การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 15

# การวางตำแหน่งโพลที่มีความคงทนในบริเวณวงกลมที่กำหนด สำหรับระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอน

# Robust Pole Placement in a Specified Disk for Uncertain Linear Systems

**อดิรักษ์ กาญจนหฤทัย**

**สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต 10250**

**โทร. 321-6930-9 ต่อ 212 และ 213, โทรสาร 321-4444, Email: adkancha@hotmail.com**

**Adirak Kanchanaharuthai**

**Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University**

**Pattanakarn Road, Suan Luang District, Bankok 10250, Thailand**

**Tel: 321-6930-9 Ext. 212, 213, Fax: 321-4444.**

**บทคัดย่อ**

บทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่สามารถทำให้ การวางตำแหน่งโพลวงรอบปิดในบริเวณของวงกลมที่กำหนดมีความคงทนต่อ ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นกับระบบเชิงเส้น โดยในที่นี้พิจารณาระบบเพนดูลัมผกผัน (Inverted pendulum system) เป็นกรณีศึกษา ซึ่งต้องการให้ตำแหน่งโพลวงรอบปิดทั้งหมดอยู่ในบริเวณวงกลมขนาดรัศมีใด ๆ และพร้อมกันนี้ยังคำนวณขนาดรัศมีที่น้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ในการรองรับความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นโดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สุดท้ายแสดงผลของตัวอย่างการควบคุมที่ได้นำเสนอซึ่งสามารถวางตำแหน่งโพลในบริเวณที่ต้องการ

**คำสำคัญ**: การวางตำแหน่งโพลในบริเวณวงกลม/การวางตำแหน่งโพลที่มีความคงทน/ระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอน

**Abstract**

In this paper, we present a method for designing state-feedback controller achieving robust pole placement in specified disk for uncertain linear system. The inverted pendulum is considered as study case which requires all closed-loop poles assigned in arbitrary circle and simultanously provides condition for calculating possible minimum radius to endure uncertainty by using Linear Matrix Inequality technique. Finally, we show example of the proposed method assigning pole location in specified region.

**Keywords**: Pole Placement in a Specified Disk/ Robust Pole Placement / Uncertain linear system

## 1 บทนำ

ปัจจุบันระบบควบคุมได้เข้ามามีบทบาทในอุตสาหกรรมด้านต่าง ๆ มากมายและระบบควบคุมที่ดีนั้นต้องมีเสถียรภาพและให้ผลที่แน่นอนเป็นสิ่งที่ต้องการขั้นพื้นฐาน แต่การออกแบบระบบควบคุมนั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องไม่ให้เกิดปัญหาใด ๆ ขึ้น และปัญหาสำคัญที่พบบ่อยและเป็นปัญหาขั้นพื้นฐานของระบบควบคุมคือ การออกแบบตัวควบคุมนั้นสามารถวางตำแหน่งโพลวงรอบปิด (closed-loop poles) ในบริเวณที่ต้องการต่าง ๆ ได้ เพราะเนื่องจากตำแหน่งโพลวงรอบปิดนี้เป็นเครื่องบ่งบอกถึงพฤติกรรมของผลตอบสนองเชิงเวลา (time response behavior) โดยทั่วไปเมื่อระบบที่พิจารณามีความแน่นอนทำให้การวาง ตำแหน่งโพลในบริเวณที่กำหนดมีความถูกต้องแม่นยำสูง แต่ในทางตรงกันข้ามเมื่อระบบที่ต้องการพิจารณามีผลของความไม่แน่นอนเกิดขึ้น ปัญหาของการวางตำแหน่งโพลของระบบที่มีความไม่แน่นอนนี้จำเป็นต้องให้ผลของตำแหน่งโพลกระจายอยู่ใกล้ตำแหน่งโพลของระบบที่มีความแน่นอน (nominal system) และอยู่ในบริเวณที่ต้องการเพื่อสามารถรักษาพฤติกรรมต่าง ๆ ของระบบที่แน่นอนหรือระบบที่ได้ทำการออกแบบได้เช่นเดิม

