

การออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนสำหรับระบบ Two-Link Manipulator Robust Controller Design for Two-Link Manipulator Systems

อดิรักษ์ กาญจนหฤทัย[†] และ วีระเดช ชีวันนัทชัย[‡]

[†]สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

[‡]สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพมหานคร, 10250

โทร. 321-6930-9 ต่อ 212 และ 213, โทรสาร 321-4444, Email: adkancha@hotmail.com

Adirak Kanchanaharuthai[†] and Theeradet cheewananthachai[‡]

[†]Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University

[‡]Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University

Pattanakarn Road, Suan Luang District, Bangkok 10250, Thailand

Tel: 321-6930-9 Ext. 212, 213, Fax: 321-4444.

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดขึ้นกับระบบ Two-Link Manipulator โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งมีวัตถุประสงค์ในการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนดังนี้ (1) สามารถประกันผลของเสถียรภาพของระบบวงรอบปิด (2) สามารถประกันผลของดัชนีสมรรถนะ H_∞ (3) สามารถติดตามมุมอ้างอิงที่ปรับเปลี่ยนไปตามต้องการ สุดท้ายแสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อให้เห็นว่า ตัวควบคุมป้องกันสถานะที่ได้สามารถให้ผลการออกแบบที่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด

คำสำคัญ: ตัวควบคุมที่มีความคงทน/ ระบบ Two-Link Manipulator

Abstract

This paper proposes a method to design robust controller enduring nonlinearity in Two-Link Manipulator systems based on Linear Matrix Inequality (LMI). The objectives of this controller design are as follow: (1) to guarantee stability of closed-loop systems, (2) to guarantee the H_∞ performance index (3) to track reference angles which can be adjust to desired angles. Finally, this simulation results show that the state feedback controller provides the results satisfying with the desired objectives.

Keywords: Robust Controller/ Two-Link Manipulator Systems

1 บทนำ

การออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทน เป็นหัวข้อหนึ่งที่นักวิจัยทางด้านวิศวกรรมระบบควบคุมให้ความสำคัญ การควบคุมที่มีความคงทนนี้สามารถประกันเสถียรภาพ และสมรรถนะของระบบภายใต้ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในขอบเขตที่จำกัด ซึ่งมีคุณลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้น และในปัจจุบันระบบ Two-Link Manipulator ([3], [5]) หรือที่รู้จักกันดีคือ Robotic Manipulator และได้นำมาใช้งาน ในอุตสาหกรรมต่าง ๆ กันอย่างกว้างขวาง โดยนำมาใช้งานในรูปของการควบคุมเชิงตำแหน่ง (Position control) การควบคุมเชิงวิถี (Trajectory control) เป็นต้น อย่างไรก็ตาม ระบบ Two-Link Manipulator นี้มีคุณลักษณะพลวัตของความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear dynamics) ด้วยเช่นกันเป็นผลทำให้การออกแบบตัวควบคุมที่ได้จากทฤษฎีการควบคุมเชิงเส้นไม่สามารถให้ผลครอบคลุมความไม่แน่นอนเชิงเส้นนี้ได้

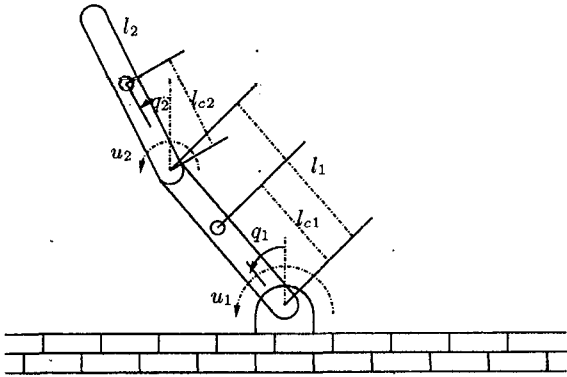
ดังนั้นบทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนต่อความไม่แน่นอนเชิงเส้นที่เกิดขึ้นกับระบบ Two-Link Manipulator โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบมีวัตถุประสงค์ (1) สามารถประกันผลของเสถียรภาพของระบบวงรอบปิด (2) สามารถประกันผลของดัชนีสมรรถนะ H_∞ (3) สามารถติดตามมุมอ้างอิงที่ปรับเปลี่ยนไปตามต้องการ สุดท้ายแสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อให้เห็นว่า ตัวควบคุมป้องกันสถานะที่ได้สามารถให้ผลการออกแบบที่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด

การออกแบบตัวควบคุมนี้ได้จากการพิจารณาแบบ Two-Link Manipulator ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ Polytopic Model ซึ่งสามารถใช้อธิบายขอบเขตการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอนอันเกิดจากผลของความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ จากนั้น

ทำการปรับเปลี่ยนวัตถุประสงค์ทั้ง 3 ข้างต้นให้อยู่ในรูปของเงื่อนไขบังคับ LMI และผลเฉลยจากเงื่อนไขบังคับ LMI ที่ได้นำมาออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ

ลำดับเนื้อหาในบทความนี้เริ่มจาก หัวข้อที่ 2. จะกล่าวถึงแบบจำลองของระบบ Two-Link Manipulator ตามด้วยการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนในหัวข้อที่ 3 หัวข้อที่ 4. ได้แสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ และหัวข้อสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์และสรุปผลการออกแบบตัวควบคุม

2 ระบบ Two-Link Manipulator [3], [5]



รูปที่ 1: ระบบ Two-Link Manipulator

แบบจำลองของระบบ Two-Link Manipulator ที่พิจารณาในรูปที่ 1 และสามารถสร้างความสัมพันธ์จากสมการการเคลื่อนที่ได้จากกฎของนิวตัน ดังในสมการต่อไปนี้

$$(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1) \ddot{q}_1 + (m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2)) \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 - (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin q_1 = u_1 \quad (1)$$

$$(m_1 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2)) \ddot{q}_1 + (m_2 l_{c2}^2 + I_2) \ddot{q}_2 - m_1 l_1 l_{c2} \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_{c2} \sin q_2 = u_2 \quad (2)$$

ความหมายของพารามิเตอร์ที่ใช้ในระบบ Two-Link Manipulator

- q_1, q_2 : The angle of the 1st and 2nd link, with respect to the vertical axis.
- l_1 : The distance between rotation axis of the two links.
- m_1, m_2 : masses.
- I_1, I_2 : moment of inertia with respect to the center of mass of the 1st and 2nd link respectively.
- l_{c1}, l_{c2} : The distance from the rotation axis to mass center of the each link.
- g : the local gravitation acceleration constant.
- u_1, u_2 : Control torques.

จากสมการที่ (1) และ (2) เราสามารถจัดรูปได้ใหม่ดังต่อไปนี้

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + \tilde{g}(q) = W u \quad (3)$$

โดย $q = (q_1, q_2)^T$ และ $u = (u_1, u_2)^T$

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \cos(q_1 - q_2) \\ m_{12} \cos(q_1 - q_2) & m_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_1 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 \\ c_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\tilde{g}(q) = \begin{pmatrix} g_{11} \sin q_1 \\ g_{22} \sin q_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$m_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2, m_{12} = m_2 l_1 l_{c2},$$

$$m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, c_1 = -c_2 = m_2 l_1 l_{c2},$$

$$g_{11} = -(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g, g_{22} = -m_2 g l_{c2}$$

และค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้แสดงดังในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าที่ใช้ของระบบ Two-Link Manipulator

$m_1(kg)$	$m_2(kg)$	$l_1(m)$	$l_{c1}(m)$
10	5	1	0.5
$l_{c2}(m)$	$I_1(kg.m^2)$	$I_2(kg.m^2)$	$g(m/s^2)$
0.5	0.833	0.417	9.8

จะเห็นว่าในสมการที่ (3) ประกอบด้วยพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีทั้งพจน์ที่เป็นตรีโกณมิติ (Trigonometric) และกำลังสอง (Quadratic) โดยพจน์ที่เป็นตรีโกณมิตินี้มีขอบเขตอยู่ในช่วง ± 1 ซึ่งจัดให้อยู่ในรูปของเซตที่มีความนูน (convex set) ได้ และเพื่อให้การพิจารณาม้ง่ายขึ้น จึงได้ทำการตัดพจน์ที่ 2 (พจน์ที่เป็นกำลังสอง) ในสมการที่ (3) โดยพิจารณาเฉพาะพจน์ที่ 1 และ 3 เท่านั้น (พจน์ที่เป็นตรีโกณมิติ) ซึ่งจะได้ผลคือการพิจารณาพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น $M(q)$ ให้เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต (bound function) ดังสมการต่อไปนี้

