การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 15

การทำนายเอกลักษณ์โดยวิธีออฟเซิร์ฟเวอร์/คาลมานฟิลเตอร์; ผลการทดลองและการใช้งานบนระบบ มวล-สปริง

Observer/Kalman Filter Identification; Experimental and Application on Mass-Spring system

มานะ วิเชียรพงษ์ และ สินชัย ชินวรรัตน์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
E-mail: mana_wich@yahoo.com, sch@kmitnb.ac.th

Abstract

This paper presents a system identification technique to identify a Mass-Spring system by using Observer/Kalman filter identification (OKID) which is one of several techniques in the system identification. The objective is to build a Mathematical Model from experiment set-up and compares with the analytical one. The identified model, however, can be used to further study system characteristic because of the flexibility of changing parameters of the system, including a controller design that can be built in future.

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีการทำนายเอกลักษณ์ของระบบมวล-สปริง โดยเทคนิคออฟเซิร์ฟเวอร์/คาลมาน ฟิลเตอร์ (Observer/Kalman Filter Identification: OKID) ซึ่งเป็นหนึ่งในหลาย ๆ วิธีของการทำนายเอกลักษณ์ของระบบ โดยมีวัตถุประสงค์ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากชุดทดลอง และเปรียบเทียบผลกับแบบจำลอง ที่ได้จากการ วิเคราะห์ ด้วยสมการพื้นฐาน ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากเทคนิคการทำนายเอกลักษณ์ยังสามารถใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของระบบ โดยการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่าง ๆ รวมถึงการออกแบบควบคุมในอนาคต

คำหลัก การทำนายเอกลักษณ์, Observer/Kalman Filter Identification: OKID

บทนำ

โดยปกติแล้วในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของไดนามิกส์ซิสเต็ม (Dynamic System) มี 2 วิธี อย่างแรกคือ วิธีอะนาไลติคอล (Analytical) ซึ่งจะเริ่มจากการเขียนสมการบังคับพื้นฐานบนหลักทางกายภาพหลังจากนั้นจึงทำการแก้สมการแล้วแปลงให้เป็นรูปแบบที่เราต้องการ วิธีที่ 2 คือ วิธีเอ็กเพอร์ริเมนท์ทอล (Experimental) โดยกระบวนการเริ่มมาจากการวัดอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) ซึ่งได้มาจากการทดลอง หรือ ได้มาจากโมเดล (Model) ที่ทำงานอยู่ในขณะนั้นโดยตรง โดยปกติแล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะได้มาจากวิธีอะนาไลติคอล (Analytical) ซึ่งต่อไปในอนาคตจะต้อง มีการยอมรับและแก้ไขผลที่ได้จากการใช้วิธีเอ็กเพอร์ริเมนท์ทอล (Experimental) ก่อนที่จะนำไปใช้สำหรับ การออกแบบควบคุม

ซิสเต็ม ไอเดนทิฟิชั่น (System Identification) [1],[2] เป็นวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ภายใต้ข้อมูลอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) นอกจากงานทางด้านคอนโทล (Control) แล้วเทคนิคนี้มีส่วนสำคัญในอีกหลายสาขาวิชา เช่น ด้านเศรษฐศาสตร์ ด้านการติดต่อสื่อสาร เป็นต้น การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้เกิดความเข้าใจ เกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบที่เราสนใจ ซึ่งจะทำให้เรา สามารถอธิบาย ทำนาย หรือควบคุมพฤติกรรมของระบบนั้นได้

ไอเดนทิฟิเคชั่น(Identification) เป็นกระบวนการ ของการพัฒนาและการปรับปรุงการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงทางกายภาพของระบบโดยการใช้ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ในทางโครงสร้างมีพื้นฐานอยู่ 3 ชนิดในการใช้ไอเดนทิฟิเคชั่น (Identification)[3] ซึ่งประกอบ ไปด้วย โมดาลพารามิเตอร์ (Modal Parameter Identification), สทรัคเทอร์รอล-โมเดล พารามิเตอร์ (Structural-Model Parameter Identification) และคอนโทล-โมเดล (Control-Model Identification) ซึ่งทั้ง 3 ชนิด มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง โดยมีเป้าหมายหลัก และการ พัฒนาที่แตกต่างกัน โมดาล พารามิเตอร์ (Modal Parameter Identification) และสทรัคเทอร์รอล-โมเดล (Structural-Model Parameter Identification) เป็นวิธีการที่ถูกใช้ในทาง สทรัคเทอร์รอล เอ็นจิเนียริ่ง (Structural Engineering) ส่วน คอนโทล-โมเดล (Control-Model Identification) เป็นวิธีการที่ถูกใช้ในการควบคุม ของเฟลกซิเบิลสทรัค เทอร์ส (Flexible Structures)

