

การออกแบบตัวควบคุม LQR ที่มีหลายแบบจำลองสำหรับระบบ Robotic Manipulator Multi-Model LQR Controller Design for Robotic Manipulator Systems

อดิรัช กาญจนหฤทัย[†] และธีรเดช ชีวนันทชัย[‡]

[†]สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

[‡]สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพมหานคร, 10250

โทร. 321-6930-9 ต่อ 212 และ 213, โทรสาร 321-4444, Email: adkancha@hotmail.com

Adirak Kanchanaharuthai[†] and Theeradeth cheewananthachai[‡]

[†]Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University

[‡]Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University

Pattanakarn Road, Suan Luang District, Bangkok 10250, Thailand

Tel: 321-6930-9 Ext. 212, 213, Fax: 321-4444.

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุม LQR ที่มีหลายแบบจำลองหรือหลายจุดปฏิบัติงานสำหรับระบบ Robotic Manipulator โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อให้สามารถคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดขึ้นพร้อมกันทุกจุดปฏิบัติงาน พร้อมกันนี้สามารถคำนวณหาค่าดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุดซึ่งเรียกว่า Worst-case LQR cost สุดท้ายแสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้เห็นว่า ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่สามารถให้ความคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดขึ้นในระบบและให้ดัชนีสมรรถนะไปตามต้องการ

คำสำคัญ: ตัวควบคุม LQR/ ระบบ Robotic Manipulator

Abstract

In this paper, we present a method to design LQR controller for multi-model or various operation point in Robotic Manipulator systems by using Linear Matrix Inequality (LMI). In order to achieve robustness for nonlinearity characteristic in all operation point, we can design the desired controller and simultaneously calculate optimal performance index (Worst-case LQR cost). Finally, the simulation results show that the LQR controller obtained from LMI optimization technique provides robustness for nonlinearity in robotic manipulator systems and desired performance index.

Keywords: LQR Controller/ Robotic Manipulator Systems.

1 บทนำ

การออกแบบตัวควบคุม LQR (Linear Quadratic Regulator) เป็นการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่เหมาะสมที่สุด (optimal state feedback) เพื่อหาค่าที่น้อยที่สุดของดัชนีสมรรถนะกำลังสอง (Quadratic performance index) ซึ่งการออกแบบดังกล่าวได้ออกแบบที่ค่าของพารามิเตอร์ของระบบที่มีค่าแน่นอน แต่ในความเป็นจริงแล้วเป็นไปได้ยากมากที่จะทำการออกแบบที่ค่าของพารามิเตอร์ที่แน่นอน เพราะระบบในความเป็นจริงเกือบทั้งหมดมีคุณลักษณะความเป็นเชิงเส้น (Nonlinear) รวมทั้งระบบ Robotic Manipulator ซึ่งได้นำมาใช้ในอุตสาหกรรมต่าง ๆ กันอย่างกว้างขวาง เช่นนำมาใช้งานเกี่ยวกับระบบทางกลที่สามารถควบคุมวิถี ทางโคจร (Trajectory-controllable mechanical systems) วิธีการโดยทั่วไปที่ใช้ในการออกแบบจะทำการเปลี่ยนระบบจากระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นระบบเชิงเส้น (Linearization) แต่วิธีการดังกล่าวจะพิจารณาเฉพาะที่จุดปฏิบัติงาน (operation point) เท่านั้น

ดังนั้นบทความนี้ได้นำเสนอ วิธีการออกแบบตัวควบคุม LQR ที่มีหลายแบบจำลองหรือหลายจุดปฏิบัติงานสำหรับระบบ Robotic Manipulator โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อให้สามารถคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดขึ้นพร้อม ๆ กันทุกจุดปฏิบัติงาน พร้อมกันนี้ยังสามารถคำนวณหาค่าดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุดซึ่งเรียกว่า Worst-case LQR cost

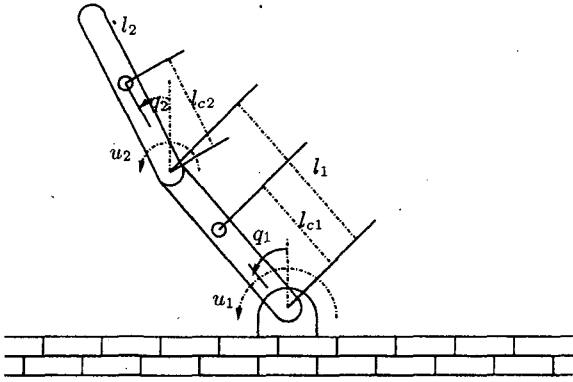
การออกแบบตัวควบคุมนี้ได้จากการพิจารณาระบบ Robotic Manipulator ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ Polytopic Model ซึ่งสามารถอธิบายขอบเขตการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอนอันเกิดจากผลของความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ จากนั้นสร้างเงื่อนไขบังคับ LMI ที่สามารถครอบคลุมทุกพฤติกรรมของจุดปฏิบัติงานและดัชนีสมรรถนะของแต่ละแบบจำลองที่จุดปฏิบัติงาน

