

## การออกแบบตัวควบคุมที่มีดัชนีสมรรถนะ $H_2$ ที่เหมาะสมที่สุดด้วยตัวดำเนินการเดลต้า Optimal $H_2$ Controller Design with Delta Operator

อดิรัก กาญจนหฤทัย

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต 10250

โทร. 321-6930-9 ต่อ 212 และ 213, โทรสาร 321-4444, Email: [adkancha@hotmail.com](mailto:adkancha@hotmail.com)

Adirak Kanchanaharuthai

Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University

Pattanakarn Road, Suan Luang District, Bangkok 10250, Thailand

Tel: 321-6930-9 Ext. 212, 213, Fax: 321-4444.

### บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่มีดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ซึ่งใช้ตัวดำเนินการเดลต้าและข้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequalities: LMIs) การออกแบบนี้จะให้เงื่อนไขบังคับของการมีเสถียรภาพของระบบวงรอบปิดและการประกันผลของดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่เหมาะสมที่สุดซึ่งสามารถอธิบายในความหมายของ การทำให้พลังงานที่เกิดจากสัญญาณออกที่ใช้เป็นสัญญาณควบคุมของระบบให้มีค่าน้อยที่สุด และพร้อมกันนี้แสดงความสัมพันธ์ของดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ของระบบในโดเมนเดลต้าที่มีต่อระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและระบบในเวลาเต็มหน่วยเมื่อมีการปรับเปลี่ยนคาบการซิกตัวอย่าง

**คำสำคัญ:** การควบคุมที่มีดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่เหมาะสมที่สุด/ ตัวดำเนินการเดลต้า

### Abstract

In this paper, we propose a controller design method which can guarantee optimal  $H_2$  performance using Delta operator and Linear Matrix Inequality (LMI). This design method provides the stability constraint of closed-loop system and guarantees optimal  $H_2$  performance which can be described meaningfully as the energy of output signal or regulated signal of system is minimized and simultaneously shows relation of  $H_2$  performance between delta domain system and both continuous time and discrete time.

**Keywords:** Optimal  $H_2$  Control/ Delta Operator

### 1 บทนำ

การพัฒนาเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์ ได้มีความเจริญอย่างรวดเร็ว ซึ่งส่งผลในแง่ดีต่อการนำคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพเข้ามาใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบของระบบ และเป็นการเพิ่มขีด

ความสามารถในการควบคุมระบบที่เป็นอยู่ในด้านต่าง ๆ รวมทั้งในด้านอุตสาหกรรมที่มีการขยายตัวอย่างรวดเร็ว คอมพิวเตอร์ที่นำมาใช้นี้เปรียบเสมือน ตัวควบคุมการทำงานทั้งหมดของระบบ ดังนั้นเพื่อให้การทำงานมีประสิทธิภาพ จึงต้องทำการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะสมกับระบบหรือกระบวนการนั้น ๆ และเป็นที่ยอมรับกันดีว่าในระบบควบคุมได้แบ่ง การพิจารณาเป็นระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง (Continuous-time system) และระบบในเวลาเต็มหน่วย (Discrete-time) ซึ่งการควบคุมระบบดังกล่าวทั้ง 2 มีการออกแบบที่แตกต่างกันดังนี้คือ ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องใช้คาบการซิกตัวอย่าง (sampling time) เข้าใกล้ศูนย์หรือเป็นศูนย์และใช้ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) ส่วนระบบในโดเมนเต็มหน่วยใช้คาบการซิกตัวอย่างที่มากกว่าศูนย์และใช้ผลการแปลง  $Z$  ( $Z$  Transform) ดังนั้นจะเห็นว่าการควบคุมและออกแบบในระบบดังกล่าวทั้ง 2 ไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างทั้งสองระบบได้

ปัจจุบันได้มีการวิจัยเพื่อศึกษาระบบควบคุม ที่สามารถอธิบายพฤติกรรมและสร้างความสัมพันธ์ของ ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและระบบในเวลาเต็มหน่วยให้มีความเกี่ยวข้องกับ คาบการซิกตัวอย่างซึ่งสามารถปรับเปลี่ยนได้โดยเรียกระบบดังกล่าวนี้ว่า ระบบในโดเมนเดลต้าและใช้ผลการแปลงเดลต้า ( $\delta$  operator) ซึ่งเสนอโดย R. H. Middleton และ G. C. Goodwin [3]

