

วิธีอย่างง่ายสำหรับประมาณหาค่าความถี่ตามธรรมชาติที่สูงขึ้นไปของเพลาสั่น Simplified Method for Approximating Higher Natural Frequencies of Vibrating Shafts

มิ่ง โลกิณแสงทอง

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

บทคัดย่อ

ความถี่ตามธรรมชาติของเพลาสั่นสามารถหาได้โดยวิธีการพีชคณิตอย่างง่าย ๆ ซึ่งไม่ต้องอาศัยการคำนวณอย่างยุ่งยากจากสมการเมทริกซ์ นับจากอดีตจนถึงปัจจุบันได้มีการนำเสนอสมการ Dunkerley ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีมาใช้ในการหาความถี่ตามธรรมชาติอันดับพื้นฐานอย่างถูกต้องแม่นยำดี โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อพิจารณาปัญหาของเพลาสั่นเชิงดัดโค้ง หลักการของสมการนี้ได้ถูกนำมาดัดแปลงใช้ในที่นี้เพื่อนำไปสู่วิธีการใหม่ในการหาความถี่ตามธรรมชาติอันดับที่สูงขึ้นไป นอกจากนั้นในที่นี้ยังได้แสดงการแก้ปัญหาของคานที่รองรับอย่างธรรมดาซึ่งมีก้อนมวลสองก้อนวางห่างเท่า ๆ กันเพื่อสาธิตให้เห็นความหวังผลของวิธีการนี้

Abstract

Without resorting to a cumbersome mathematical manipulation of a matrix, the natural frequencies of a vibrating shaft can be evaluated by means of a simple algebraic procedure. Hitherto the well-known Dunkerley equation has been employed to find the fundamental natural frequency with good accuracy especially when one is dealing with the problem of flexural vibrating shaft. The principle behind this equation has been adopted here to extend the procedure to find all the higher natural frequencies. The validity of the procedure has been demonstrated with a problem of a simply supported beam with equally spaced lumped masses.

1. บทนำ

องศาของควมอิสระ(DOF)ของระบบมีค่าเท่ากับจำนวนพิกัดอิสระที่จำเป็นต้องใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของระบบ ระบบใดที่มีองศาของควมอิสระ n จะมีความถี่ตามธรรมชาติ n ตัว

ถึงแม้ว่าทฤษฎีการสั่นสะเทือนสำหรับระบบแบบหลายองศาของควมอิสระ(MDOF)สามารถแสดงให้เห็นได้จากระบบแบบสององศาของควมอิสระ [1] ปัญหาของการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับระบบแบบหลายองศาของควมอิสระจะต้องได้รับการพิจารณาเป็นพิเศษ

เพราะว่าการพัฒนาอย่างรวดเร็วของเครื่องคอมพิวเตอร์ความเร็วสูงในปัจจุบันทำให้ต้องหาวิธีการการคำนวณใหม่ ๆ ซึ่งให้ผลเป็นที่น่าพอใจในการสร้างสมการสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขในรูปของเมทริกซ์และเทนเซอร์จะเป็นวิธีหนึ่งที่ทำให้ประโยชน์อย่างมากสำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในปัญหาการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งของเพลาสั่นที่มีพฤติกรรมอย่างอีลาสติกสามารถแก้ได้โดยพิจารณาเพลาสั่นในรูปของคานมีฐานรองรับวางตามความเหมาะสม[2] และมีก้อนมวลติดอยู่ การวิเคราะห์หาคำนวณอย่างละเอียดมักจะสิ้นเปลืองแรงงานอย่างมาก จึงจำเป็นต้องหันมาอาศัยการคำนวณโดยประมาณ วิธีการของ Dunkerley[3] เป็นวิธีการหนึ่งดังกล่าวในการหาความถี่ตามธรรมชาติขั้นพื้นฐานของระบบสั่นสะเทือน สำหรับ ความถี่ตามธรรมชาติขั้นสูงขึ้นไปก็สามารถหาได้อย่างง่ายเช่นกัน