ดังนั้นบทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่ สามารถทำให้การวางตำแหน่งโพลวงรอบปิดในบริเวณของวงกลมที่กำหนด มีความคงทนต่อความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นกับระบบเชิงเส้น โดยในที่นี้พิจารณาระบบเพนดูลัมผกผัน (Inverted pendulum system) เป็นกรณีศึกษา ซึ่งต้องการให้อยู่ในบริเวณวงกลมขนาดรัศมีใด ๆ และพร้อมกันนี้ยังคำนวณขนาดรัศมีที่น้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ในการรองรับความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นโดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยเริ่มจากการจัดรูปของระบบเพนดูลัมผกผันดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ Norm-bonud Linear Differential Inclusions (NLDIs) ซึ่งสามารถอธิบายขอบเขตการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอนได้ จากนั้นทำการจัดรูปให้อยู่ในรูปของเงื่อนไขบังคับ LMI ที่กำหนดตำแหน่งโพลวงรอบปิดให้อยู่ในวงกลมรัศมีใด ๆ นอกจากนี้เพื่อสามารถทำการคำนวณหาขนาดของรัศมีที่น้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ เพื่อสามารถรองรับความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้น และผลเฉลยจากเงื่อนไขบังคับ LMI ที่ได้นำมาออกแบบตัว

ควบคุมป้อนกลับที่สามารถวางตำแหน่งโพลในบริเวณที่กำหนด

ลำดับเนื้อหาในบทความนี้เริ่มจาก หัวข้อที่ 2. กล่าวถึงการวางตำแหน่งโพลในวงกลมและการออกแบบ ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ ที่สามารถวางตำแหน่งโพลและ ให้เงื่อนไขของการหารัศมีของวงกลมที่มีขนาดที่น้อยที่สุด ในหัวข้อที่ 3 หัวข้อที่ 4 แบบจำลองของระบบเพนดูลัมผกผันและแสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ และหัวข้อสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์และสรุปผลการออกแบบตัวควบคุม

## 2 การวางตำแหน่งโพลที่มีความคงทนในบริเวณวงกลม

พิจารณาระบบเชิงเส้นที่ประกอบด้วยความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในเมทริกซ์สถานะและสัญญาณเข้าซึ่งแทนในสมการต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \tag{1}$$

โดย $x(t) \in \mathbf{R}^n$ แทนด้วยตัวแปรสถานะ และ$u(t) \in \mathbf{R}^m$ แทนด้วยสัญญาณเข้าควบคุม และเพื่อให้สะดวกในการพิจารณา ดังนั้นกำหนดให้เมทริกซ์ $A$ และ $B$ เป็นเมทริกซ์ที่เหมาะสม นอกจากนี้กำหนดให้เมทริกซ์ $\Delta A$ และ $\Delta B$ แทนด้วยเมทริกซ์ที่มีความไม่แน่นอนซึ่งจะแปรตามเวลา (time varing) และสมมุติว่าสามารถจัดให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\begin{pmatrix} \Delta A & \Delta B \end{pmatrix} = D\Delta(t) \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

โดยเมทริกซ์ $D, E_1$ และ $E_2$ แทนด้วยเมทริกซ์ค่าคงตัวซึ่งมีมิติที่เหมาะสม และเป็นโครงสร้างของ NLDI (Norm-bound Linear Differential Inclusion) [1] และ $\Delta(t) \in \mathbf{R}^{i \times j}$ แทนด้วยฟังก์ชันของเมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าโดยสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I \tag{3}$$