ดังนั้นบทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่มีดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ซึ่งใช้ตัวดำเนินการเดลต้าและ ข้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequalities: LMIs) การออกแบบนี้จะให้เงื่อนไขบังคับของการมีเสถียรภาพของระบบวงรอบปิดและการประกันผลของดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่เหมาะสมที่สุดซึ่งสามารถอธิบายในความหมายของ การทำให้พลังงานที่เกิดจากสัญญาณออกที่ใช้เป็นสัญญาณที่ต้องการควบคุมของระบบให้มีค่าน้อยที่สุด และพร้อมกันนี้แสดงความสัมพันธ์ของดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ของระบบในโดเมนเดลต้าที่มีต่อระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง และระบบในเวลาเต็มหน่วยเมื่อมีการปรับเปลี่ยนคาบการซิกตัวอย่าง

ลำดับเนื้อหาในบทความนี้เริ่มจาก หัวข้อที่ 2. ระบุว่า

ถึงระบบเชิงเส้นในโดเมนเดลต้า ตามด้วยการออกแบบตัวควบคุมที่มีดัชนีสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  ในข้อที่ 3 หัวข้อที่ 4 แสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์โดยใช้ระบบเพนดูลัมผกผันเป็นกรณีศึกษา และหัวข้อสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์และสรุปผลการออกแบบตัวควบคุม

## 2 ระบบเชิงเส้นในโดเมนเดลต้า

พิจารณาระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง (Continuous time system) ดังต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

โดย  $T$  แทนด้วยคาบการสุ่มตัวอย่างและเมื่อแปลงระบบข้างต้นให้อยู่ในระบบโดเมนเดลต้า (Discrete-time system) หรือใช้วิธีการที่เรียกว่า Discretization จะได้ดังต่อไปนี้

$$x_{k+1} = (e^{AT})x_k + \left(\int_0^T e^{A\tau} B d\tau\right)u_k =: A_\delta x_k + B_\delta u_k, \quad (3)$$

$$y_k = Cx_k =: C_\delta x_k \quad (4)$$

และในสมการที่ (3) และ (4) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในระบบเดลต้าหน่วยที่อยู่ในโดเมน  $\delta$  ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\delta x_k =: \frac{x_{k+1} - x_k}{T} = \underbrace{\left(\frac{A_\delta - I}{T}\right)}_{A_\delta} x_k + \underbrace{\left(\frac{B_\delta}{T}\right)}_{B_\delta} u_k, \quad (5)$$

$$y_k = C_\delta x_k \quad (6)$$

โดยสามารถแทนทั้งระบบในโดเมนต่อเนื่องและระบบในโดเมนเดลต้าได้ดังนี้

$$\rho x_k := \begin{cases} \dot{x} & T = 0 \text{ (continuous time)} \\ \delta x_k & T \neq 0 \text{ (discrete time)} \end{cases} \quad (7)$$

และ

$$S_{t_0}^{t_f} f(t) dt := \begin{cases} \int_{t_0}^{t_f} f(t) dt & T = 0 \\ T \sum_{k=\frac{t_0}{T}}^{\frac{t_f}{T}-1} f(kT) & T \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