ต่าง ๆ และผลเฉลยจากเงื่อนไขบังคับ LMI ที่ได้นำมาออกแบบตัวควบคุมป้องกันกลับสถานะ

ลำดับเนื้อหาในบทความนี้เริ่มจาก หัวข้อที่ 2. จะกล่าวถึงแบบจำลองของระบบ Robotic Manipulator ตามด้วยการออกแบบตัวควบคุม LQR ที่มีหลายแบบจำลองในหัวข้อที่ 3 หัวข้อที่ 4. ได้แสดงผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ และหัวข้อสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์และสรุปผลการออกแบบตัวควบคุม

2 ระบบ Robotic Manipulator

แบบจำลองของระบบ Robotic Manipulator ที่พิจารณาในรูปต่อไปนี้ และจากรูปดังกล่าวข้างต้นสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้



รูปที่ 1: ระบบ Robotic Manipulator

ในสมการการเคลื่อนที่ได้จากกฎของนิวตัน ดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1) \ddot{q}_1 + (m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2)) \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 - (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin q_1 = u_1 \quad (1)$$

$$(m_1 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2)) \ddot{q}_1 + (m_2 l_{c2}^2 + I_2) \ddot{q}_2 - m_1 l_1 l_{c2} \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_{c2} \sin q_2 = u_2 \quad (2)$$

ความหมายของพารามิเตอร์ที่ใช้ในระบบ Robotic Manipulator

- q_1, q_2 : The angle of the 1st and 2nd link, with respect to the vertical axis.
- l_1 : The distance between rotation axis of the two links.
- m_1, m_2 : masses.
- I_1, I_2 : moment of inertia with respect to the center of mass of the 1st and 2nd link respectively.
- l_{c1}, l_{c2} : The distance from the rotation axis to mass center of the each link.
- g : the local gravitation acceleration constant.
- u_1, u_2 : Control torques.

จากสมการที่ (1) และ (2) เราสามารถจัดรูปได้ใหม่ดังต่อไปนี้

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + \tilde{g}(q) = W u \quad (3)$$

โดย $q = (q_1, q_2)^T$ และ $u = (u_1, u_2)^T$

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \cos(q_1 - q_2) \\ m_{12} \cos(q_1 - q_2) & m_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_1 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 \\ c_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\tilde{g}(q) = \begin{pmatrix} g_{11} \sin q_1 \\ g_{22} \sin q_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$m_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2, m_{12} = m_2 l_1 l_{c2},$$

$$m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, c_1 = -c_2 = m_2 l_1 l_{c1},$$

$$g_{11} = -(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g, g_{22} = -m_2 g l_{c2}$$

และค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้แสดงดังในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าที่ใช้ของระบบ Robotic Manipulator

$m_1 (kg)$	$m_2 (kg)$	$l_1 (m)$	$l_{c1} (m)$
10	5	1	0.5
$l_{c2} (m)$	$I_1 (kg.m^2)$	$I_2 (kg.m^2)$	$g (m/s^2)$
0.5	0.833	0.417	9.8

จะเห็นได้ว่าในสมการที่ (3) ประกอบด้วยพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีทั้งพจน์ที่เป็นตรีโกณมิติ (Trigonometric) และกำลังสอง (Quadratic) โดยพจน์ที่เป็นตรีโกณมิตินี้มีขอบเขตอยู่ในช่วง ± 1 ซึ่งจัดให้อยู่ในรูปของเซตที่มีความนูน (convex set) ได้ และเพื่อให้การพิจารณามีง่ายขึ้น จึงได้ทำการตัดพจน์ที่ 2 (พจน์ที่เป็นกำลังสอง) ในสมการที่ (3) โดยพิจารณาเฉพาะพจน์ที่ 1 และ 3 เท่านั้น (พจน์ที่เป็นตรีโกณมิติ) ซึ่งจะได้ผลคือการพิจารณาพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น $M(q)$ ให้เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต (bound function) ดังสมการต่อไปนี้

