BME-175

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งในเส้นเอ็นข้อต่อ

A Mathematical Model for Preconditioning Process in Ligaments and Tendons

นายเกษมสันต์ เพชรสุวรรณรังษี[1*], ดร.รัชดา โสภาคะยัง[2]

[1, 2] มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี ตำบลเมืองศรีไค อำเภอวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี 34190
* ติดต่อ: E-mail Kasemsanextremo@gmail.com, เบอร์โทรศัพท์ 09-3547-7667

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างองค์ความรู้และความเข้าใจต่อพฤติกรรมทางโครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อภายใต้กระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง โดยงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถอธิบายพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างที่เกิดขึ้นได้ ยิ่งไปกว่านั้นตัวแปรในแบบจำลองที่สร้างขึ้นยังสามารถบ่งชี้ถึงสมบัติและพฤติกรรมเชิงกลของโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นได้ จึงทำให้เกิดความเข้าใจเชิงลึกต่อการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างของเส้นเอ็นขณะผ่านกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง

กระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งเป็นกระบวนการที่ต้องทำเสมอก่อนการทดลองเชิงกลโดยทั่วไปของเส้นเอ็น ทั้งนี้เนื่องจากเส้นเอ็นเป็นวัสดุวิสโคอิลาสติก การที่เส้นเอ็นได้รับแรงกระทำในรูปแบบต่างๆ อันเนื่องมาจากการเตรียมชิ้นงานก่อนการทดลองจึงส่งผลต่อผลการทดลองที่ได้ ดังนั้นกระบวนการพรี คอนดิชั่นนิ่งจึงเป็นการทำให้ชิ้นงานอยู่ในสภาวะเริ่มต้นเดียวกันก่อนการทดลองนั่นเอง การพรีคอนดิชั่น นิ่งที่ศึกษาในงานวิจัยนี้เป็นการให้แรงแบบวงรอบซ้ำๆแก่เส้นเอ็น โดยควบคุมให้ค่าความเครียดสูงสุดของเส้นเอ็นในแต่ละวงรอบมีค่าคงที่ ซึ่งพบว่าในการให้แรงช่วงวงรอบแรกๆ ค่าความเค้นของ เส้นเอ็นข้อต่อ จะลดลงอย่างรวดเร็วในทุกวงรอบ และจะ ค่อยๆลดลงเมื่อวงรอบมีจำนวนมากขึ้น จนกระทั่งเส้นเอ็นเข้าสู่ภาวะสมดุลคือ ค่าความเค้นและความเครียดของเส้นเอ็นไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อจำนวนวงรอบแรงเพิ่มขึ้น เส้นเอ็นประกอบไปด้วยไฟเบอร์มากมายเรียงตัวอยู่ในทิศทางเดียวกันและไฟเบอร์แต่ละเส้นถูกเชื่อมโยงเข้า กับเมทริกซ์รอบๆเส้นไฟเบอร์ ด้วยเส้นเชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าการลดลงของความเค้นในแต่ละวงรอบแรงนั้น เกิดจากการลดลงของ การเชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ในเส้นเอ็น ดังนั้นงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยมีสมมุติฐานว่า การลดลงของความเค้นในแต่ละวงรอบแรงเกิดขึ้นเนื่องจาก การขาดออกจากกันระหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์ที่เชื่อมกันอยู่ โดยในวงรอบแรงแรกๆโครงสร้างที่เชื่อมต่อไฟเบอร์กับเมทริกซ์จะขาดเป็นจำนวนมาก และจะขาดน้อยลงเมื่อวงรอบแรงมีจำนวนมากขึ้น จนเมื่อเส้นเอ็นเข้าสู่สมดุลก็จะไม่มีการขาดของโครงสร้างที่เชื่อมต่อดังกล่าว

คำหลัก: แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, วิสโคอิลาสติก, กระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง, เส้นเอ็นข้อต่อ

BME-175

Abstract

This research aims to contribute the knowledge and understand the structural behaviors of ligaments and tendons under preconditioning process. In this research, a mathematical model is developed to describe the structural changes of ligaments and tendons during preconditioning. The parameters in the model are directly related to the properties and physiology of the structure in ligaments and tendons which lead to a profound understanding of the origin of the structural changes under preconditioning process.