ดังนั้นสามารถเขียนระบบในโดเมนเดลต้าหน่วยที่อยู่ในโดเมน  $\delta$  ได้ดังนี้

$$\rho x_k = A_\delta x_k + B_\delta u_k \quad (9)$$

$$y = C_\delta x_k \quad (10)$$

โดย  $A_\delta := \frac{A_\delta - I}{T} = \Psi(A, T)A$ ,  $B_\delta = \frac{B_\delta}{T} = \Psi(A, T)B$ ,  $C_\delta = C$  และ  $\Psi(A, T) = I + \frac{AT}{2} + \frac{A^2 T^2}{3} + \dots$  ซึ่งสมการที่ (9) และ (10) เมื่อให้  $T \rightarrow 0$ ,  $A_\delta(T) \rightarrow A$ ,  $B_\delta(T) \rightarrow B$  และจะเห็นว่าเมื่อค่าของการสุ่มตัวอย่าง  $T$  (Sampling time) เข้าใกล้ศูนย์ เมทริกซ์ของระบบในโดเมนเวลาเดลต้าหน่วยในโดเมน  $\delta$  จะเข้าใกล้ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องซึ่งจะแตกต่างจากระบบในโดเมนเวลา เดลต้าหน่วยในโดเมนเวลา  $z$  เช่น  $\lim_{T \rightarrow 0} A_\delta \rightarrow I$  และ  $\lim_{T \rightarrow 0} B_\delta \rightarrow 0$  เป็นต้น ซึ่งจะเห็นว่าระบบในโดเมนเดลต้าหน่วยในโดเมน  $\delta$  สามารถรวมทั้งระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องกับโดเมนเวลาเดลต้าหน่วยไว้ในระบบเดียวกัน นอกจากนั้นบริเวณที่มีเสถียรภาพสำหรับโพลของระบบในโดเมน  $\delta$  อยู่ในวงกลม  $D_T$  ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-\frac{1}{T}, 0)$  และรัศมีขนาด  $\frac{1}{T}$  ในระนาบเชิงซ้อน และสามารถ แสดงความสัมพันธ์

ระหว่างระบบเดลต้าหน่วยในโดเมน  $\delta$  และระบบเดลต้าหน่วยในโดเมน  $z$  ได้ดังนี้คือ  $\gamma = \frac{z-1}{T}$  โดย  $z$  และ  $\gamma$  แทนด้วยตัวแปรการแปลงในโดเมน  $z$  และโดเมน  $\delta$  ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาในโดเมน  $z$  มีบริเวณที่มีเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขของ  $|z| < 1$  และในโดเมน  $\delta$  มีบริเวณที่มีเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขของ  $\frac{T}{2}|\gamma|^2 + \Re \gamma < 0$  ซึ่งสมมูลกับบริเวณ  $D_T$  และถ้าพิจารณาที่  $T = 0$  เงื่อนไขของโดเมน  $\delta$  จะลดลงสู่  $\Re \gamma < 0$  ซึ่งบริเวณดังกล่าวคือบริเวณทางด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อนหรือบริเวณที่มีเสถียรภาพของระบบโดเมนเวลาต่อเนื่อง ที่สามารถแทนด้วยตัวแปรการแปลงในโดเมนเวลาต่อเนื่อง  $s$  (รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถหาได้จาก [3])

บทความนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมที่มีโครงสร้างของสัญญาณเข้า  $u(t)$  ในรูปของการป้อนกลับตัวแปรสถานะ (state feedback controller) ในโดเมน  $\delta$  ดังในสมการต่อไปนี้

$$u_k = Kx_k \quad (11)$$

โดยอัตราขยายป้อนกลับสถานะ  $K$  นี้สามารถทำให้ระบบ (9) และ (10) ให้ผลของดัชนีสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  ที่น้อยที่สุดสำหรับโดเมน  $\delta$

## 3 การออกแบบตัวควบคุมด้วยดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$

พิจารณาระบบในสมการที่ (9) และกำหนดให้มีค่าของดัชนีสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  ที่น้อยที่สุด จะเป็นดังสมการต่อไปนี้

$$J = S_0^\infty (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) dt \quad (12)$$

โดยที่เมทริกซ์  $Q$  และ  $R$  มีค่าเป็นค่าบวกแน่นอน (Positive definite) และเมื่อแทนค่าของ  $u_k$  ลงในสมการที่ (12) จะได้สมการต่อไปนี้

$$J = S_0^\infty (x_k^T Q x_k + K^T R K) dt \quad (13)$$

จากสมการที่ (13) สามารถสร้างเงื่อนไขบังคับของ LMI ได้ดังนี้ คือ กำหนดให้ฟังก์ชันลิยาปูนอฟกำลังสอง (Quadratic Lyapunov function)  $x_k^T P x_k$  โดย  $P = P^T > 0$  ซึ่งนำมาสร้างความสัมพันธ์กับฟังก์ชันค่าในสมการที่ (12) ได้ดังนี้

$$\rho[x_k^T P x_k] \leq -x_k^T (Q + K^T R K) x_k \quad (14)$$

โดยพิจารณาคุณสมบัติจากโดเมน  $\delta$  ดังต่อไปนี้

$$\rho[x_k y_k] = [\rho x_k] y_k + x_k [\rho y_k] + T[\rho x_k][\rho y_k] \quad (15)$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการที่ (14) ลงในสมการที่ (15) จะได้ดังนี้

$$\rho[x_k^T P x_k] = x_k^T (A_\delta^T P + P A_\delta + T A_\delta P A_\delta^T) x_k \quad (16)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ  $t$  (ยกเว้นที่เวลาที่มีการสวิตช์) และ เมื่ออินทิเกรตในโดเมน  $\delta$  ทั้งสองข้างของสมการจากเวลาที่ศูนย์ถึงเวลาที่  $t$  มีค่าเป็นอนันต์จะได้

$$x_\infty^T P x_\infty - x_0^T P x_0 \leq -S_0^\infty x_k^T (Q + K^T R K) x_k \quad (17)$$