ประโยชน์หลักของซิสเต็ม ไอเด็นทิฟิเคชั่น (System Identification) เป็นการปรับปรุงอะนาไลติคอล โมเดล (Analytical Model) ของโครงสร้าง บ่อยครั้งที่การคำนวณทางนิวเมอริคอล (Numerical) เช่น ไฟไนต์ อิลิเมนท์ โมเดล (Finite Element Model) ของโครงสร้างเป็นการหาที่ไม่ถูกต้องทีเดียว ความไม่ แม่นยำ เกิดจากปัจจัยต่าง ๆ เช่น การประมาณค่าในไฟไนต์ อิลิเมนต์ เดอริเวชั่น (Finite Element Derivations), ความผิดปรกติของสทรัคเทอรอล อิลิ

เมนท์ (Structural Elements)ความแตกต่างในคุณสมบัติของวัสดุจริง และขนาดจากการสมมุติขึ้นในแบบจำลองและการเข้าหาค่าที่ถูกต้องของ นิวเมอริคอล โมเดล (Numerical Model)

ในช่วงทศวรรษที่ผ่านมานี้เทคนิคการทำนายเอกลักษณ์ของระบบ (System Identification Techniques) ได้มีการถูกพัฒนา และประยุกต์ใช้งานกับการทำนาย เอกลักษณ์ของสเตท-สเปซ โมเดล (State-Space Model)[4] วิธีการที่ถูกพัฒนามาเพื่อใช้ในการคำนวณหา มาร์โคพารามิเตอร์ (Markov Parameter) ของระบบเชิงเส้น (Linear System) ซึ่งจากสเตท-สเปซ โมเดล (State-Space Model) และเป็นการหา ออฟเซิฟเวอร์ (Observer) ในเวลาเดียวกัน วิธีการที่อ้างถึงนี้คือวิธีออฟเซิฟเวอร์/คาลมาน ฟิลเตอร์ ไอเดนทิฟิเคชั่น (Observer/Kalman Filter Identification Algorithm : OKID) ซึ่งเป็นการจัดรูปแบบ ทั้งหมดใน รูปของไทม์-โดเมน (Time-Domain) ซึ่งเป็นความสามารถ ของการใช้เครื่องมือทั่ว ๆ ไปในการตอบสนองข้อมูล พื้นฐานของวิธีการนี้ที่แตกต่างจากวิธีการอื่น ๆ ก็คือเป็นการ นำออฟเซิฟเวอร์ (Observer) เข้าไปในสมการที่ใช้ใน การทำนายเอกลักษณ์ ซึ่งเหมาะสมกับการทำนายเอกลักษณ์ ใ ระบบที่มีเสถียรภาพ

หลักการของโอเพ่น-ลูป ซิสเต็ม ไอเดนทิฟิเคชั่น (Open-Loop System Identification Algorithm)

เมื่อต้องการที่จะทำนายระบบโอเพ่น-ลูป (Open-Loop)โดยธรรมดาอย่างหนึ่งการกระตุ้นระบบโดยตรงโดยใช้การสุ่มสัญญาณกระตุ้นระบบและทำนายระบบจากข้อมูลอินพุท (Input)/เอาท์พุท (Output) โดยใช้แบบจำลองออโต รีเกรทซีฟ วิธ เอ็กโอเจเนรัส อินพุท (Auto Regressive with eXogeneous Input : ARX) เพื่อสร้างสเตท-สเปซ โมเดล (State-Space Model) จากโอเพ่น-ลูฟ ซิสเต็ม (Open-Loop System) วิธีนี้ต้องใช้ออเดอร์ (Order) ของ ARX Model ที่มีขนาดใหญ่ ซึ่งจะต้องใช้เวลาในการคำนวณจำนวนมาก และได้มีการนำเทคนิคของสเทต ออฟเซิฟเวอร์ (State Observer) เพื่อให้ออเดอร์ (Order) ของ ARX Model สามารถลดลงได้