บทความนี้ได้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ (state feedback controller) ซึ่งมีโครงสร้างดังต่อไปนี้

$$u(t) = Kx(t) \tag{4}$$

เมื่อแทนค่าของสมการที่ (4) ลงในสมการที่ (1) จะได้สมการของระบบวงรอบปิดดังต่อไปนี้

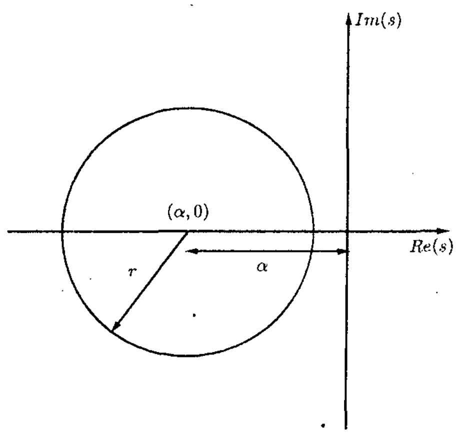
$$\dot{x}(t) = (A + BK + \Delta A + \Delta BK)x(t) \tag{5}$$

และต้องการวางตำแหน่งของทุก ๆ โพลวงรอบปิดของระบบให้อยู่ภายในวงกลม $D(\alpha, r)$ ดังรูปที่ 1 ของระบบที่มีความไม่แน่นอน โดย $\alpha$ แทนด้วยตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลม $(\alpha, 0)$ และ $r$ แทนด้วยรัศมีของวงกลม เมื่อแทนสมการที่ (2) ลงในสมการที่ (6) จะได้

$$\dot{x}(t) = A_{cl}x(t) = (A + BK + D\Delta(t)(E_1 + E_2K))x(t) \tag{6}$$

และเงื่อนไขในการวางตำแหน่งโพลให้อยู่บริเวณวงกลมที่กำหนดใด ๆ นี้สามารถหาได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

**ทฤษฎีที่ 1:** [3] พิจารณาระบบที่มีความไม่แน่นอนสมการที่ (1) และ (2) และกำหนดให้ $A_{cl} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ตำแหน่งโพลวงรอบปิดของ $A_{cl}$ อยู่ในบริเวณของ $D(\alpha, r)$ และมีเสถียรภาพกำลังสองแบบ $d$




รูปที่ 1: บริเวณวงกลมที่กำหนด $D(\alpha, r)$

(quadratic-d stability) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ LMI ต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & \frac{A_{cl\alpha}}{r} \\ \frac{A_{cl\alpha}^T}{r} & P \end{pmatrix} > 0 \tag{7}$$

โดย $A_{cl\alpha} = A_{cl} + \alpha I$

## 3 การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ

หัวข้อนี้พิจารณาปัญหาการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับซึ่งสามารถวางตำแหน่งโพลในบริเวณที่กำหนดซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีต่อไปนี้

**ทฤษฎีที่ 2:** พิจารณาระบบในสมการที่ (1) และ (2) ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ $K$ สามารถวางตำแหน่งโพลในบริเวณวงกลมที่กำหนด ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $X = X^T > 0$ และ $Y$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของเงื่อนไขบังคับ LMI ต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} -r^2X & \Phi^T & \Theta^T \\ \Phi & -I & 0 \\ \Theta & 0 & D^TD - X \end{pmatrix} < 0 \tag{8}$$

โดย $\Phi = E_1X + E_2Y$ และ $\Theta = A_\alpha X + BY$

**พิสูจน์** จากทฤษฎีที่ 1 เมื่อใช้ส่วนเติมเต็มของ Schur (Schur complement) [1] ในสมการที่ (8) จะได้ดังนี้

$$A_{cl\alpha}^T P A_{cl\alpha} - r^2P < 0 \tag{9}$$

เมื่อพิจารณาในพจน์ที่ 1 ของสมการที่ (9) จะได้ผลดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &(A_\alpha + BK + D\Delta(E_1 + E_2K))^TP((A_\alpha + BK + D\Delta(E_1 + E_2K)) \\ &\leq (A_\alpha + BK)^TP(A_\alpha + BK) - P + (E_1 + E_2K)^T(E_1 + E_2K) \\ &\quad +(A_\alpha + BK)^TPD(I - D^TPD)^{-1}D^TP(A_\alpha + BK) \end{aligned} \tag{10}$$