The specimens of ligaments and tendons are generally preconditioned before testing in order to get rid of the viscoelastic effect influencing the parameter of the specimens during the preparation process. Therefore, preconditioning process is a process to set up the same initial condition for all specimens before testing. In this research, we focus on the strain controlled preconditioning in which the maximum strain of each cyclic loading applying to the specimens is controlled to be the same value. It has been found that the maximum stress of each cyclic loads increase. This phenomenon is believed that the breaking of the connectors between the collagen fibers and the matrix causes the stress softening in ligaments and tendons during preconditioning process. Therefore, the mathematical model in this work is formulated by assuming that the connectors between the collagen fibers and the matrix in ligament and tendons rapidly break during the first few loading cycles of preconditioning process and they gradually break when the number of loading cycles increases. Finally, there will be no connectors break even though the numbers of loading cycle increase. This state is called completed preconditioning or steady state.

Keywords: Mathematical Model, Viscoelastic, Preconditioning Process, Ligaments, Tendons

1. บทนำ

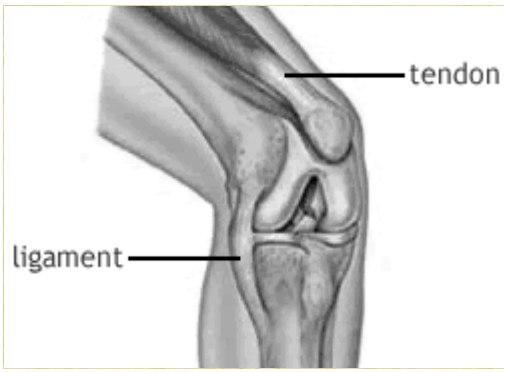
เส้นเอ็นข้อต่อ หมายถึง เส้นเอ็นที่เชื่อมต่อระหว่างกระดูกกับกระดูก (Ligaments) และเส้นเอ็นที่เชื่อมต่อระหว่างกล้ามเนื้อกับกระดูก (Tendons) ซึ่งมีหน้าที่หลักในการถ่ายโอนแรงและเชื่อมต่อข้อต่อต่างๆ ในร่างกายให้มีความแข็งแรงและในขณะเดียวกันก็สามารถยืดหยุ่นได้ด้วย ดังรูปที่ 1

ในการศึกษาคุณสมบัติเชิงกลของเส้นเอ็นข้อต่อ โดยทั่วไปมักจะศึกษาโดยการทำการทดลองให้เส้นเอ็นรับแรงเชิงกลในรูปแบบต่างๆ และจากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าคุณสมบัติเชิงกลที่เกิดขึ้นของเส้นเอ็นข้อต่อชนิดเดียวกันซึ่งรับแรงในรูปแบบเดียวกันกลับมีค่าที่ต่างกัน [3] ทั้งนี้เกิดขึ้นจากคุณสมบัติความเป็นวิสโคอีลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อนั่นเอง

เส้นเอ็นข้อต่อจัดเป็นวัสดุวิสโคอีลาสติก ดังนั้นเมื่อเส้นเอ็นได้รับแรง ในขณะที่เตรียมชิ้นงานเพื่อทำการทดลอง จึงส่งผลต่อผลการทดลองของเส้นเอ็นนั้นๆ ดังนั้นเพื่อกำจัดผลกระทบดังกล่าวนักวิจัยด้านชีวกลศาสตร์จึงต้องนำชิ้นงานมาผ่านกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง (Preconditioning Process) ในขั้นตอนก่อนทำการทดลอง ซึ่งเป็นการทำให้ชิ้นงานต่างๆมีสภาวะเริ่มต้นก่อนการทดลองเหมือนกันนั่นเอง โดยการทำพรีคอนดิชั่นนิ่งจะเป็นการให้แรงแบบวงรอบซ้ำๆแก่เส้นเอ็น โดยควบคุมให้ค่าความเครียดสูงสุดของเส้นเอ็นในแต่ละวงรอบมีค่าคงที่ ซึ่งในช่วง