ระบบสมการเชิงเส้นแบบไฟไนต์ ดีสครีต ไทม์อินวาเรนท์ สโตคาสติก สามารถแสดงได้โดย

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + K_k \qquad (1)$$

$$y_k = Cx_k + \upsilon_k \qquad (2)$$

เมื่อ $x_k \in R^{nx1}$ เป็นเวกเตอร์ของสเตท (state), $u_k \in R^{Sx1}$ เป็นเวกเตอร์ของอินพุท (Input), $y_k \in R^{mx1}$ เป็นเวกเตอร์ของเอาท์พุท (output) เมตริกซ์ A, B และ C เป็นเมตริกซ์สเตท-สเปซ ซิสเต็ม (state-space system) สัญญาณรบกวน K_k และสัญญาณรบกวนของการวัด υ_k ถูกสมมุติให้เป็นแบบเกาส์เซียน (Gaussian),ไวท์ (White),ซีโร-มีน (Zero-Mean) และไม่เกี่ยวเนื่อง (Uncorrelated) กับโควาเรียน (Covariance) Q และ R

โดยการศึกษาชนิดของ Kalman Filter สมการ (1) และ (2) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + AK\varepsilon_k \qquad (3)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k + \varepsilon_k \qquad (4)$$

เมื่อ ε_k เป็นส่วนที่แตกต่างกันของเอาท์พุท (output) และ $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$, $\hat{x}_k$ และ $\hat{y}_k$ เป็นตัวที่ถูกประมาณเป็นสเตทเวกเตอร์ (state vector) และเอาท์พุท เวกเตอร์ (Output Vector) ตามลำดับ K คือสเตทดี สเตท คาลมาน ฟิลเตอร์ เกน (Steady State Kalman Filter Gain) ที่สถานะคงที่ เออร์เรอร์ โคแวเรียน (Error Covariance) χ ขอบเขตของค่าคงที่ ซึ่งเป็นไปตามสมการ สเตทดี สเตท อัลจีเบรค ริคคาตี (Steady State Algebraic Riccati Equation)

$$\chi = A\chi A^T - A\chi C^T[R + C\chi C^T]^{-1}C\chi A^T + Q \qquad (5)$$

เมตริกซ์สเตทดี-สเตท คาลมาน ฟิลเตอร์ เกน (Steady-State Kalman Filter Gain) คือ

$$K = A\chi C^T[R + C\chi C^T]^{-1} \qquad (6)$$

ค่าของ K จะเกิดขึ้นได้ถ้าระบบมีเสถียรภาพ และ $(A,Q^{1/2})$ นั้นสเตบิไลเบิล (Stabilizable)

ระบบในสมการ (3) สามารถอธิบายในรูปแบบ ดังด้านล่างนี้

$$\hat{x}_{k+1} = (A - AKC)\hat{x}_k + Bu_k + AKy_k \qquad (7)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k + \varepsilon_k \qquad (8)$$

สมการโอเพ่น-ลูป สเตท สเปซ (Open-Loop State Space) ใช้แปลงด้วยซี-ทรานสฟอร์ม (Z-Transform) จากสมการ (7) และ(8) จะกลายเป็น

จากนั้นแทน

สมการ (9) ลงในสมการ (10) จะได้เป็น (10)

$$y(z) = C(z - \bar{A})^{-1}[AKy(z) + Bu(z)] + \varepsilon(z) \qquad (11)$$

ทำการแปลงซี-ทรานสฟอร์ม (Z-Transform) กลับของสมการ (11) กับ

$$(z - \bar{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i-1}Z^{-i}$$

ความสัมพันธ์ใหม่ระหว่างเอาท์พุท (Output) และอินพุท (Input) กับเงื่อนไขเริ่มต้นที่ศูนย์ สามารถอธิบายได้เป็น

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{\infty} C\bar{A}^{i-1}AKy_{k-i} + \sum_{i=1}^{\infty} C\bar{A}^{i-1}Bu_{k-i} + \varepsilon_k \qquad (12)$$

เมื่อ

$$\bar{A} = A - AKC$$

อย่างไรก็ตามในทำนองเดียวกันเราสามารถใช้ คาลมาน ฟิลเตอร์ เกน (Kalman Filter Gain : K) เพื่อที่จะให้ $\bar{A}$ เป็นแอสซิมโทติคอลลี่สเตเบิล (Asymptotically Stable :$\bar{A}^{i-1}$=0) สำหรับตัวเลขนี้มีขนาดเพียงพอ p ที่ทำให้ $\hat{y}_k$ เข้าใกล้ y_k ดังนั้นสมการ (12) จะกลายเป็น

$$y_k = \sum_{i=1}^{p} C\bar{A}^{i-1}AKy_{k-i} + \sum_{i=1}^{p} C\bar{A}^{i-1}Bu_{k-i} + \varepsilon_k \qquad (13)$$