โดย $A_\alpha = A + \alpha I$ จากนั้นใช้ matrix inversion lemma [5] ในสมการที่ (10) จะได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &(A_\alpha + BK)^T(P^{-1} - DD^T)^{-1}(A_\alpha + BK) \\ &\quad +(E_1 + E_2K)^T(E_1 + E_2K) \end{aligned} \tag{11}$$

แทนผลจากสมการที่ (11) ในสมการที่ (9) จะได้

$$
\begin{aligned}
&(A_\alpha + BK)^T(P^{-1} - DD^T)^{-1}(A_\alpha + BK) \\
&\quad +(E_1 + E_2K)^T(E_1 + E_2K) - r^2P \qquad (12)
\end{aligned}
$$

กำหนดให้เมทริกซ์ $X = P^{-1}, K = YX^{-1}$ และคูณเมทริกซ์ $X$ ทางด้านซ้ายและด้านขวาของสมการที่ (13) จะได้

$$
\begin{aligned}
&(A_\alpha X + BY)^T(X - DD^T)^{-1}(A_\alpha X + BY) \\
&\quad +(E_1X + E_2Y)^T(E_1X + E_2Y) - r^2X < 0 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

จากนั้นเมื่อใช้ส่วนเติมเต็มของ Schur จะได้ผลดังสมการที่ (8)

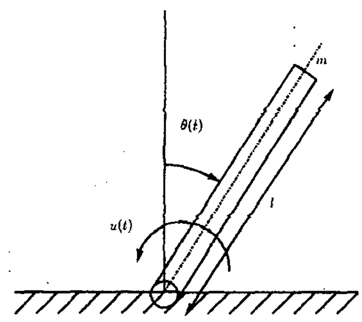
เพื่อสามารถหาขนาดของรัศมีที่น้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ที่จะใช้วางตำแหน่งโพลวงรอบปิด ซึ่งเป็นตามเงื่อนไขในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดดังต่อไปนี้

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\textbf{(minimize)} & \beta \\
\textbf{(subject to)} & \begin{pmatrix} -\beta X & \Phi^T & \Theta^T \\ \Phi & -I & 0 \\ \Theta & 0 & D^TD - X \end{pmatrix} < 0 \\
 & X = X^T > 0
\end{array}
}
\qquad (14)
$$

ส่วนตัวควบคุมป้อนกลับสถานะหาได้จากผลเฉลยของ $X$ และ $Y$ ซึ่งจะได้ $u(t) = Kx(t) = YX^{-1}x(t)$ และ $r_{min} = \sqrt{\beta}$

## 4 ผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์

การจำลองระบบนี้พิจารณาระบบเพนดูลัมผกผันดังรูปที่ 2 และมีสมการการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้



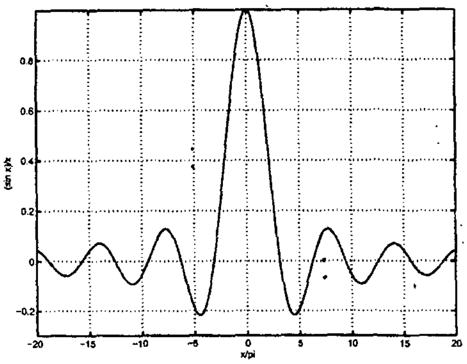

รูปที่ 2: ระบบเพนดูลัมผกผัน

$$\ddot{\theta} - \sin\theta = u(t) + w(t) \qquad (15)$$

และเพื่อสะดวกในการพิจารณาเลือกให้ค่าของ $w(t) = 0$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในสมการปริภูมิสถานะได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sin\theta}{\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad (16)$$