2. สัญลักษณ์

- a_{ij} : flexibility influence coefficient
- E : modulus of elasticity
- F_i : แรงกระตุ้นที่จุด i
- I : โมเมนต์เชิงพื้นที่ของความเฉื่อย
- k_{ij} : stiffness influence coefficient
- l : ระยะห่างระหว่างก้อนมวล
- L : ความยาวของคาน
- m_i : ก้อนมวลที่จุด i
- P : แรงกระทำบนคาน
- y_i : ระยะโก่งของคานที่จุด i
- γ_{ij} : flexibility tensor
- δ_{ij} : Kronecker delta
- λ : eigen value
- ϕ_i : แรงกระตุ้นและแรงเฉื่อยบนมวล m_i
- ω : ความถี่ตามธรรมชาติเชิงวงกลม

กลุ่มไร้มิติ

$$\omega \left(\frac{mL^3}{EI} \right)^{1/2} : \text{ความถี่ไร้มิติ}$$

3. การคำนวณหาความถี่ตามธรรมชาติอย่างละเอียดถูกต้อง

3.1 สมการของการเคลื่อนที่

$$\phi_i = k_{ij} y_j \quad (1)$$

$$y_i = a_{ij} \phi_j \quad (2)$$

ในสมการ(1) k_{ij} คือแรงที่เกิดขึ้นที่จุด i เนื่องจากการขจัดหนึ่งหน่วยที่ j เมื่อมวลตัวอื่นยึดไว้กับที่ และในสมการ(2) a_{ij} คือการขจัดที่เกิดขึ้นที่จุด i เนื่องจากแรงหนึ่งหน่วยกระทำที่ j เมื่อไม่มีแรงกระทำที่จุดอื่นใดๆ

เมื่อการสั่นสะเทือนเป็นแบบอิสระจะได้ $\phi_i = -m_j \ddot{y}_j \delta_{ij}$ และ

การสั่นสะเทือนเป็นแบบบังคับ จะได้ $\phi_i = F_i - m_j \ddot{y}_j \delta_{ij}$

สำหรับการสั่นสะเทือนในโหมดปกติหรือโหมดหลัก จะเป็นแบบฮาร์โมนิคซึ่งจะให้ผลเป็น

$$\omega^2 m_i y_i \delta_{ij} = -m_i \ddot{y}_i \delta_{ij} \quad (3)$$

3.2 สมการcharacteristic

เมื่อแทนค่าสมการ(3)ลงไปในสมการ(2)จะได้สมการcharacteristicอยู่ในรูป

$$|\gamma_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad (4)$$

เมื่อ $\gamma_{ij} = a_{ik} m_k \delta_{kj}$ และ eigenvalue $\lambda = 1/\omega^2$

4. การคำนวณหาความถี่ตามธรรมชาติอย่างประมาณ

สำหรับระบบที่ประกอบด้วยองศาของอิสระ n สมการcharacteristic สามารถกระจายพจน์ออกมาได้เป็น

$$(-1)^{n-1} \lambda^n + (-1)^{n-2} \lambda^{n-1} I_1 + (-1)^{n-3} \lambda^{n-2} I_2 + (-1)^{n-4} \lambda^{n-3} I_3 + \dots + \lambda I_{n-1} - I_n = 0 \quad (5)$$

เมื่อ

$$I_1 = \gamma_{ii}$$

$$I_2 = 1/2(\gamma_{ii}\gamma_{jj} - \gamma_{ij}\gamma_{ji})$$

$$I_3 = 1/6(\gamma_{ii}\gamma_{jj}\gamma_{kk} - 3\gamma_{ii}\gamma_{jk}\gamma_{jk} + \gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ki})$$

I_i เรียกว่า invariants[5] I_2 ถึง I_n จะเป็น determinant ของเมตริกซ์ 2×2 ถึง $n \times n$ ตามลำดับ ของ γ_{ij} แต่ละพจน์จะกระจายตามหลัก tensor calculus จนถึงองศาของความอิสระสูงสุดของระบบ ถ้า λ_i เมื่อ $1 \leq i \leq n$ เป็นรากของสมการcharacteristic ดังนั้นจึงเขียนให้อยู่ในรูปสมการต่อไปนี้ได้