โดยเมื่อเปรียบเทียบกับรูปแบบของ ARX Model จะอธิบายโดยสมการ (12) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$a_i = C\bar{A}^{i-1}AK \text{ และ } b_i = C\bar{A}^{-i-1}B; i = 1,2,\ldots,p \qquad (14)$$

แบบจำลองที่อธิบายโดยสมการ (13) เป็นแบบจำลองแบบ ARX ซึ่งแสดงให้เห็นได้โดยตรงจาก ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) ของโอเพ่น-ลูป ซิสเต็ม (Open-Loop System) สัมประสิทธิ์ a_i และ b_i สามารถประมาณโดยวิธีรีส-สแควร์ (Least-Square) จากการกระตุ้นแบบสุ่มอินพุท (Input) u_k และเช่นเดียวกัน

เอาท์พุท (Output) y_k สำหรับจำนวน ของข้อมูล N จุด ผลเฉลยของแบทช์ รีส-สแควร์ (Batch Least-Square) คือ

$$\theta_{okid} = Y\Phi_{okid}^T(\Phi_{okid}\Phi_{okid}^T)^{-1} \qquad (15)$$

เมื่อ

$$y = [y_0\ y_1 \ldots y_p \ldots y_{N-1}],\ \theta_{okid} = [b_1\ a_1 \ldots b_p\ a_p] \text{ และ}$$

$$\Phi_{okid} = \begin{bmatrix} 0 & u_0 & \ldots & u_{p-1} & \ldots & u_{N-2} \\ 0 & y_0 & \ldots & y_{p-1} & \ldots & y_{N-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & \ldots & u_{N-p-1} \\ 0 & 0 & 0 & y_0 & \ldots & y_{N-p-1} \end{bmatrix}$$

โอเพ่น-ลูป ซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (Open-Loop System Markov Parameter) $Y_S(k) = CA^{k-1}B$ และคาลมาน ฟิลเตอร์ มาร์โค พารามิเตอร์ (Kalman Filter Markov Parameter) $Y_K(k) = CA^{k-1}AK$ สามารถจะหาได้จากสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i เป็น

$$Y_s(k) = b_k + \sum_{i=1}^{k} a_i Y_s(k-i) \qquad (16)$$

และ

$$Y_K(k) = a_k + \sum_{i=1}^{k} b_i Y_K(k-i) \qquad (17)$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (System Markov Parameter) เป็นผลเฉลยเดียวสำหรับแต่ละระบบ เราสามารถสร้าง ซิสเต็ม เมตริกซ์ (System Matrices : A,B,C) ได้โดยตรงจากโอเพ่น-ลูป ซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (Open-Loop System Markov Parameters) และสามารถหาคาลมาน ฟิลเตอร์ เกน (Kalman Filter Gain : K) จากคาลมาน ฟิลเตอร์ มาร์โค พารามิเตอร์ (Kalman Filter Markov Parameter) ซึ่งจะแสดงให้ดูในส่วนต่อไป

ในทางคณิตศาสตร์ การรีไรเซชั่น (Realization) สามารถสร้างขึ้นจากผลคูณของลำดับตัวแปรของโอเพ่น-ลูป ซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (Open-Loop System Markov Parameter) $Y_S(k) = CA^{k-1}B$ เมื่อได้ค่าของ A, B และ C ดังนั้นสิ่งที่ต้องทำคือ การกำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง ลำดับของตัวแปรไอเก็น ซิสเต็มรีไรเซชั่น อะกอลิทึม (Eigen System Realization Algorithm : ERA) สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการถูกนำไปรวมกับลำดับของซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (System Markov Parameter) เพื่อใช้ในการคำนวณสำหรับสร้างโอเพ่น-ลูป แพนท์ เมตริกซ์ (Open-Loop Plant Matrices) และคาลมาน ฟิลเตอร์ เกน (Kalman Filter Gain) เราสามารถทำโดย เริ่มจากการเขียนรูปแบบ Hankel Matrix ด้วย $Y_S(k)$ ดังสมการ (18)

$$H(k-1) = \begin{bmatrix} Y_s(k) & Y_s(k+1) & \ldots & Y_s(k+s) \\ Y_s(k+1) & Y_s(k+2) & \ldots & Y_s(k+s+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_s(k+r) & Y_s(k+r+1) & \ldots & Y_s(k+r+s) \end{bmatrix} \quad (18)$$