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} + \phi_1(q) \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

โดย $\phi_1(q) = \cos(q_1 - q_2)$ และ $-1 \leq \phi_1(q) \leq 1$ จากนั้นจัดสมการที่ (7) ใหม่ให้มีคุณลักษณะของ polytope ได้ดังนี้

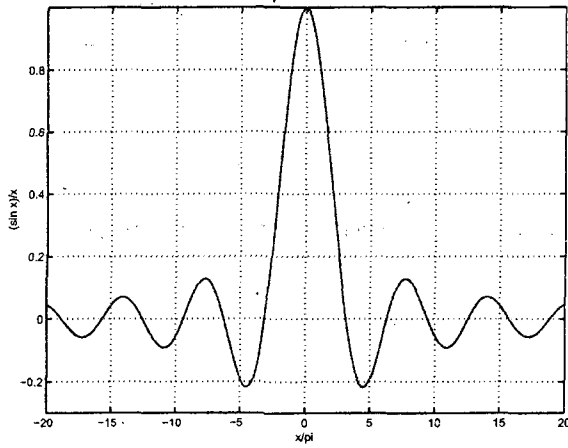
$$Co\{M_1, M_2\} = \{\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 : \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\} \quad (8)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่ามี 2 จุดยอด (vertex) ดังในเมทริกซ์ M_1 และ M_2 ต่อไปนี้

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (9)$$

และในทำนองเดียวกัน พจน์ที่ 3 ซึ่งเป็นพจน์ที่เป็นตรีโกณมิติเช่นกันสามารถจัดให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= \begin{pmatrix} g_{11} \frac{\sin q_1}{q_1} q_1 \\ g_{22} \frac{\sin q_2}{q_2} q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \frac{\sin q_1}{q_1} & 0 \\ 0 & g_{22} \frac{\sin q_2}{q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= G(q)q \end{aligned} \quad (10)$$



รูปที่ 2: ฟังก์ชันที่มีขอบเขต $\frac{\sin x}{x}$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (10) พบว่าฟังก์ชัน $\sin q_1 = \frac{\sin q_1}{q_1} q_1 = \phi_2(q_1)q_1$ นี้สามารถแทนด้วยฟังก์ชันที่มีขอบเขตเหมือนกับฟังก์ชัน $\frac{\sin x}{x}$ ซึ่งมีขอบเขตดังในรูปที่ (2) จะได้ค่าของฟังก์ชันที่อยู่ประมาณระหว่าง $-0.2 \leq \phi_2(q_1) \leq 1$ นอกจากนี้สามารถจัดให้อยู่ในคุณลักษณะของ polytopic ได้ดังนี้

$$G(q) = \phi_2(q) \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi_2(q) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \quad (11)$$

จากสมการที่ (11) มีคุณลักษณะของ polytope ดังนี้

$G(q) \in Co\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ และ

$$G_1 = \begin{pmatrix} -0.2g_{11} & 0 \\ 0 & -0.2g_{22} \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & -0.2g_{22} \end{pmatrix} \\ G_3 = \begin{pmatrix} -0.2g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าระบบ Two-Link Manipulator ที่มีคุณลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแทนได้ด้วยแบบจำลอง Polytopic และสามารถเปลี่ยนสมการที่ (18) ให้อยู่ในรูปของสมการปริภูมิสถานะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E(q)\dot{x}(t) = A(q)x(t) + Bu(t) \quad (13)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (14)$$

กำหนดให้ $x(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \dot{q}_1(t) & \dot{q}_2(t) \end{pmatrix}^T$ และ

$$E(q) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{pmatrix}, A(q) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -G(q) & 0 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}^T$$

บทความนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมที่มีโครงสร้างของสัญญาณเข้า $u(t)$ ในรูปของการป้อนกลับตัวแปรสถานะ (state feedback controller) ดังในสมการต่อไปนี้

$$u(t) = Kx(t) \quad (15)$$

โดยอัตราขยายป้อนกลับสถานะ K นี้สามารถทำให้ระบบ Two-Link Manipulator มีความคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นที่ได้จากการแปลงในรูปของ Polytopic Model พร้อมกันนี้ยังให้ดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ที่เหมาะสมที่สุด

