณ์หยั่งสัญญาณเพียง 3 ตัว ขาดอุปกรณ์หยั่งสัญญาณค่า $\dot{\phi}$ จึงต้องมีตัวสังเกตการณ์ค่าดังกล่าว ในที่นี้เลือกใช้ตัวสังเกตการณ์อนาลอกแบบลดรูปลำดับที่หนึ่ง ซึ่งมีสมการดังนี้ [3]

$$\dot{z} = Fz + \bar{G}y + Hu$$
$$\hat{x} = Ly + z$$

โดยที่ $\hat{x}$ คือค่าประมาณการของ $\dot{\phi}$, y คือเวกเตอร์ตัวแปร $(\theta, \dot{\theta}, \phi)^T$ ซึ่งวัดได้โดยตรง และ z คือตัวแปรช่วย

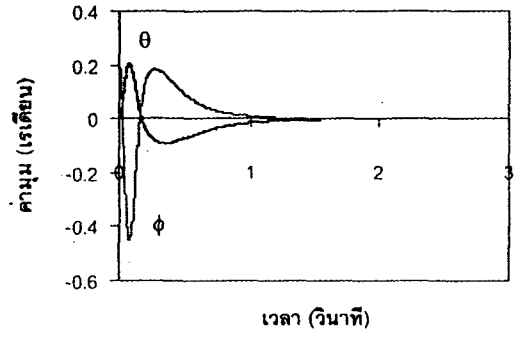
การออกแบบตัวสังเกตการณ์สามารถทำได้โดยการกำหนดค่า pole ของตัวสังเกตการณ์ ซึ่งควรเลือกให้อัตราสู่เข้าของตัวสังเกตการณ์เข้าสู่สมดุลย์เร็วกว่าระบบ แต่หากกำหนดให้ตัวสังเกตการณ์สู่เข้าสู่สมดุลย์เร็วเกินไปก็จะทำให้เกิดปัญหาเนื่องจาก noise ได้ ในกรณีนี้เลือกใช้ค่า pole ของตัวสังเกตการณ์เท่ากับ -10 ($F=-10$) และจากการทดลองกับระบบจริงสำหรับในงานนี้พบว่าหากนำค่า u มาใช้ในตัวสังเกตการณ์จะทำให้เกิดปัญหาไม่เสถียรภาพซึ่งคาดว่าเป็นผลมาจาก noise ดังนั้นจึงกำหนดให้ค่า H = 0 และเมื่อนำไปคำนวณแล้วจะได้ค่าต่าง ๆดังนี้

$$L = [0 \quad -3.28 \quad 10]$$
$$\bar{G} = [85.85 \quad 32.84 \quad -12.15]$$

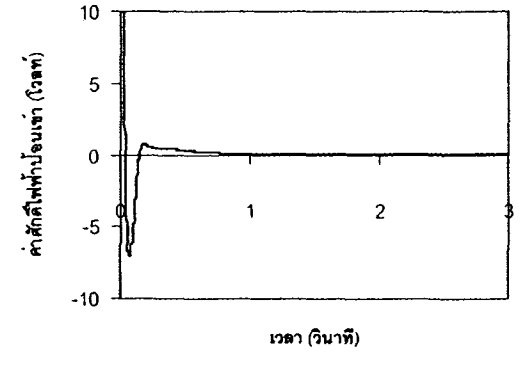
5. การทดสอบการทำงาน

การทดสอบการทำงานแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ การทดสอบการทำงานด้วยการจำลองในเครื่องคอมพิวเตอร์ และการทดสอบการทำงานด้วยระบบจริง การทดสอบด้วยคอมพิวเตอร์เป็นการทดสอบเบื้องต้นเพื่อดูพฤติกรรมของระบบว่ามีความเหมาะสมเพียงใดก่อนที่จะนำไปควบคุมระบบจริง ในที่นี้ใช้โปรแกรม INSIDE[7] ซึ่งเป็นโปรแกรมคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นในการทดสอบ

การทดสอบการทำงานด้วยโปรแกรม INSIDE ได้เลือกวิธีการอินทิเกรตแบบ Adaptive Range-Kutta อันดับที่ 5-6 โดยกำหนด Δt ของการอินทิเกรตมากสุดและน้อยสุดเท่ากับ 0.0001 และ 0.00001 วินาที ตามลำดับ และค่าความถูกต้องเท่ากับ 0.0001 รูปที่ 2 และ 3 แสดงผลลัพธ์ของการจำลองการควบคุม