การใช้วิธีซิงกูลาร์ แวลู ดีคอมโพซิชั่น ฮันเคล เมตริกซ์ (Singular Value Decomposition Hankel Matrix) $H(0)$ คือ การคูณกันของตัวประกอบดังสมการ (19)

$$H(0) = U\Sigma V^T \qquad (19)$$

สำหรับการสร้างดีสครีท สเตท สเปซ โมเดล (Discrete State Space Model) ลำดับที่ n สามารถเขียนได้เป็นดังสมการต่อไปนี้

$$A = \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} U_n^T H(1) V_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \qquad (20)$$

$$B = \Sigma_n^{\frac{1}{2}} V_n^T X_{ni} \qquad (21)$$

$$C = X_{no}^T U_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \qquad (22)$$

เมื่อ Σ_n เป็นเมตริกซ์ตัวที่มีขนาด nxn ซึ่งใหญ่สุดทางด้านซ้ายส่วนของ Σ ประกอบด้วย n ซิงกูล่าแวลู (Singular Values) ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่งเป็นค่าที่มีตัวเดียวอันดับตามแนวเส้นทะแยงมุมของเมตริกซ์ไม่มีการเพิ่มขึ้น U_n และ V_n เป็นรูปแบบเมตริกซ์โดย n หลักแรกของซิงกูล่าเวกเตอร์ (Singular Vectors) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ n Singular Values จาก U และ V ตามลำดับ $X_{ni}^T = [I_{ni}\ 0_{ni} \ldots 0_{ni}]$ และ $X_{no}^T = [I_{no}\ 0_{no} \ldots 0_{no}]$ เมื่อ ni คือจำนวนของอินพุท (Input) และ no คือจำนวนของเอาท์พุท (Output)

คาลมาน ฟิลเตอร์ เกน (Kalman Filter Gain) สามารถหามาจากโอเพ่น-ลูป คาลมาน ฟิลเตอร์ มาร์โค พารามิเตอร์ (Open-Loop Kalman Filter Markov Parameter) $Y_K(k)$ และ เมตริกซ์ A และ C โดยใช้วิธีรีส-สแควร์ (Least-Square) ดังนี้

$$K = (O^T O)^{-1} O^T \begin{bmatrix} Y_K(1) \\ Y_K(2) \\ \ldots \\ Y_K(k) \end{bmatrix} \qquad (23)$$

เมื่อ

$$O = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^k \end{bmatrix}$$

วิธีการทดลอง

ทำการสร้างแบบจำลองระบบมวล-สปริงขึ้นมา จากนั้นทำการคำนวณหาสมการพื้นฐานเพื่อนำมาใช้เป็นอะนาไรติคอล โมเดล (Analytical Model) สำหรับวิธีการ ดำนวณอยู่ใน ภาคผนวก (ก)

หลังจากนั้นนำแบบจำลองระบบมวล-สปริงที่ สร้างขึ้นมาไปใช้กับหัวเขย่า (Shaker) ซึ่งจะเป็นตัวสร้าง ค่าอินพุท (Input) ให้กับระบบแล้วนำแอคเซลเลโรมิเตอร์ (Accelerometer) มาติดกับหัวเขย่า และมวลที่เราสนใจ ในการเคลื่อนที่เพื่อให้ได้ค่าอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) ที่เราต้องการ

ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการนำข้อมูลอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) ที่ได้ไปใช้กับโปรแกรม ที่เขียนไว้เพื่อใช้ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบมวล-สปริง ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณสำหรับออฟเซิพเวอร์/คาลมาน ฟิวเตอร์ (Observer/Kalman Filter Identification) มีดังนี้

1.รวบรวมข้อมูลอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) ที่ได้จากการทดลอง

2.จัดรูปแบบเมตริกซ์ (Matrix) และเอาท์พุทเวกเตอร์ (Output Vector) ใช้เทคนิคการทำรีส-สแควร์ (Least-Square Technique) เพื่อประมาณค่า ARX Model Parameter a_i และ b_i และออฟเซิฟเวอร์ มาร์

โค พารามิเตอร์ (Observer Markov Parameters) โดยการเลือกออเดอร์ (Order) *p* ของ ARX Model จากสมการ (15) ให้เหมาะสม