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} + \phi_1(q) \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

โดย $\phi_1(q) = \cos(q_1 - q_2)$ และ $-1 \leq \phi_1(q) \leq 1$ จากนั้นจัดสมการที่ (7) ใหม่ให้มีคุณลักษณะของ polytope ได้ดังนี้

$$Co\{M_1, M_2\} = \{\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 : \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\} \quad (8)$$

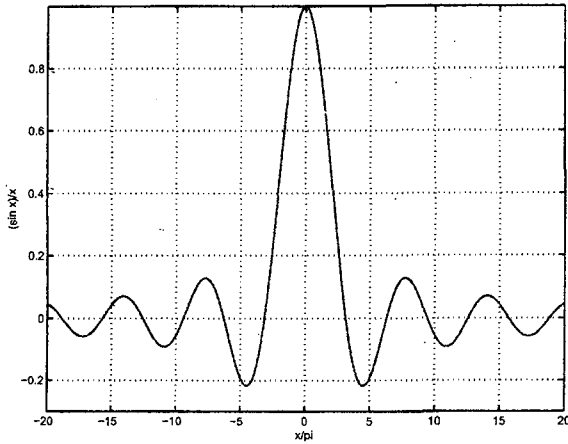
ซึ่งจะเห็นได้ว่ามี 2 จุดยอด (vertex) ดังในแนตรีกซ์ M_1 และ M_2 ต่อไปนี้

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (9)$$

และในทำนองเดียวกัน พจน์ที่ 3 ซึ่งเป็นพจน์ที่เป็นตรีโกณมิติเช่นกันสามารถจัดให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\tilde{g}(q) = \begin{pmatrix} g_{11} \frac{\sin q_1}{q_1} q_1 \\ g_{22} \frac{\sin q_2}{q_2} q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \frac{\sin q_1}{q_1} & 0 \\ 0 & g_{22} \frac{\sin q_2}{q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = G(q) q \quad (10)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (10) พบว่าฟังก์ชัน $\sin q_1 = \frac{\sin q_1}{q_1} q_1 = \phi_2(q_1) q_1$ นี้สามารถแทนด้วยฟังก์ชันที่มีขอบเขตเหมือนกับฟังก์ชัน $\frac{\sin x}{x}$ ซึ่งมีขอบเขตดังในรูปที่ (2) ซึ่งจะได้ค่าของฟังก์ชันที่อยู่



รูปที่ 2: ฟังก์ชันที่มีขอบเขต $\frac{\sin x}{x}$

ประมาณระหว่าง $-0.2 \leq \phi_2(q_1) \leq 1$ นอกจากนี้สามารถจัดให้อยู่ในคุณลักษณะของ polytopic ได้ดังนี้

$$G(q) = \phi_2(q) \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi_2(q) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \quad (11)$$

จากสมการที่ (11) มีคุณลักษณะของ polytopic ดังนี้ $G(q) \in \text{Co}\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ และ

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} -0.2g_{11} & 0 \\ 0 & -0.2g_{22} \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & -0.2g_{22} \end{pmatrix} \\ G_3 &= \begin{pmatrix} -0.2g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าระบบ Robotic Manipulator ที่มีคุณลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแทนได้ด้วยแบบจำลอง Polytopic และสามารถเปลี่ยนสมการที่ (3) ให้อยู่ในรูปของสมการปริภูมิสถานะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E(q)\dot{x}(t) = A(q)x(t) + Bu(t) \quad (13)$$

หรือ

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(E(q))^{-1}A(q)}_{A_n(q)} x(t) + \underbrace{(E(q))^{-1}B}_{B_n} u(t) \quad (14)$$

กำหนดให้ $x(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \dot{q}_1(t) & \dot{q}_2(t) \end{pmatrix}^T$ และ

$$\begin{aligned} E(q) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{pmatrix}, A(q) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -G(q) & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

บทความนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมที่มีโครงสร้างของสัญญาณเข้า $u(t)$ ในรูปของการป้อนกลับตัวแปรสถานะ (state feedback controller) ดังในสมการต่อไปนี้

$$u(t) = Kx(t) \quad (15)$$

โดยอัตราขยายป้อนกลับสถานะ K นี้สามารถทำให้ระบบ Robotic Manipulator มีความคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นที่ได้จากการแปลง

ในรูปของ Polytopic Model พร้อมกันนี้ยังให้ดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุด (Worst-case LQR cost)