วงรอบแรก ๆค่าความเค้นของเส้นเอ็นจะลดลงอย่างรวดเร็ว และจะค่อย ๆลดลง ซึ่งโดยทั่วไปกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง จะทำการยืดชิ้นงานด้วยความเครียดไม่เกิน 5 % โดยความเครียดช่วงนี้อยู่ในช่วงเริ่มต้น (Toe region) เพื่อป้องกันการเสียของเส้นใยไฟเบอร์ที่อยู่ในเส้นเอ็น จากงานวิจัย [4] การพรีคอนดิชั่นนิ่งส่งผลต่อค่าความแข็งแรงของเส้นเอ็น พบว่าเมื่อให้แรงในการพรีคอนดิชั่นนิ่งมาก ค่าความแข็งของเส้นเอ็นจะมีค่าลดลง ซึ่งอาจทำให้เกิดผลกระทบต่อชิ้นงานก่อนทำการทดลองได้ เมื่อจำนวนรอบเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งเข้าสู่สมดุลในที่สุดหรือเรียกว่าพรีคอนดิชั่นนิ่งที่สมบูรณ์ ซึ่งหมายถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเพิ่มจำนวนวงรอบให้กับเส้นเอ็น และจากงานวิจัย [5] ที่ได้ทำการทดลองการพรีคอนดิชั่นนิ่งหนังของหมู โดยการทดลองได้แบ่งเป็นสองลักษณะคือ การตัดหนังหมูในแนวขนานกับเส้นไฟเบอร์ และการตัดหนังหมูที่จะทำการทดลองในแนวตั้งฉากกับเส้นไฟเบอร์ ซึ่งจากผลการทดลองพบว่าหนังหมูที่ตัดตามแนวขนานจะต้องทำการพรีคอนดิชั่นนิ่งที่ 4-6 รอบ แต่หนังหมูที่ตัดในแนวตั้งฉากจะใช้จำนวนรอบที่ประมาณ 8-12 รอบ จะเห็นได้ว่าลักษณะการตัดชิ้นงานในการทดลองมีผลต่อกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง อย่างไรก็ตามในปัจจุบันยังไม่มีรูปแบบและความเข้าใจที่ชัดเจนเกี่ยวกับกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง ซึ่งหากให้วงรอบแรงกับเส้นเอ็นน้อยเกินไปก็จะทำให้การพรีคอนดิชั่นนิ่งไม่สมบูรณ์ อาจจะทำให้สภาวะเริ่มต้นของเส้นเอ็นก่อนการทดลองยังมีความแตกต่างกันในแต่ละชิ้นงาน แต่ถ้าหากมีการให้วงรอบแรงแก่เส้นเอ็นมากเกินไปชิ้นงานก็จะเกิดการเสียหายได้

ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งประสงค์ที่จะเข้าใจพฤติกรรมเชิงโครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อภายใต้กระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งผ่านทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยงานวิจัยนี้มีสมมุติฐานว่า การลดลงของความเค้นในแต่ละวงรอบแรงเกิดขึ้นเนื่องจาก การขาดออกจากกันระหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์ที่เชื่อมกันอยู่ โดยในวงรอบแรงแรก ๆโครงสร้างที่เชื่อมต่อไฟเบอร์กับเมทริกซ์จะขาดเป็นจำนวนมาก และจะขาดน้อยลงเมื่อวงรอบแรงมีจำนวนมากขึ้น จนเมื่อเส้นเอ็นเข้าสู่สมดุลก็จะไม่มีการขาดของโครงสร้างที่เชื่อมต่อดังกล่าว