3.จากสมการ (16) และ (17) จะได้ซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (Open-Loop System Markov Parameters : $Y_S(k)$) และคาลมาน ฟิลเตอร์ มาร์โค พารามิเตอร์ (Kalman Filter Markov Parameter : $Y_K(k)$) ตามลำดับ

4.สร้างซิสเต็ม เมตริกซ์ (System Matrices) จาก ซิสเต็ม มาร์โค พารามิเตอร์ (Open-Loop System Markov Parameters) โดยการใช้วิธีไอเกนซิสเต็ม รีไรเซชั่น (Eigensystem Realization Method) จากสมการ (20), (21) และ (22) และหาค่าคาลมาน ฟิลเตอร์ เกรน (Kalman Filter Gain) จากคาลมาน ฟิลเตอร์ มาร์โค พารามิเตอร์ (Kalman Filter Markov Parameter) และเมตริกซ์ *A, C* จากสมการ (23)

สุดท้ายจะทำการเปรียบเทียบค่า ไอเกนแวลู (Eigen Value) ระหว่างจากอะนาไลติคอล โมเดล (Analytical Model) ที่ได้จากการคำนวณ, ไอเดนทิไฟด์ โมเดล (Identified Model) ที่ได้จากโมเดลจริงและไอเดนทิไฟด์ ที่ได้จาก Analytical Model และจากนั้นจะนำข้อมูลอินพุทตัวใหม่ใส่เข้าไปในโมเดลทั้งสองชนิดคือ โมเดลจริง (Actual Model) และไอเดนทิไฟด์ โมเดล (Identified Model) ที่ได้จากโมเดลจริงที่สร้างขึ้น แล้วเปรียบเทียบค่าเอาท์พุทที่ซึ่งมีรูปภาพแสดงขั้นตอนในการทำการทดลองแสดงใน ภาคผนวก (ข)

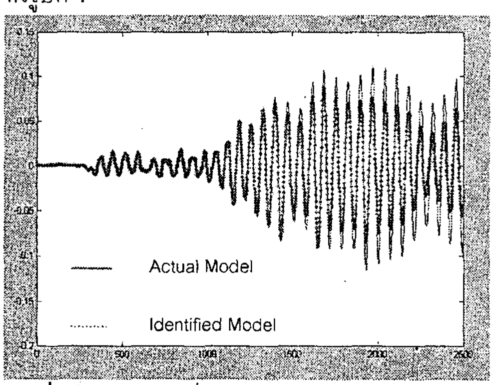
สรุปผลการทดลอง

ผลการทดลองที่ได้จากหาค่าไอเกนแวลู เป็นดังตารางที่ 1

Model	**Eigen Value**
Analytical Model	0.9956 ± 0.0935 i
Identified form Actual Model	0.9953 ± 0.0903 i
Identified from Analytical Model	0.9956 ± 0.0935i

ตารางที่ 1 ตารางเปรียบเทียบค่า Eigen Value ของ Analytical Model , Identified จาก Actual Model และIdentified จาก Analytical Model

จากนั้นนำข้อมูลชุดใหม่ซึ่งเป็นค่าอินพุท (Input) ใส่เข้าไปในโมเดลทั้งสอง แล้วนั้นนำค่าเอาท์พุท (Output) ที่ได้จาก โมเดลจริง (Actual Model) และไอเดนทิไฟด์ โมเดล ที่ได้จากโมเดลจริง (Identified from Actual Model) มาเขียนกราฟ ซึ่งจะได้เป็นค่าเอาท์พุท ดังรูปที่ 1