3 การออกแบบตัวควบคุม LQR ที่มีหลายแบบจำลอง

พิจารณาระบบในสมการที่ (14) และกำหนดให้ค่าของดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุด (Worst-case LQR cost) ที่สอดคล้องกับ Polytopic model ที่ได้จากจัดรูปของระบบ Robotic Manipulator ดังนั้นจะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (16)$$

โดยที่เมทริกซ์ Q และ R มีค่าเป็นค่าบวกแน่นอน (Positive definite) และเมื่อแทนค่าของ u ลงในสมการที่ (16) จะได้สมการต่อไปนี้

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + K^T R K) dt \quad (17)$$

จากสมการที่ (17) สามารถสร้างเงื่อนไขบังคับของ LMI ได้ดังนี้ คือ กำหนดให้ฟังก์ชันลียาปูนอฟกำลังสอง (Quadratic Lyapunov function) $x^T P x$ โดย $P = P^T > 0$ ซึ่งนำมาสร้างความสัมพันธ์กับฟังก์ชันค่าในสมการที่ (16) ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} x^T(t) P x(t) \leq -x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) \quad (18)$$

สำหรับทุก t ค่าของ t (ยกเว้นที่เวลาที่มีการสวิตช์) และเมื่ออินทิเกรต ทั้งสองข้างของสมการจากเวลาที่ศูนย์ถึงเวลาที่มีค่าเป็นอนันต์จะได้

$$x^T(\infty) P x(\infty) - x^T(0) P x(0) \leq - \int_0^\infty x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt \quad (19)$$

จะได้

$$J = \int_0^\infty x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt \leq x_0^T P x_0, x^T(\infty) P x(\infty) \rightarrow 0 \quad (20)$$

จากสมการที่ (18) จะได้

$$\frac{d}{dt} x^T(t) P x(t) = x^T(t) (A_n^T P + P A_n) x(t) \quad (21)$$

และจากสมการที่ (16) แสดงความสมมูลได้ดังนี้

$$A_n P + P A_n^T + K^T R K + Q \leq 0 \quad (22)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าของ $u = Kx$ ลงในสมการที่ (14) จะได้ดังนี้

$$\dot{x} = A_{cl} x = (A_n + B_n K) x, x(0) = x_0 \quad (23)$$

โดยกำหนดให้ x_0 แทนด้วยเงื่อนไขของสถานะเริ่มต้นของระบบที่ได้พิจารณา และเมื่อแทนค่าของ A_{cl} ลงในสมการที่ (22) จะได้

$$(A_n + B_n K) P + P (A_n + B_n K)^T + K^T R K + Q \leq 0 \quad (24)$$

ในสมการที่ (24) จะเห็นได้ว่าผลคูณของเมทริกซ์อัตราขยายป้อนกลับสถานะ K และเมทริกซ์ลียาปูนอฟ P ทำให้เกิดปัญหาของการไม่เป็นการโปรแกรมกึ่งแน่นอน (Semidefinite programming: SDP) รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถหาได้จาก [1] และ [2] ตามลำดับ ซึ่งเราสามารถทำการแปลงจากปัญหาที่ไม่เป็น SDP ให้เป็น

สู่ปัญหา SDP ได้โดยการกำหนดให้มีเมทริกซ์ใหม่คือ Y และ W ซึ่งมีขนาดของเมทริกซ์ที่สอดคล้องกัน นอกจากนี้ยังได้ความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันดังนี้คือ $Y = P^{-1}, W = KP^{-1} (P > 0, Y > 0)$ ดังนั้นจะได้ $P = Y^{-1}$ ดังนั้นตัวควบคุมป้อนกลับสถานะจะอยู่ในรูปของ $u = Kx = WY^{-1}x$ เมื่อแทนความสัมพันธ์ดังกล่าวในสมการที่ (24) จะได้ดังนี้

$$(A_n + B_n WY^{-1})Y^{-1} + Y^{-1}(A_n + B_n WY^{-1})^T + (WY^{-1})^T R(WY^{-1}) + Q \leq 0 \quad (25)$$

ในสมการที่ (25) เมื่อทำการคูณด้วย Y ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาและใช้ความสัมพันธ์ข้างต้นจัดรูปจะได้ดังต่อไปนี้

$$YA_n^T + A_n Y + B_n W + W^T B_n^T + Y^T Q Y + W^T R W \leq 0 \quad (26)$$

และสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$YA_n^T + A_n Y + B_n W + W^T B_n^T + \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