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) = 0$$

หรือ

$$(-1)^{n-1} \lambda^n + (-1)^{n-2} \lambda^{n-1} \Sigma(\lambda_i) + (-1)^{n-3} \lambda^{n-2} \Sigma(\lambda_i \lambda_j) + (-1)^{n-4} \lambda^{n-3} \Sigma(\lambda_i \lambda_j \lambda_k) + \dots + \lambda I_{n-1} - I_n = 0 \quad (6)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์ของสมการ(5)และ(6)จะได้ว่า
(ก)พจน์ที่สอง

$$\Sigma \lambda_i = I_1 \quad (7)$$

สมการ(7)จะสอดคล้องกับทฤษฎีพีชคณิต[1]ที่กล่าวว่าถ้าสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สูงสุด ของสมการโพลิโนเมียลถูกลดลงจนเป็นหนึ่งแล้ว สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สูงเป็นอันดับสองจะเท่ากับผลบวกของรากของสมการ แต่เนื่องจากจากค่าความถี่ที่สูงกว่าอันดับแรกจะมีค่าสูงขึ้นตามลำดับ เพราะฉะนั้น λ_i สำหรับ $2 \leq i \leq n$ ก็จะมีค่าลดลง ผลที่ได้คือ

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} \cong I_1 \quad (8)$$

สมการ(8)คือสมการของDunkerley[3] เพื่อประมาณค่าความถี่ตามธรรมชาติอันดับแรก

(ข)พจน์ที่สามถึงพจน์ที่ n

$$\Sigma \left[\prod_{i=1}^2 \lambda_i \right] = I_2 \quad (9)$$

แต่เนื่องจากจากค่าความถี่ที่สูงกว่าอันดับสองจะมีค่าสูงขึ้นตามลำดับ เพราะฉะนั้น λ_i สำหรับ $3 \leq i \leq n$ ก็จะมีค่าลดลง ผลที่ได้คือ

$$\prod_{i=1}^2 \lambda_i = \frac{1}{\omega_1^2} \frac{1}{\omega_2^2} \cong I_2 \quad (10)$$

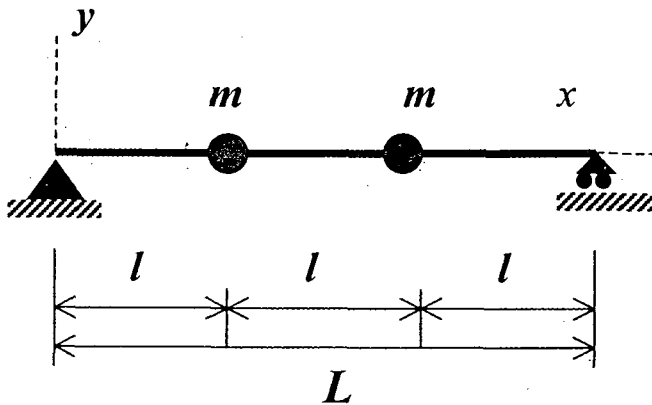
ในทำนองเดียวกัน สามารถสรุปได้ว่า สำหรับความถี่ m ใดๆเมื่อ $2 \leq m \leq n$ จะได้

$$\prod_{i=1}^m \lambda_i \cong I_m \quad (11)$$

สมการ(11)จะสอดคล้องกับทฤษฎีพีชคณิต[2]ที่กล่าวว่าถ้าสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สูงสุด ของสมการโพลิโนเมียลถูกลดลงจนเป็นหนึ่งแล้วพจน์ที่เป็นค่าคงที่ จะเท่ากับผลคูณของรากของสมการ

5. ตัวอย่างการคำนวณ

5.1 วิธีละเอียดถูกต้อง



รูปที่ 1 คานรองรับอย่างธรรมดาพร้อมก้อนมวล

พิจารณาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของคานความยาว L ซึ่งรองรับอย่างธรรมดามีก้อนมวล m สองก้อนวางห่างกันเท่ากับ l ดังในรูปที่ 1 และสัมประสิทธิ์ a_{ij} สามารถหาจากสมการระยะโก่งงอ(12)และ(13) ซึ่งได้จากการอินทิเกรตโดยตรง[4] เมื่อแรง P กระทำบนคานอยู่ที่จุดห่างจากปลายด้านซ้ายและด้านขวาเท่ากับ a และ b ตามลำดับ เมื่อ $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{Pb}{EIL} \frac{x^3}{6} - \frac{Pb}{6EIL} (L^2 - b^2)x \quad (12)$$

เมื่อ $a \leq x \leq L$

$$y = \frac{Pa}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Pa}{EIL} \frac{x^3}{6} - \frac{Pa}{6EIL} (2L^2 + a^2)x + \frac{Pa^3}{6EI} \quad (13)$$