3 การออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทน

3.1 ระบบเซอร์โวเชิงปริพันธ์ (Integral Type Servo System) [4]

ในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับควบคุมมุมที่ต้องการ q_1 และ q_2 เพื่อสามารถติดตามมุมอ้างอิงที่ต้องการ q_{ref} (reference angle) ได้นั้น เราสามารถใช้วิธีการของระบบเซอร์โวเชิงปริพันธ์ ซึ่งในการใช้วิธีการนี้จำเป็นต้องทำการปรับเปลี่ยนระบบที่ต้องการออกแบบตัวควบคุมในสมการที่ (13) ใหม่ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E_n(q)\dot{x}_n(t) = A_n(q)x_n(t) + B_n u(t) + B_r r \quad (16)$$

$$y_n(t) = C_n x_n(t) \quad (17)$$

กำหนดให้ $x_n(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \dot{q}_1(t) & \dot{q}_2(t) & x_{I1} & x_{I2} \end{pmatrix}^T$,

$$E_n(q) = \begin{pmatrix} E(q) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, A_n(q) = \begin{pmatrix} A(q) & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}^T, B_r = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \end{pmatrix}^T$$

$$C_n = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$$

และ x_{I1}, x_{I2} แทนด้วยตัวแปรสถานะอินทิเกรเตอร์ (integrator) ของมุม q_1 และ q_2 ตามลำดับรวมทั้ง มุมอ้างอิงที่ต้องการ r ซึ่งมีผลต่อโครงสร้างของ อัตราขยายป้อนกลับสถานะใหม่ $K_n = \begin{pmatrix} K & K_I \end{pmatrix}$ โดย K_I แทนด้วยอัตราขยายป้อนกลับของตัวแปรสถานะอินทิเกรเตอร์ทั้งสอง เมื่อแทนค่าของ K_n ลงในสมการที่ (16) จะได้ระบบวงรอบปิดในสมการต่อไปนี้

$$\dot{x}_n(t) = \underbrace{E_n(q)^{-1}(A_n(q) + B_n K_n)}_{A_{nn}} x_n(t) + \underbrace{E_n(q)^{-1} B_r}_{B_{rr}} r \quad (18)$$

$$y_n(t) = C_n x_n(t) \quad (19)$$

3.2 ดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ที่เหมาะสมที่สุด [1]

เราสมมุติว่ามีฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) ซึ่งมีคุณลักษณะ $V(x_n) = x_n^T P x_n, P > 0$ และ $\gamma \geq 0$ ทำให้ได้เงื่อนไขสำหรับทุก ๆ เวลา t ดังในสมการต่อไปนี้

$$\frac{d}{dt} V(x_n) + y_n^T y_n - \gamma^2 r^T r \leq 0 \quad (20)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของตัวแปรสถานะ x_n และสัญญาณอ้างอิง r เราสามารถทำการอินทิเกรตในสมการที่ (20) โดยพิจารณาช่วงเวลาที่ยาวที่สุดค่าอนันต์ซึ่งจะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\int_0^\infty (y_n^T y_n - \gamma^2 r^T r) dt + \int_0^\infty \frac{d}{dt} x_n^T P x_n dt = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x_n \\ r \end{pmatrix}^T \Lambda(P) \begin{pmatrix} x_n \\ r \end{pmatrix} dt \leq 0 \quad (21)$$

โดยกำหนดให้

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_{nn}^T P + P A_{nn} + C_n^T C_n & P B_{rr} \\ B_{rr}^T P & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (22)$$

และ

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} x_n^T P x_n = x_n^T P(\infty) x_n - x_n^T P(0) x_n = 0 \quad (23)$$

ซึ่งจากสมการที่ (20) และ (21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y_n^T(t) y_n(t) dt &\leq \gamma^2 \int_0^\infty r^T(t) r(t) dt \\ \Leftrightarrow \sup_{\|z\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} &= \sqrt{\frac{\int_0^\infty y_n^T y_n dt}{\int_0^\infty r^T r dt}} \leq \gamma \end{aligned} \quad (24)$$