จะได้

$$J = S_0^\infty x_k^T (Q + K^T R K) x_k \leq x_0^T P x_0, x_\infty^T P x_\infty \rightarrow 0 \quad (18)$$

และจากสมการที่ (12) แสดงความสมมูลได้ดังนี้

$$A_\delta^T P + P A_\delta + T A_\delta^T P A_\delta + K^T R K + Q \leq 0 \quad (19)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าของ  $u_k = Kx_k$  ลงในสมการที่ (9) จะได้ดังนี้

$$\rho x_k = A_{cl}x_k = (A_\delta + B_\delta K)x_k, x(0) = x_0 \quad (20)$$

โดยกำหนดให้  $x_0$  แทนด้วยเงื่อนไขของสถานะเริ่มต้นของระบบที่ได้พิจารณา และเมื่อแทนค่าของ  $A_{cl}$  ลงในสมการที่ (19) จะได้

$$(A_\delta + B_\delta K)^T P + P(A_\delta + B_\delta K) + T(A_\delta + B_\delta K)^T P(A_\delta + B_\delta K) + K^T R K + Q \leq 0 \quad (21)$$

ในสมการที่ (21) จะเห็นได้ว่าผลคูณของเมทริกซ์อัตราขยายป้อนกลับสถานะ  $K$  และเมทริกซ์ลียาปูนอฟ  $P$  ทำให้เกิดปัญหาของการไม่เป็นการโปรแกรมกึ่งแน่นอน (Semidefinite programming: SDP) รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถหาได้จาก [1] และ [2] ตามลำดับ ซึ่งเราสามารถทำการแปลงจากปัญหาที่ไม่เป็น SDP ให้เป็นสู่ปัญหา SDP ได้โดยการกำหนดให้มีเมทริกซ์ใหม่คือ  $Y$  และ  $W$  ซึ่งมีขนาดของเมทริกซ์ที่สอดคล้องกัน นอกจากนี้ยังได้ความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันดังนี้คือ  $Y = P^{-1}, W = KP^{-1}(P > 0, Y > 0)$  ดังนั้นจะได้  $P = Y^{-1}$  ดังนั้นตัวควบคุมป้อนกลับสถานะจะอยู่ในรูปของ  $u = Kx = WY^{-1}x$  เมื่อแทนความสัมพันธ์ดังกล่าวในสมการที่ (21) จะได้ดังนี้

$$YA_\delta^T + A_\delta Y + B_\delta W + W^T B_\delta^T + Y^T Q Y + W^T R W \leq 0 \\ + T(A_\delta Y + B_\delta W)^T Y^{-1}(A_\delta Y + B_\delta W) \leq 0 \quad (22)$$

และสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$YA_\delta^T + A_\delta Y + B_\delta W + W^T B_\delta^T \\ + \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix} \leq 0 \quad (23)$$

โดย  $W = T^{\frac{1}{2}}(A_\delta Y + B_\delta W)$  เมื่อใช้ส่วนเติมของ Schur (Schur Complement) ทำการจัดรูปในสมการที่ (23) จะได้สมการเมทริกซ์กำลังสอง ซึ่งสามารถเปลี่ยนเป็นสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังสมการต่อไปนี้

$$L(Y, W) = \begin{pmatrix} \mathcal{N} & Y & W^T & W^T \\ Y & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & -R^{-1} & 0 \\ W & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

โดย  $\mathcal{N} = YA_\delta^T + A_\delta Y + B_\delta W + W^T B_\delta^T$  และในสมการที่ (18) สามารถจัดให้อยู่ในรูปของ LMI ได้ดังนี้ (ใช้ส่วนเติมของ Schur)

$$x_0^T P x_0 = x_0^T Y^{-1} x_0 \leq \gamma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \text{Tr}(x_0^T P x_0) \leq \text{Tr}(\gamma) \quad (25)$$