สำหรับคานอันนี้สมการ(4)เขียนได้ในรูปdeterminantของเมตริกส์เป็น

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{9} \frac{ml^3}{EI} - \lambda & \frac{7}{18} \frac{ml^3}{EI} \\ \frac{7}{18} \frac{ml^3}{EI} & \frac{4}{9} \frac{ml^3}{EI} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{8}{9} \frac{ml^3}{EI} \lambda + \frac{5}{108} \frac{m^2 l^6}{E^2 I^2} = 0 \quad (14)$$

เมื่อแก้สมการ(14)แล้วความถี่ตามธรรมชาติในรูปไร้มิติ

$$\omega \left(\frac{mL^3}{EI} \right)^{1/2} \text{ อันดับที่หนึ่งและสองจะได้เป็น } 5.6919 \text{ และ } 22.0452$$

ตามลำดับ

5.2 วิธีประมาณ

สำหรับคานที่พิจารณาอยู่จะได้

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \gamma_{11} + \gamma_{22} = \frac{8}{9} \frac{ml^3}{EI}$$

หรือ

$$\omega_1 \left(\frac{mL^3}{EI} \right)^{1/2} = 5.5114$$

และ

$$\frac{1}{\omega_1^2} \frac{1}{\omega_2^2} \cong \gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21} = \frac{15}{324} \left(\frac{ml^3}{EI} \right)^2$$

$$\omega_1 \left(\frac{mL^3}{EI} \right)^{1/2} = 22.7684$$

ค่าที่ได้จากวิธีละเอียดถูกต้องและวิธีประมาณได้เปรียบเทียบไว้ในตารางที่ 1

ตารางที่1การเปรียบเทียบค่าความถี่ตามธรรมชาติ

ความถี่อันดับที่	$\omega(mL^3/EI)^{1/2}$		
	ค่าละเอียด สมการ(14)	ค่าประมาณ สมการ(11)	ร้อยละของ ความผิดพลาด
1	5.6919	5.5114	-3.17
2	22.0452	22.7684	3.28

$$\text{ร้อยละของความผิดพลาด} = \frac{\text{ค่าประมาณ}-\text{ค่าละเอียดถูกต้อง}}{\text{ค่าละเอียดถูกต้อง}} \times 100$$

6. บทวิจารณ์และสรุป

จะเห็นว่าขั้นตอนการคำนวณหาความถี่ตามธรรมชาติอย่างละเอียดถูกต้องในสมการ(4) และอย่างประมาณในสมการ(8)และ(11) มีขั้นตอนในการคำนวณที่รวดเร็วแตกต่างกันมาก สมการ(4)จะต้องแก้สมการโพลีโนเมียลอันดับที่ m หรือใช้วิธีiterationเมตริกซ์ซึ่งใช้เวลามาก แต่สมการ(8)และ(11)สามารถหาความถี่อันดับที่ m ออกมาได้ในขั้นตอนเดียว เมื่อทราบค่าของความถี่อันดับที่หนึ่งถึง $m-1$

การหาค่าinvariantsสำหรับอันดับที่สูงขึ้นไป สามารถทำได้โดยง่ายเมื่อคำนวณจากสมการที่เขียนอยู่ในรูปเทนเซอร์ การกระจายพจน์ทำได้อย่างรวดเร็ว สำหรับคานรองรับอย่างธรรมดาซึ่งมีก้อนมวลสองก้อนวางห่างเท่ากัน จะมีค่าของความผิดพลาดของความถี่ประมาณร้อยละ 3 ดังแสดงผลไว้ในตารางที่ 1 ซึ่งก็เป็นค่าที่ยอมรับได้ ถ้ามีการปรับปรุงสมการ(8)และ(11)ให้เหมาะสมขึ้นคาดว่าค่าผิดพลาดนี้จะลดน้อยลง นอกจากนั้น การเขียนสมการในรูปนี้ยังเหมาะที่จะใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ด้วย

เอกสารอ้างอิง

1. Thomson, W.T., "Vibration Theory and Applications," Prentice-Hall, 1973.
2. Dimarogonas, A.D., and Paipetis, S.A., "Analytical Methods in Rotor Dynamics," Applied Science, 1983.
3. Dunkerley, S., "On the Whirling and Vibration of Shafts," Phil. Trans. Roy. Soc. A. vol.185, 1895, pp.269-360.
4. Popov, E. P., "Mechanics of Materials," 2nd Ed., Prentice-Hall, 1981.
5. Chung, T.J., "Continuum Mechanics," Prentice-Hall, 1988.