พิจารณาสมการที่ (16) พบว่าฟังก์ชัน $\frac{\sin\theta}{\theta}$ นี้สามารถแทนด้วยฟังก์ชันที่มีขอบเขต ดังในรูปที่ 3 ซึ่งจะได้ค่าของฟังก์ชันอยู่ประมาณ




รูปที่ 3: ฟังก์ชันที่มีขอบเขต $\frac{\sin\theta}{\theta}$

ระหว่าง $-0.2 \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$ เมื่อจัดระบบในสมการที่ (16) ให้อยู่ในรูปของ NLDI จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}}_{D} \Delta(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u(t) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้ $E_2 = 0$ และ $||\Delta(t)|| < 1$ ตามลำดับ การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสถานะเพื่อให้ได้ผลเป็นไปตามที่กำหนด เราวางตำแหน่ง โพลวงรอบปิดที่มีความคงทนของระบบดังกล่าวในบริเวณวงกลม ซึ่งมีรัศมีตามที่กำหนดและพร้อมกันนี้เราสามารถ คำนวณขนาดของรัศมีที่น้อยที่สุดของโพล วงรอบปิดที่จะอยู่ได้ การพิจารณากำหนดให้มีเงื่อนไขบังคับ ให้โพลวงรอบปิดอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (-10,0) และมีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย ซึ่งต้องใช้สัญญาณเข้าควบคุม $u(t) = Kx(t)$ โดยอัตราขยายป้อนกลับตัวแปรสถานะ $K$ ซึ่งคำนวณได้จาก **LMI Control Toolbox** [2] และใช้สมการที่ (8) ซึ่งเท่ากับ $K = (-100.6802 - 20.028)$ และตำแหน่งโพลวงรอบปิดแสดงดังรูปที่ 4 และจะได้ขนาดรัศมีที่น้อยที่สุด เท่ากับ 0.779 หน่วย โดยอัตราขยายป้อนกลับสถานะ ที่มีรัศมีที่น้อยที่สุดซึ่งคำนวณจากสมการที่ (14) $K_{rmin} = (-100.405 - 20.0005)$ และตำแหน่งโพลวงรอบปิด แสดงดังรูปที่ 5 นอกจากนี้แสดงผลตอบสนองเชิงเวลา ของผลตอบสนอง $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ และ $u(t)$ ในรูปที่ 6

## 5 สรุป

บทความนี้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะเพื่อให้สามารถวางตำแหน่งโพลวงรอบปิดในบริเวณวงกลม ที่กำหนดสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีรวมของความไม่แน่นอนที่ เกิดขึ้นของพารามิเตอร์ซึ่งผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ นี้พิจารณาระบบเพนดูลัมผกผันเป็นกรณีศึกษา ซึ่งสามารถวางตำแหน่งโพลในบริเวณที่กำหนดพร้อมกันนี้ สามารถหารัศมีของวงกลมดังกล่าวที่น้อยที่สุดที่จะสามารถ รองรับความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ที่เกิดขึ้น แต่

การวิธีการออกแบบนี้ เป็นการออกแบบป้อนกลับสถานะที่สมมุติว่า สามารถสังเกตตัวแปรสถานะของระบบได้ทั้งหมด ซึ่งในความเป็นจริงแล้วเป็นไปได้ยาก ดังนั้นงานวิจัยลำดับต่อไปควรเป็นการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสัญญาณออก (output feedback controller)

## 6 กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคุณพิเชษฐ์ บุญหนุน ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการใช้ LaTeXและอาจารย์ภิราภรณ์ ก้อนคำ ผู้ช่วยคณบดีฝ่ายกิจการนักศึกษา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิตที่ให้คำแนะนำเกี่ยวกับงานวิจัยนี้