***รูปที่ 1** ค่าเอาท์พุทที่ได้จากโมเดลระหว่าง โมเดลจริง (Actual Model) กับไอเด็นทิไฟโมเดล (Identified Model)*

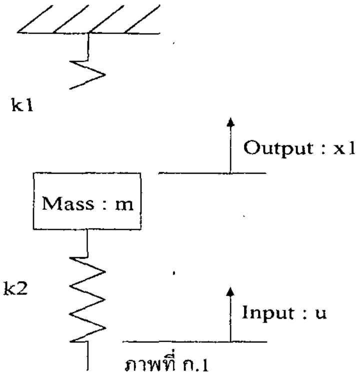
จากการทดลองพบว่าค่าไอเก็นแวลูที่ได้ระหว่างอะนาไลติคอล โมเดล (Analytical Model) กับ ไอเดนทิไฟด์ โมเดลที่ได้จากอะนาไลติคอล โมเดล (Identification from Analytical Model) มีค่าเท่ากันสรุปได้ว่าหลักการของ OKID นี้ให้ผลที่ถูกต้องกับการใช้งานที่เป็นการจำลองระบบขึ้นมา แต่ในกรณีที่เป็นการเปรียบเทียบไอเก็นแวลูที่ได้ระหว่างอะนาไลติคอล โมเดล (Analytical Model) กับ ไอเดนทิไฟด์ โมเดลที่ได้จากโมเดลจริงที่สร้างขึ้นมา (Identification from Actual Model) จะพบว่ามีความแตกต่างกันเล็กน้อย และเมื่อสังเกตจากกราฟที่ได้จากการทดลองจะพบว่าค่าเอาท์พุทที่ได้จากโมเดลทั้งสองมีค่าใกล้กัน แต่ในช่วงประมาณ ค่าที่ 1,500 เป็นต้นไปยังให้ค่าที่ไม่เข้าใกล้กันเท่าที่ควร ซึ่งอาจจะเกิดจากหลาย ๆ ปัจจัย เช่น ความผิดพลาดของโมเดลจริงที่สร้างขึ้น สัญญาณรบกวน ที่เกิดขึ้นในระหว่างทำการทดลองมีค่ามากเป็นต้น ดังนั้นเทคนิค OKID ยังต้องมีการปรับปรุงต่อ ๆ ไปเพื่อนำไปใช้ในงานจริงได้ในอนาคต เพราะเป็นเทคนิค ที่สำคัญในการช่วยลดออร์เดอของระบบ และไม่ต้องยุ่งยาก เสียเวลากับการคำนวณมาก

เอกสารอ้างอิง

1. Juang, J.-N., Applied System Identification, PRT Prentice-Hill, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
2. Lennart Ljung, System Identification : Theory for the User,Prentice-Hill, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
3. Chen, C. W., J.-N., and Huang, J.-K., "Adaptive Linear Identification and State Estimation." In Control and Dynamic System: Advances in Theory and Applications, Vol. 57, Multidisciplinary Engineering System: Design and Optimization Techniques and Their Application, edited by C.T. Leondes. New York: Academic Press, Inc., pp. 331-368.
4. Huang, J.-K., Hsiao, M.-H., and Cox, D.E., "Indirect Identification of Linear Stochastic System with Known Feedback Dynamics," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 4, 1996, pp.836-841.

ภาคผนวก ก.

ภาพที่ ก.1 เป็นระบบมวล-สปริงที่ใช้ในการทดลอง



ภาพที่ ก.1
ระบบมวล-สปริงที่ใช้ในการทดลอง

จากภาพที่ (ก.1) คำนวณหาค่าที่ใช้ในการทดลองจริงมีค่าต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

m = 0.452 kg.

k_1 = 494.00 N/m.

k_2 = 496.97 N/m.

จากระบบดังรูปนำมาคำนวณหาสมการพื้นฐานจะได้ว่า

$$m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = k_2 u \qquad (ก.1)$$

แทนค่า m, k_1 และ k_2 ลงในสมการด้านบนจะได้ดังสมการ (ก.2)

$$0.452\ddot{x}_1 + 990.97x_1 = 496.97u \qquad (ก.2)$$

จากนั้นทำการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของสเตส-สเปซ โมเดล (State-Space Model) และเราสนใจ ค่าเอาท์พุทที่ได้คือ x_1 ดังนั้นค่า $y = x_1$ ซึ่งจะเขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2192.41 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1099.49\end{bmatrix}u \quad (ก.3)$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \dot{x}_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u \quad (ก.4)$$

เมื่อ $\dot{x}_1 = x_2$

จากนั้นแปลงจากคอนทินิวอัส (Continuous) ไปเป็นดีสครีตทาม (Discrete-Time) โดยใช้ Sampling Rate 500 Hz ซึ่งต้องให้เท่ากับ Sampling Rate ที่ใช้เก็บข้อมูลที่นำมาคำนวณ ซึ่งจะได้สมการ (ก.5) และสมการ (ก.6)

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.9956 & 0.0020\\ -4.3784 & 0.9956\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.0022\\ 2.1958\end{bmatrix}u(k) \quad (ก.5)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(k) \quad (ก.6)$$