ดังนั้นการพิจารณาค่าที่น้อยที่สุดของสมการที่ (24) และ (25) จะแสดงรูปแบบของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้ดังนี้

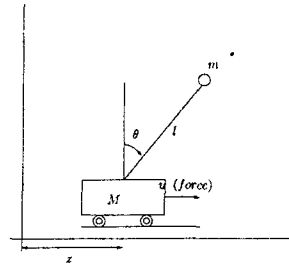
$$\begin{array}{ll} (\text{minimize}) & \text{Tr}(\gamma) \\ (\text{subject to}) & (24) \text{ และ } Y = Y^T > 0 \end{array} \quad (26)$$

ข้อสังเกต จากสมการที่ (16) จะเห็นได้ว่า

- เมื่อให้  $T \rightarrow 0$  จะได้  $A^T P + P A < 0$  ซึ่งลดลงสู่สมการลียาปูนอฟ (Lyapunov inequality) ในการนิยามของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง
- เมื่อให้  $T \neq 0$  แทน  $A_\delta = \frac{A_q - I}{T}$  ในสมการที่ (16) จะได้  $A_q^T P A_q - P < 0$  ซึ่งลดลงสู่สมการลียาปูนอฟ (Lyapunov inequality) ในการนิยามของระบบในโดเมนเต็มหน่วยในโดเมน  $Z$

#### 4 ผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์

การจำลองระบบนี้พิจารณาแบบเพนดูลัมผกผันดังรูปที่ 1 ซึ่งมีแบบจำลองที่ผ่านการทำให้เป็นเชิงเส้นดังสมการปริภูมิสถานะ



รูปที่ 1: ระบบเพนดูลัมผกผัน

ดังต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u \quad (27)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (28)$$

และค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้แสดงดังในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าที่ใช้ของระบบเพนดูลัมผกผัน

| $m(\text{kg})$ | $M(\text{kg})$ | $l(\text{m})$ | $g(\text{m/s}^2)$ |
|----------------|----------------|---------------|-------------------|
| 0.5            | 0.5            | 1             | 10                |

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสถานะในโดเมนเวลา โดยเริ่มจากการกำหนดให้สามารถติดตามมุมที่ต้องการ  $\theta(t)$  คือ 0 องศา และตำแหน่งของ cart ที่ต้องการอยู่ตำแหน่งที่ศูนย์ เมตร ตามลำดับ และ  $u(t) = Kx(t)$  แทนด้วยอัตราขยายป้อนกลับตัวแปรสถานะในโดเมนเวลา และดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่คาบการสุ่มตัวอย่างที่  $T = 0, 0.1, 0.5$  และ 1 วินาที ตามลำดับซึ่งคำนวณจาก LMI Toolbox Control [2] ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์จากการหาค่าที่น้อยที่สุดในสมการที่ 26 ให้ผลของดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่คาบการสุ่มตัวอย่างที่ค่าต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 2 และรูปที่ 2, 3 และ 4 แสดงผลตอบสนองเชิงเวลาของ  $z(t)$ ,  $\theta(t)$  และ  $u(t)$  ซึ่งมีเงื่อนไขที่  $z(t) = 0.1$  เมตร และ  $\theta = 0.1$  เรเดียน

ตารางที่ 2 ดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่ค่าการสุ่มตัวอย่างต่าง ๆ

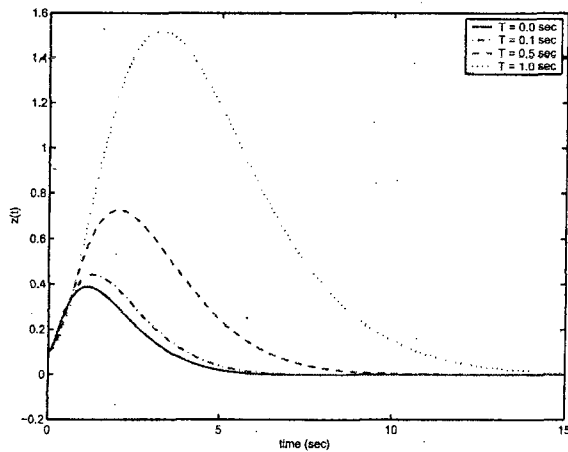
|       | $T = 0.0 \text{ sec.}$ | $T = 0.1 \text{ sec.}$ | $T = 0.5 \text{ sec.}$ | $T = 1.0 \text{ sec.}$ |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $H_2$ | 1.1114                 | 1.3093                 | 2.4442                 | 5.9537                 |