## เอกสารอ้างอิง

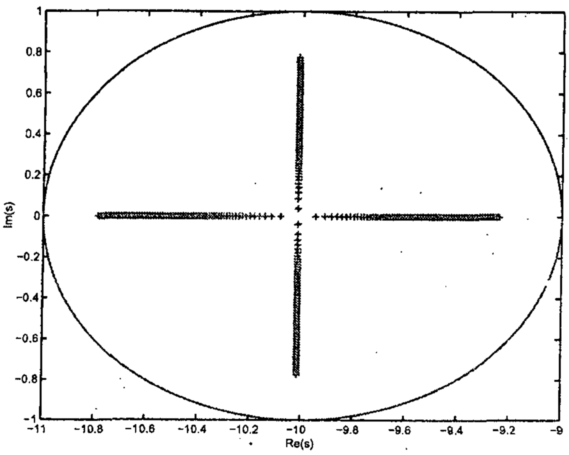
[1] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishanan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, 1994.

[2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The MathWork, 1995.

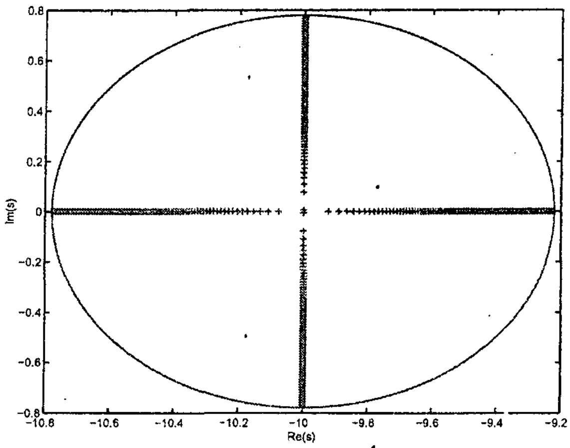
[3] G. Garcia and J. Bernussou, "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 1, pp. 184-190, 1995.

[4] B. S. Kim, H. S. Han and J. G. Lee, "Pole Placement of uncertain discrete systems in the smallest disk by statefeeback," *Proceeding of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 4558-4563, Kobe, Japan, 1996.

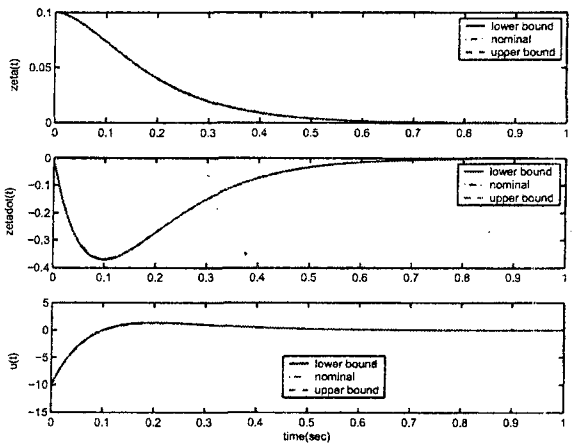
[5] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, 1990.




รูปที่ 4: pole location ของ $D(-10, 1)$




รูปที่ 5: pole location ของ $D(-10, 0.779)$




รูปที่ 6: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ และ $u(t)$

### List of Symbols

- $\mathbf{R}$: The set of real numbers.
- $\mathbf{R}^m$: The set of real $m$-vector.
- $\mathbf{R}^{m\times n}$: The vector space of $m \times n$ real matrices.
- $X^T$: The transpose of a matrix $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$.
- $I_m$: The identity matrix of size $m$ of the identity of linear operator. We omit the subscript when $m$ can be determined from context.
- $X^{-1}$: The inverse of $X$ or the inverse of linear operator $X$, *i.e.*, $XX^{-1} = I$.
- **Tr**: The Trace of $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$
- $X > 0$ ($X \geq 0$): The symmetric $X$ is positive definite (semidefinite), *i.e.*, $X = X^T$ and $z^T X z > 0$ ($z^T X z \geq 0$) for all $z \in \mathbf{R}^n$.
- $\in$: belongs to

### List of Acronyms

- LMI: Linear Matrix Inequality