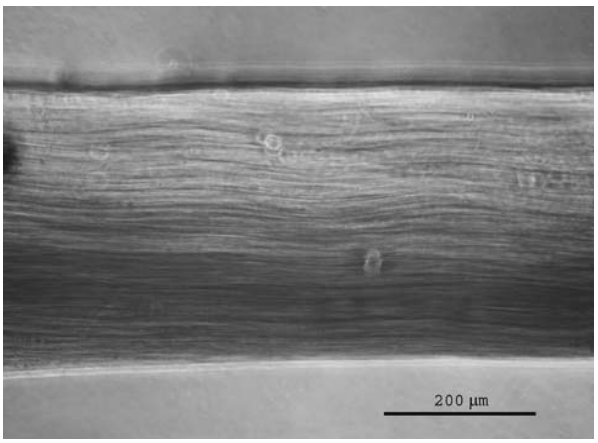


รูปที่ 1 ตัวอย่าง Ligaments และTendons ที่บริเวณข้อเข่า

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

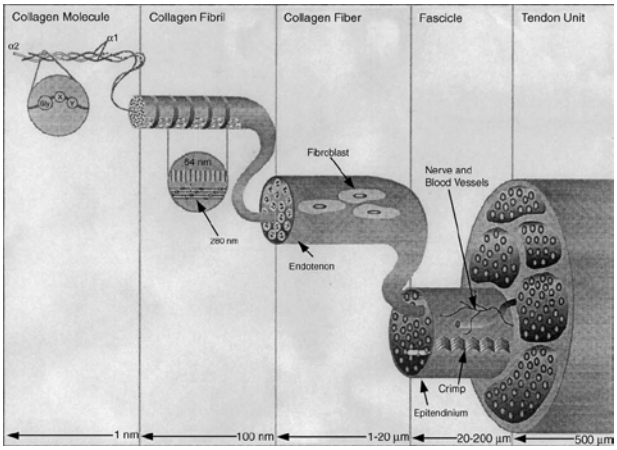
2.1 โครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อ

เส้นเอ็นข้อต่อ ประกอบไปด้วยการรวมตัวกันของเส้นใยไฟเบอร์ที่อยู่ในทิศทางเดียวกันดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งเส้นใยไฟเบอร์เหล่านี้ถูกห่อหุ้มด้วยเมทริกซ์ที่ประกอบไปด้วยน้ำและไขมันเป็นต้น ไฟเบอร์แต่ละเส้นเกิดจากการรวมตัวกันของไฟบริล โดยไฟบริลแต่ละเส้นเกิดจากการรวมกันของไมโครไฟบริล และไมโครไฟบริลเกิดขึ้นมาจากโมเลกุลของคอลลาเจน ดังแสดงในรูปที่ 3



BME-175

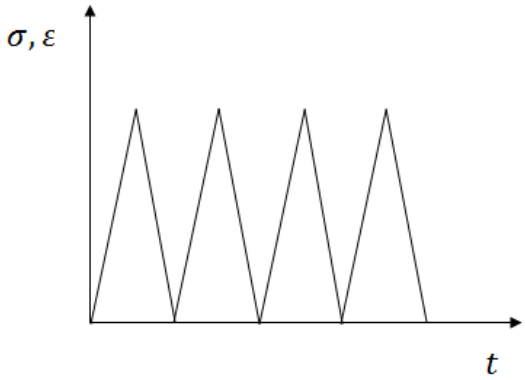
รูปที่ 2 การจัดเรียงตัวของเส้นใยไฟเบอร์ [7]



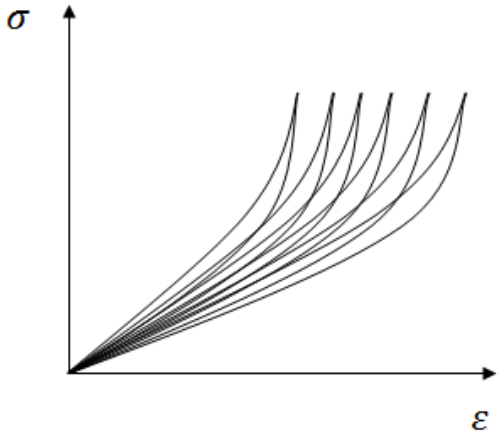
รูปที่ 3 โครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อ [9]