## 5 สรุป

จากผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ จะเห็นได้ว่าการออกแบบตัวควบคุมที่ได้สามารถรักษาเสถียรภาพ ของระบบวงรอบ ปิดและสร้างความสัมพันธ์ระหว่างระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง กับระบบในโดเมนเวลาเต็มหน่วยในโดเมนเดลต้าที่ค่าการชักตัวอย่างที่ค่าต่าง ๆ และจะเห็นได้ว่าเมื่อ  $T \rightarrow 0$  ผลตอบสนองที่ได้จะกลับคืนสู่ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องพร้อมกันนี้ดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่  $T \rightarrow 0$  เป็นดัชนีสมรรถนะ  $H_2$  ที่ต่ำที่สุดและวิธีการออกแบบทั้งระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและโดเมนเวลาเต็มหน่วย สามารถออกแบบด้วยเงื่อนไขบังคับของ LMI เดียวกัน

## เอกสารอ้างอิง

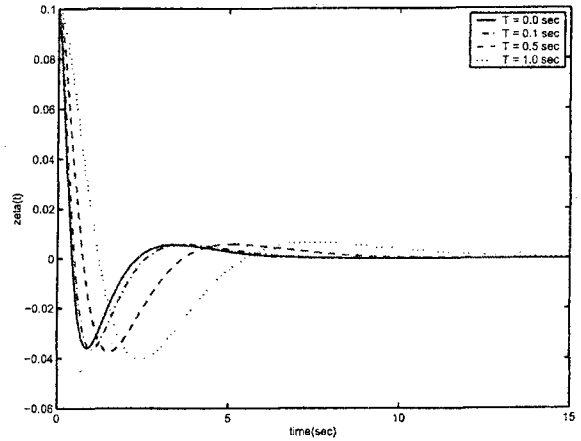
- [1] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishanan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The MathWork, 1995.
- [3] R. H. Middleton and G. C. Goodwin, *Digital Control and Estimation: A unified Approach*, Prentice Hall, 1990.



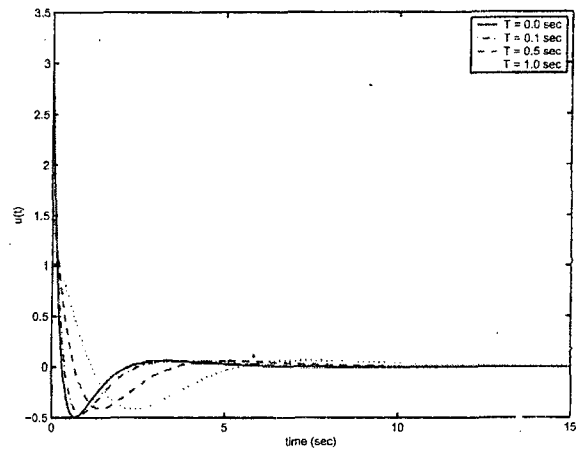
รูปที่ 2: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ  $z(t)$

## List of Symbols

- $\mathbf{R}^{m \times n}$ : The vector space of  $m \times n$  real matrices.
- $X^T$ : The transpose of a matrix  $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$ .
- $I_m$ : The identity matrix of size  $m$  of the identity of linear operator. We omit the subscript when  $m$  can be determined from context.



รูปที่ 3: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ  $\theta(t)$



รูปที่ 4: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ  $u(t)$

- $X^{-1}$ : The inverse of  $X$  or the inverse of linear operator  $X$ , i.e.,  $XX^{-1} = I$ .
- $\text{Tr}$ : The Trace of  $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$
- $X > 0$  ( $X \geq 0$ ): The symmetric  $X$  is positive definite (semidefinite), i.e.,  $X = X^T$  and  $z^T X z > 0$  ( $z^T X z \geq 0$ ) for all  $z \in \mathbf{R}^n$ .

## List of Acronyms

- LMI: Linear Matrix Inequality
- SDP: Semidefinite Programming