โดยสมการที่ (24) เรียกว่า ดัชนีสมรรถนะ H_∞ หรือ L_2 gain จากเงื่อนไขในสมการที่ (22) นั้นสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในเงื่อนไขบังคับของสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งสมมูลซึ่งกันและกัน โดยการใช่วิธีการของ Schur complement [1] เพื่อใช้ในการหาค่าของตัวควบคุม K_n ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} A_{nn} P + P A_{nn}^T + B_{rr} B_{rr}^T & P C_n^T \\ C_n P & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

จากสมการที่ (25) จะเห็นว่าปัญหาไม่เป็นปัญหา SDP [1] ดังนั้นเราสามารถแปลงไปสู่ปัญหา SDP ได้โดยกำหนดเมทริกซ์ใหม่ ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้ $M = K_n P$ ($P > 0$) ดังนั้นจะได้ $K_n = M P^{-1}$ และแทนค่าผลที่ได้ในสมการที่ (25) จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} M & E_n(q) P C_n^T \\ C_n P E_n^T(q) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (26)$$

โดย $M = A_{nn}(q) P E_n^T(q) + E_n(q) P A_{nn}^T(q) + B_{nn} M E_n^T(q) + E_n(q) M^T B_{nn}^T + B_{rr} B_{rr}^T$ และความสัมพันธ์ของแบบจำลอง Polytope ของ $E_n(q)$ หาได้จากสมการที่ (7), (13), และ (16) ส่วน $A_{nn}(q)$ หาได้จากสมการที่ (11), (13), และ (16) จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} M_{ij} & E_{jn}(q) P C_n^T \\ C_n P E_{jn}^T(q) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

โดย $M_{ij} = A_{in}(q) P E_{jn}^T(q) + E_{jn}(q) P A_{in}^T(q) + B_{nn} M E_{jn}^T(q) + E_{jn}(q) M^T B_{nn}^T + B_{rr} B_{rr}^T$ สำหรับ $i = 1, \dots, 4$, และ $j = 1, 2$ ตามลำดับ

ดังนั้นการพิจารณาค่าที่น้อยที่สุดของสมการที่ (27) จะแสดงรูปแบบของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &(\text{minimize}) \quad \gamma \\ &(\text{subject to}) \quad \text{สมการที่ (27) และ } P = P^T > 0 \end{aligned} \quad (28)$$

สำหรับ $i = 1, \dots, 4$ และ $j = 1, 2$ ตามลำดับ ส่วนตัวควบคุมป้อนกลับสถานะหาได้จาก $K_n = M P^{-1}$

4 ผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่มีความคงทนนี้เพื่อให้ได้ผลเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด จากการหาค่าที่น้อยที่สุดในสมการที่ (28) ซึ่งการคำนวณเริ่มจากการกำหนดให้มุมของ

q_1 สามารถติดตามมุม 45 องศา และมุมของ q_2 สามารถติดตามมุม 30 องศา ซึ่งจุดเริ่มต้นของมุมของ q_1 และ q_2 เป็นศูนย์ และเมื่อให้ K_n แทนด้วยอัตราขยายป้อนกลับสถานะที่คำนวณได้จาก LMI Control Toolbox [2] ซึ่งเท่ากับ

$$K = 1 \times 10^{10} \begin{pmatrix} -0.0286 & 0 & -0.0001 & 0 & -2.4767 & 0 \\ 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & -0.1028 \end{pmatrix}$$

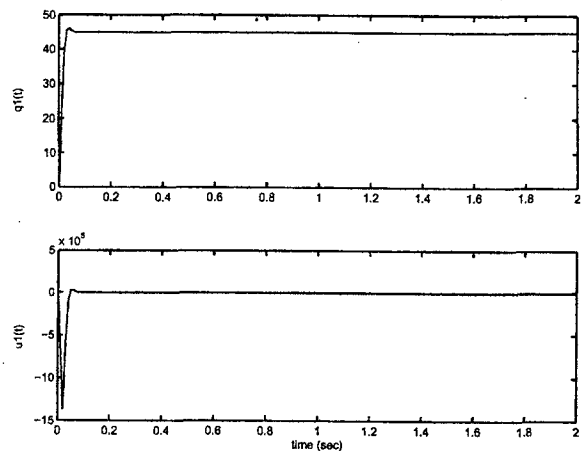
และดัชนีสมรรถนะ H_∞ เท่ากับ 1.0175 และรูปที่ (3) และ (4) แสดงผลตอบสนองเชิงเวลาของมุม $q_1(t)$, $u_1(t)$, $q_2(t)$ และ $u_2(t)$ ตามลำดับ