เมื่อใช้ส่วนเติมของ Schur (Schur Complement) ทำการจัดรูปในสมการที่ (27) จะได้สมการเมทริกซ์กำลังสอง ซึ่งสามารถเปลี่ยนเป็นสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังสมการต่อไปนี้

$$L(Y, W) = \begin{pmatrix} N & Y & W^T \\ Y & -Q^{-1} & 0 \\ W & 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (28)$$

โดย $N = YA_n^T + A_n Y + B_n W + W^T B_n^T$ และในสมการที่ (20) สามารถจัดให้อยู่ในรูปของ LMI ได้ดังนี้ (ใช้ส่วนเติมของ Schur)

$$x_0^T P x_0 = x_0^T Y^{-1} x_0 \leq \gamma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Tr}(x_0^T P x_0) \leq \text{trace}(\gamma) \quad (29)$$

จากนั้นทำการแทนค่าของ A_n และ B_n จากสมการที่ (14) จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$L_n(Y, W) = \begin{pmatrix} M & E(q)Y & E(q)W^T \\ YE(q)^T & -Q^{-1} & 0 \\ WE(q)^T & 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (30)$$

โดย $M = A(q)YE^T(q) + E(q)YA^T(q) + BWE^T(q) + E(q)WB^T$ และความสัมพันธ์ของแบบจำลอง Polytope ของ $E(q)$ หาได้จากสมการที่ (7), และ (14) ส่วน $A(q)$ หาได้จากสมการที่ (11), (14), จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$L_{nij}(Y, W) = \begin{pmatrix} M_{ij} & E_j Y & E_j W^T \\ YE_j^T & -Q^{-1} & 0 \\ WE_j^T & 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (31)$$

โดย $M_{ij} = A_i YE_j^T + E_j YA_i^T + BWE_j^T + E_j WB^T$ สำหรับ $i = 1, \dots, 4$ และ $j = 1, 2$ ตามลำดับ

ดังนั้นการพิจารณาค่าที่น้อยที่สุดของสมการที่ (16) โดยระบบที่พิจารณามีโครงสร้างของสมการที่ (14) จะอยู่ในรูปของการหาค่าที่น้อยที่สุดดังต่อไปนี้

(minimize) $\text{Tr}(\gamma)$ (subject to) (29), (31) และ $Y = Y^T > 0$	(32)
---	------

สำหรับ $i = 1, \dots, 4$ และ $j = 1, 2$ ตามลำดับ ส่วนตัวควบคุมป้อนกลับสถานะหาได้จาก $K = WY^{-1}$

4 ผลการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์

การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ ที่มีความคงทนต่อความไม่เป็นเชิงเส้นนี้ จากการหาค่าที่น้อยที่สุดในสมการที่ (32) โดยเริ่มจากการกำหนดให้มุมเริ่มต้นของ q_1 และ q_2 เท่ากับ 0.1 เรเดียนและ -0.2 เรเดียน และเมทริกซ์ Q และ R เท่ากับ I_4 และ I_2 และเมื่อให้ K แทนด้วยอัตราขยายป้อนกลับสถานะที่คำนวณได้จาก LMI Control Toolbox [2] ซึ่งเท่ากับ

$$K = \begin{pmatrix} -559.3 & -88.33 & -120.64 & -31.26 \\ -192.16 & -193.9 & -24.72 & -66.05 \end{pmatrix}$$

และดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุด (Worst-case LQR cost) เท่ากับ 10.9645 และรูปที่ 3 และ 4 ตามลำดับ ซึ่งแสดงผลตอบสนองเชิงเวลาของมุม q_1 , q_2 , $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ ตามลำดับ และจากผลตอบสนองดังรูปทั้ง 2 ประกอบด้วยผลตอบสนองเชิงเวลาที่เป็นค่าของขอบเขตบน (upper bound) ซึ่งประกอบด้วยเมทริกซ์ค่ายอด (vertex matrix) ของ A_4 และ E_1 และ ค่าของขอบเขตล่าง (lower bound) ซึ่งประกอบด้วยเมทริกซ์ค่ายอด (vertex matrix) ของ A_1 และ E_2 ตามลำดับ