รูปที่ 2 กราฟแสดงค่า θ และ ϕ ในการทดสอบด้วยโปรแกรม INSIDE

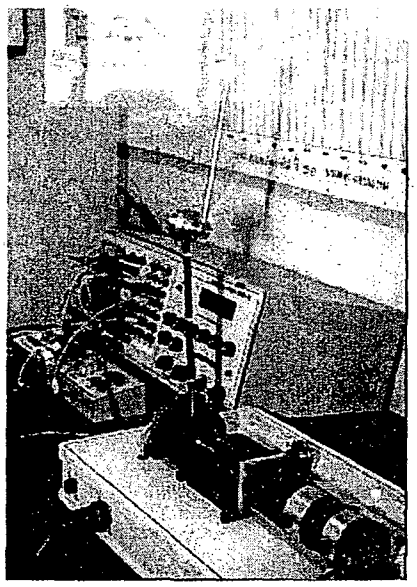


รูปที่ 3 กราฟแสดงค่า *u* ในการทดสอบด้วยโปรแกรม INSIDE

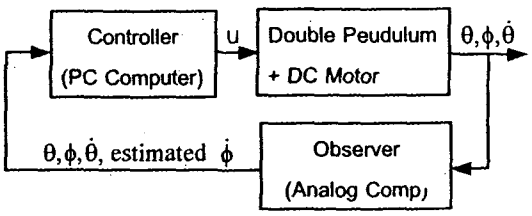
การทดสอบระบบควบคุมกับระบบจริง ได้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์พีซี Pentium-Pro 200 MHz, data acquisition card DAS1800HC, analog computer COMDYNA และชุดมอเตอร์ DVH-2000 ที่ประกอบกับชุดเพนดูลัมผกผันสองชั้นที่สร้างขึ้นเอง ดังแสดงในรูปที่ 4

การทดสอบทำได้โดยให้ระบบควบคุมเริ่มต้นอยู่ในตำแหน่งสมดุล จากนั้นทำการรบกวนระบบให้เสียสมดุลย์ แล้วสังเกตพฤติกรรมการเข้าสู่สภาวะสมดุลของระบบ ผลการทดสอบแสดงได้ดังรูปที่ 5 ซึ่งได้ผลลัพธ์ของการควบคุมเป็นที่น่าพอใจคล้ายคลึงกับการทดสอบโดยการจำลองในคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะความเสถียรภาพของระบบควบคุมและค่า settling time ซึ่งมีค่าประมาณ 1 วินาทีเหมือนกัน อย่างไรก็ตามในระบบ

จริงนี้ได้สังเกตว่ามีพฤติกรรมการแกว่ง (limit cycle) เกิดขึ้นด้วย ซึ่งอาจเกิดได้จากหลายสาเหตุด้วยกัน เช่น แรงเสียดทาน ความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบใน order สูงที่ไม่ได้จำลองด้วยคณิตศาสตร์, สัญญาณ noise ในการวัด, และความคลาดเคลื่อนของค่าพารามิเตอร์ เป็นต้น โดยเฉพาะสาเหตุแรกซึ่งถือว่าเป็นสาเหตุหลักของการเกิดการแกว่งที่เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป และจำเป็นต้องมีการวิจัยต่อไปเพื่อกำจัดปัญหานี้

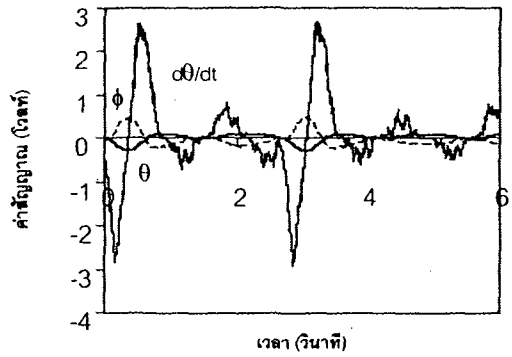


ก. ระบบควบคุมจริง



ข. แผนผังการควบคุม

รูปที่ 4 รูปแสดงการทดสอบระบบควบคุม



รูปที่ 5 กราฟแสดงค่า θ, ϕ และ $\dot{\theta}$ ในการทดสอบด้วยระบบจริง

6. สรุป

งานวิจัยนี้ได้การออกแบบและสร้างระบบควบคุมแบบเชิงเส้นเพื่อสร้างเสถียรภาพให้ระบบเพนดูลัมผกผันสองชั้นที่ขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรง ระบบควบคุมประกอบด้วยตัวควบคุมป้อนกลับสถานะแบบดิจิตอลและตัวสังเกตการณ์อนาลอกแบบลดรูปลำดับที่หนึ่ง ตัวควบคุมโปรแกรมอยู่ในคอมพิวเตอร์พีซีโดยติดต่อสื่อสารกับระบบเพนดูลัมผ่านทาง *A/D interface card* ส่วนตัวสังเกตการณ์สร้างขึ้นโดยใช้ *analog computer* เป็นหลัก ผลการทดสอบการทำงานพบว่าระบบควบคุมสามารถสร้างเสถียรภาพให้ตัวเพนดูลัมสองชั้นได้อย่างน่าพอใจ

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยได้รับการสนับสนุนจากทุนวิจัยคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

เอกสารอ้างอิง

[1] Hassan K. Khalil, Nonlinear Systems, Macmillan Pub., 1992

[2] J. E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-H Inc., 1991

[3] B. Friedland, Control System Design, McGraw-Hill,1986

[4] Gene H. Hostetter, Digital Control System Design, HRW, 198

[5] T. R. Kane and D. A. Levinson, DYNAMICS : Theory and Applications, McGraw-Hill, 1985

[6] Herbert Goldstein, Classical Mechanics, Addison Wesley, 1980

[7] สุวัฒน์ กุลธนปรีดา,โปรแกรมแก้ปัญหาเชิงตัวเลขแบบโต้ตอบสำหรับดาวเทียมขนาดเล็กแบบสามแกนในวงโคจร, รายงานการวิจัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2539