5 สรุป

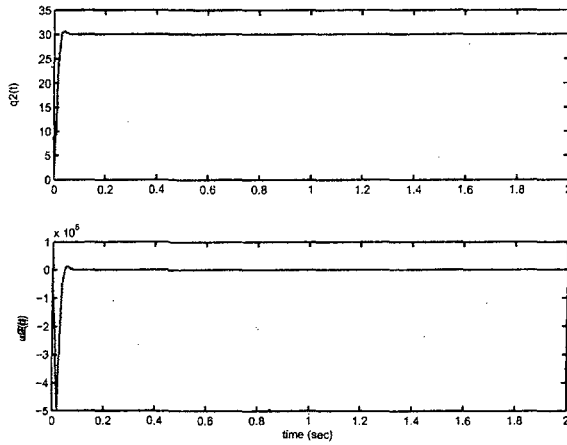
จากผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ จะเห็นได้ว่าการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนสำหรับระบบ Two-Link Manipulator ซึ่งมีคุณลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้น โดยอาศัยสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้สามารถประกันดัชนีสมรรถนะ H_∞ ที่เหมาะสมที่สุด และสามารถติดตามมุมอ้างอิงที่ต้องการได้ทั้ง q_1 และ q_2 นอกจากนี้ทำให้เชื่อมั่นได้ว่า ระบบสามารถรักษาเสถียรภาพวงรอบปิดได้ แต่ในการพิจารณาการปรับตั้งแต่เริ่มต้นนั้น เราไม่ได้พิจารณาพจน์ที่เป็นกำลังสอง (Quadratic) ในสมการที่ (3) ที่มีความซับซ้อนในการจัดให้อยู่ในรูปของ Polytopic model ซึ่งนำมาใช้อธิบายขอบเขตของการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอนอันเกิดจากความไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นเราควรพัฒนาการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนให้ครอบคลุมพจน์ที่เป็นกำลังสองนี้ในงานวิจัยลำดับต่อไป

6 กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคุณพิเศษฐ์ บุญหนู ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการใช้ LaTeX และอาจารย์ภิราภรณ์ ก้อนคำ ผู้ช่วยคณบดีฝ่ายกิจการนักศึกษา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ที่ให้คำแนะนำเกี่ยวกับงานวิจัยนี้



รูปที่ 3: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ $q_1(t)$ และ $u_1(t)$



รูปที่ 4: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ $q_2(t)$ และ $u_2(t)$

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishanan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The MathWork, 1995.
- [3] K. Jinsuck, *Underactuated Control of Two-Link Manipulator*, M.S. Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, August, 1998.
- [4] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 1990.
- [5] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.

List of Symbols

- $\mathbf{R}$: The set of real numbers.
- $\mathbf{R}^m$: The set of real m -vector.
- $\mathbf{R}^{m \times n}$: The vector space of $m \times n$ real matrices.
- X^T : The transpose of a matrix $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$.
- I_m : The identity matrix of size m of the identity of linear operator. We omit the subscript when m can be determined from context.
- X^{-1} : The inverse of X or the inverse of linear operator X , i.e., $XX^{-1} = I$.
- $X > 0$ ($X \geq 0$): The symmetric X is positive definite (semidefinite), i.e., $X = X^T$ and $z^T X z > 0$ ($z^T X z \geq 0$) for all $z \in \mathbf{R}^n$.
- $\in$: belongs to
- CoS : Convex hull of the set $S \subseteq \mathbf{R}^m$, given by $\text{CoS} \triangleq \{\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i | x_i \in S, p \geq 0\}$.

- $\|\cdot\|_2$: The $\mathcal{L}_2$ norm of a signal.
- $\mathcal{L}_2$: The space of square-integrable signals in $\mathbf{R}^n$, i.e., $u \in \mathcal{L}_2^n$ satisfying $\int_0^\infty u^T u dt < \infty$. $\mathcal{L}_2^n$ is often abbreviated as $\mathcal{L}_2$

List of Acronyms

- LMI: Linear Matrix Inequality
- SDP: Semidefinite Programming