หลังจากได้อะนาไรติคอล โมเดล (Analytical Model) ออกมาแล้วทำการหาค่าไอเก็น แวลู (Eigen Value) เพื่อเก็บไว้ใช้ในการเปรียบเทียบ จากนั้นทำการทดลอง และนำค่าอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) ที่ได้นั้นไปใส่ในโปรแกรม OKID เพื่อหาสเตท-สเปซ โมเดล (State-Space Model) หรือไอเด็นทิไฟด์ โมเดล (Identified Model) ที่ได้จากโมเดลจริง สำหรับไอเด็นทิไฟด์ โมเดล (Identified Model) ที่ได้จะแสดงในสมการด้านล่างนี้

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.0005 & 0.0904\\ -0.0904 & 0.9901\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.1556\\ -0.1356\end{bmatrix}u(k) \quad (ก.7)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix}-0.1556 & 0.1356\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(k) \quad (ก.8)$$

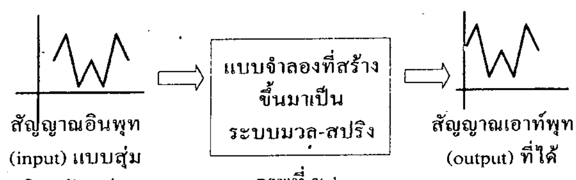
จากนั้นนำข้อมูลอินพุท (Input) ใส่เข้าไปใน Analytical Model ซึ่งจะได้ค่าเอาท์พุท (Output) จากนั้นนำค่าอินพุท และเอาท์พุทใส่เข้าไปในโปรแกรม OKID เพื่อหา สเตท-สเปซ โมเดล (State-Space Model) หรือไอเด็นทิไฟด์ โมเดล (Identified Model) ที่ได้จากอะนาไลติคอล โมเดล (Analytical Model) สำหรับไอเด็นทิไฟด์ โมเดล ที่ได้จากอะนาไลติคอล โมเดล (Identified from Analytical Model) ที่ได้จะแสดงในสมการด้านล่างนี้

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.0025 & 0.0938\\ -0.0938 & 0.9887\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.1514\\ -0.1439\end{bmatrix}u(k) \quad (ก.9)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix}-0.1514 & 0.1439\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(k) \quad (ก.10)$$

ภาคผนวก ข.

ภาพที่ข.1 เป็นภาพที่แสดงขั้นตอนในการทำงาน ตั้งแต่ การสร้างสัญญาณอินพุท (input) ซึ่งมีการเก็บข้อมูล 2 ชุด เพื่อใช้ในโปรแกรม 1 ชุด และใช้ในการทดสอบ 1 ชุด โดยขั้นตอนทั้งหมดแสดงในภาพที่ ข.1

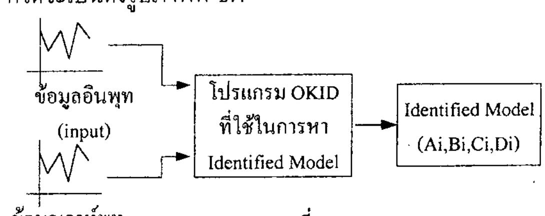


ภาพที่ ข.1

แสดงขั้นตอนการหาอินพุทและเอาท์พุท

จากภาพที่ ข.1 นั้นได้ทำการหาข้อมูลอินพุท และเอาท์พุท โดยหาข้อมูลมา 2 ชุด เพื่อไปใช้ในขั้นตอนต่อไป

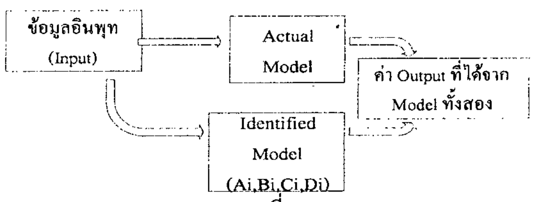
จากนั้นนำข้อมูลชุดที่หนึ่งใส่เข้าไปในโปรแกรม OKID เพื่อจำลองระบบ ซึ่งจะได้เป็นไอเด็นทิไฟด์ โมเดล (Identified Model) ซึ่งขั้นตอนที่ได้จะเป็นดังรูปภาพที่ ข.1



ภาพที่ ข.2

แสดงขั้นตอนการหา Identified Model

จากนั้นนำข้อมูลอินพุท (Input) อีกชุดหนึ่งมาใช้กับโมเดลจริง (Actual Model) และไอเด็นทิไฟ โมเดล (Identified Model) เพื่อเปรียบเทียบค่า Output ที่ได้จากโมเดลทั้งสองชนิด



ภาพที่ ข.3

แสดงขั้นตอนในการหาค่า Output ของ Model ทั้งสอง