5 สรุป

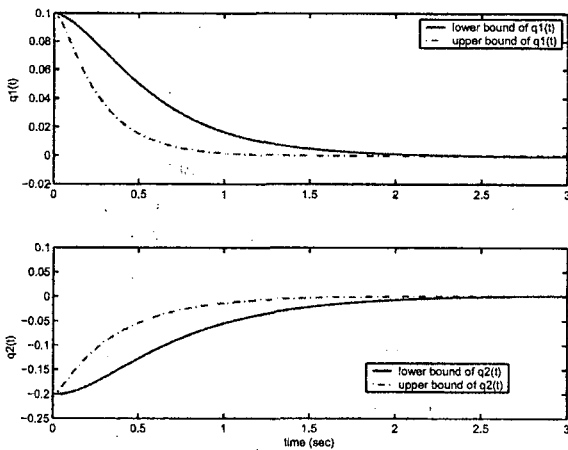
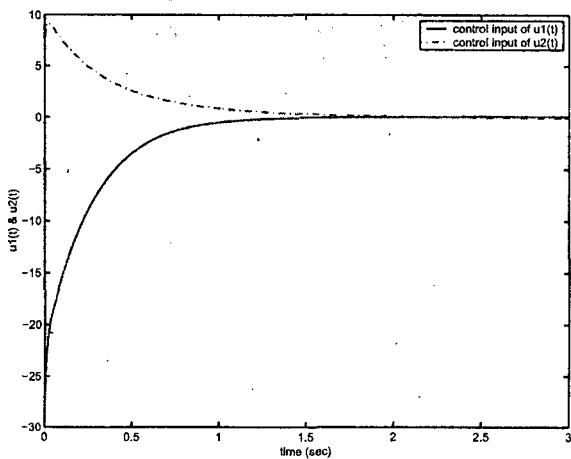
จากการจำลองระบบด้วยคอมพิวเตอร์ จะเห็นได้ว่าการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนสำหรับระบบ Robotic Manipulator ซึ่งมีคุณลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้น โดยอาศัยสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้สามารถประกันดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุด และสามารถกลับเข้าสู่มุมระดับที่ศูนย์ต้องการได้ทั้ง q_1 และ q_2 ทั้งที่เป็นค่าขอบเขตสูงสุดและต่ำสุด นอกจากนี้ทำให้เชื่อมั่นได้ว่า ระบบสามารถรักษาเสถียรภาพวงรอบปิดได้ แต่ในการพิจารณาแบบตั้งแต่เริ่มต้นนั้น เราพิจารณาการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะแบบเต็มสถานะ (Full state feedback controller) ซึ่งในความเป็นจริงไม่สามารถตรวจวัดแบบเต็มสถานะได้ทั้งหมด หรือตรวจวัดได้เฉพาะบางส่วนเท่านั้น ดังนั้นจึงควรพัฒนาการออกแบบตัวควบคุมที่มีความคงทนโดยเป็นแบบป้อนกลับสัญญาณออก (Output feedback controller) ในลำดับต่อไป

6 กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคุณพิเชษฐ์ บุญหนู ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้อาณัติเกี่ยวกับการใช้ LaTeX และอาจารย์ภิรมณ์ ก้อนคำ ผู้ช่วยคณบดีฝ่ายกิจการนักศึกษา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ที่ให้อาณัติเกี่ยวกับงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishanan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The MathWork, 1995.
- [3] K. Jinsuck, *Underactuated Control of Two-Link Manipulator*, M.S. Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, August, 1998.
- [4] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 1990.
- [5] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.

รูปที่ 3: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ $q_1(t)$ และ $q_2(t)$ รูปที่ 4: ผลตอบสนองเชิงเวลาของ $u_1(t)$ และ $u_2(t)$

List of Symbols

- $\mathbf{R}$: The set of real numbers.

- $\mathbf{R}^m$: The set of real m -vector.
- $\mathbf{R}^{m \times n}$: The vector space of $m \times n$ real matrices.
- X^T : The transpose of a matrix $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$.
- I_m : The identity matrix of size m of the identity of linear operator. We omit the subscript when m can be determined from context.
- X^{-1} : The inverse of X or the inverse of linear operator X , i.e., $XX^{-1} = I$.
- Tr : The Trace of $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$.
- $X > 0$ ($X \geq 0$): The symmetric X is positive definite (semidefinite), i.e., $X = X^T$ and $z^T X z > 0$ ($z^T X z \geq 0$) for all $z \in \mathbf{R}^n$.
- $\in$: belongs to
- CoS : Convex hull of the set $S \subseteq \mathbf{R}^m$, given by $\text{CoS} \triangleq \{\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i | x_i \in S, p \geq 0\}$.

List of Acronyms

- LMI: Linear Matrix Inequality
- SDP: Semidefinite Programming
- LQR: Linear Quadratic Regulator