2.2 ปรากฏการณ์พรีคอนดิชั่นนิ่งในเส้นเอ็นข้อต่อ

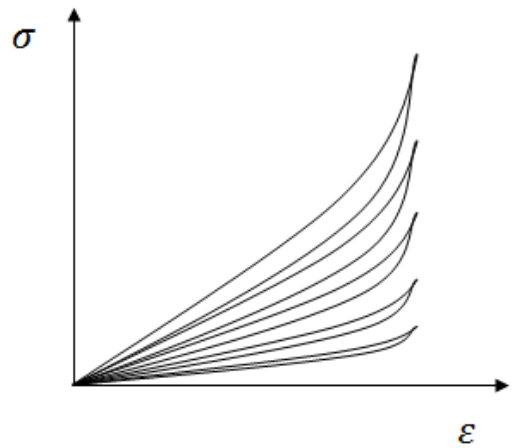
การพรีคอนดิชั่นนิ่ง คือ การให้แรงแบบวงรอบซ้ำๆแก่เส้นเอ็น โดยควบคุมให้ค่าความเค้นสูงสุดหรือค่าความเครียดสูงสุดของเส้นเอ็นในแต่ละวงรอบมีค่าคงที่ ดังแสดงในรูปที่ 4 กระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งโดยทั่วไปสามรถทำได้สองลักษณะคือการควบคุมให้ความเค้นสูงสุดคงที่ ซึ่งจะสามารถแสดงผลการพรี - คอนดิชั่นนิ่งดังรูปที่ 5 โดยจะพบว่าเมื่อจำนวนรอบของแรงมากขึ้นค่าความเครียดของเส้นเอ็นจะมีค่ามากขึ้น จนกระทั่งเมื่อเพิ่มจำนวนรอบของแรงจนถึงค่าๆหนึ่งจะไม่ทำให้ค่าความเครียดของเส้นเอ็นเปลี่ยนแปลงซึ่งหมายถึงสภาวะการพรีคอนดิชั่นนิ่งที่สมบูรณ์ และการพรีคอนดิชั่นนิ่งอีกกรณีหนึ่งคือ การควบคุมให้ความเครียดสูงสุดคงที่ ซึ่งสามารถแสดงผลการพรีคอนดิชั่นนิ่งได้ดังรูปที่ 6 โดยจะพบว่าเมื่อจำนวนรอบของแรงเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ค่าความเค้นของเส้นเอ็นจะมีค่าลดลง จนกระทั่งเมื่อเพิ่มจำนวนรอบของแรงถึงค่าๆหนึ่ง จะไม่ทำให้ค่าความเค้นของเส้นเอ็นเปลี่ยนแปลงนั่นคือ สภาวะการพรีคอนดิชั่นนิ่งที่สมบูรณ์ ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกที่จะศึกษาการพรี - คอนดิชั่นนิ่งในกรณีที่ควบคุมให้ค่าความเครียดสูงสุดคงที่



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นหรือความเครียดของวงรอบแรงในการพรีคอนดิชั่นนิ่งเทียบกับเวลา



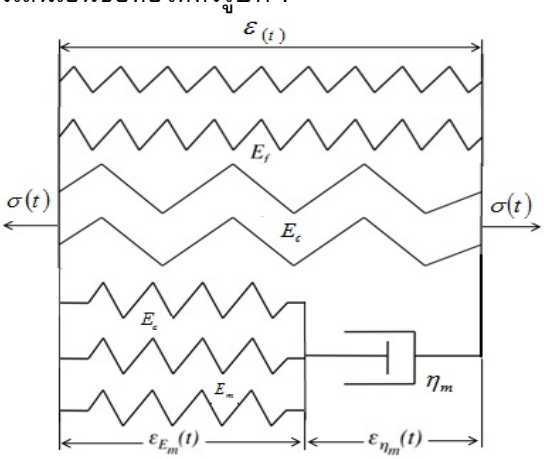
รูปที่ 5 การพรีคอนดิชั่นนิ่งที่ควบคุมให้ความเค้นสูงสุดคงที่



รูปที่ 6 การพรีคอนดิชั่นนิ่งที่ควบคุมให้ความเครียดสูงสุดคงที่

3. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเส้นเอ็นข้อต่อที่สร้างขึ้นโดย R. Sopakayang (2013) เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ของกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง โดยงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองที่อธิบายการลดลงของค่าความเค้นในแต่ละรอบของกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าว จึง ได้ตั้งสมมุติฐานว่า ส่วนประกอบหลักที่มีบทบาทสำคัญของเส้นเอ็นข้อต่อในขณะเกิดกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง ประกอบไปด้วย ไฟเบอร์,เมทริกซ์ และส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ โดยในงานวิจัยนี้ได้สมมุติให้ไฟเบอร์ให้มีการตอบสนองเชิงกลเหมือนกับสปริงเชิงเส้น E_f และการตอบสนองเชิงกลของเมทริกซ์เหมือนกับตัวหน่วงที่มีค่าสัมประสิทธ์ ความหนืดคงที่ η_m ในขณะที่ E_m คือค่ามอดูลัสสปริงของเมทริกซ์ และส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์เข้าด้วยกันมีค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นเป็น E_c จากสมมุติฐานนี้สามารถนำมาสร้างเป็นแบบจำลองทางวิสโคอิลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 แบบจำลองทางวิสโคอิลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อ

จากแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์ ข้างต้น จะเห็นได้ว่าความเค้นทั้งหมดของแบบจำลองนี้คือ

$$\sigma(t)=\sigma_f(t)+\sigma_{c,f}(t)+\sigma_{c,m}(t)+\sigma_m(t) \quad (1)$$

เมื่อ

$\sigma(t)$ คือ ค่าความเค้นรวมของแบบจำลอง

$\sigma_f(t)$ คือ ค่าความเค้นของคอลลาเจนไฟเบอร์

$\sigma_{c,f}(t), \sigma_{c,m}(t)$ คือ ค่าความเค้น ของตัวเชื่อมต่อที่เชื่อมโยงระหว่างคอลลาเจนไฟเบอร์และเมทริกซ์

$\sigma_m(t)$ คือ ค่าความเค้นของเมทริกซ์

พิจารณาการเรียงตัวของสปริงและตัวหน่วงของเมทริกซ์จะได้

$$\sigma_{c,m}(t)+\sigma_m(t)=\sigma_\eta(t) \quad (2)$$

เมื่อ

$\sigma_\eta(t)$ คือ ค่าความเค้นตัวหน่วงของเมตริกซ์

จากแบบจำลองสามารถหาค่า ความเครียดรวมทั้งหมดดังนี้

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_f(t)=\varepsilon_{c,f}(t)=\varepsilon_{c,m}(t)+\varepsilon_\eta(t) \quad (3)$$

เมื่อ

$\varepsilon(t)$ คือ ค่าความเครียดรวมของแบบจำลอง

$\varepsilon_f(t)$ คือ ค่าความเครียดของคอลลาเจนไฟเบอร์

$\varepsilon_{c,f}(t), \varepsilon_{c,m}(t)$ คือ ค่าความเครียดของตัวเชื่อมส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์

$\varepsilon_\eta(t)$ คือ ค่าความเครียดตัวหน่วงของเมทริกซ์

โดยปกติแล้วเส้นใยไฟเบอร์มีลักษณะที่หย่อนยานขณะไม่รับแรง ดังนั้นเมื่อให้แรงแก่เส้นเอ็นข้อต่อเส้นไฟเบอร์เหล่านี้จะเริ่มตึงหรือรับแรงที่ความเครียดต่างกัน โดยงานวิจัยนี้สมมุติให้ลักษณะการเริ่มตึงหรือรับแรงของเส้นไฟเบอร์มีลักษณะการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Probability Density Function) โดย

$$p(\varepsilon_s)=\alpha e^{-\alpha\varepsilon_s} \text{ เมื่อ } \int_0^\infty p(\varepsilon_s)\,d\varepsilon_s=1 \quad (4)$$

เมื่อ $\alpha > 0$ คือ Rate Parameter

ซึ่งจะได้ความเค้นของคอลลาเจนไฟเบอร์ดังนี้

$$\sigma_f(t)=\int_0^{\varepsilon(t)} E_f(\varepsilon(t)-\varepsilon_s)\,p(\varepsilon_s)\,d\varepsilon_s \quad (5)$$

เมื่อ ε_s คือ ค่าความเครียดที่ไฟเบอร์แต่ละเส้นเริ่มรับแรง

ค่าความเค้นรวมที่อยู่ระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ $\sigma_c(t)$ คือ

$$\sigma_c(t) = \sigma_{c,f}(t) + \sigma_{c,m}(t) \quad (6)$$

จากความเค้นที่เกิดขึ้นในตัวเชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\sigma_{c,f}(t) = E_c\varepsilon_{c,f}(t)(1-P(\varepsilon_{c,f}(t))) + E_c\int_0^{\varepsilon_{c,f}(t)}\varepsilon_s p(\varepsilon_s)d\varepsilon_{s,} \quad (7)$$

$$\sigma_{c,m}(t) = E_c\varepsilon_{c,m}(t)(1-P(\varepsilon_{c,m}(t))) + E_c\int_0^{\varepsilon_{c,m}(t)}\varepsilon_s p(\varepsilon_s)d\varepsilon_{s,} \quad (8)$$

ในกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง เมื่อเส้นเอ็นข้อต่อรับแรงมากขึ้นจะมีผลทำให้ตัวเชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์ค่อยๆขาดออกจากกัน โดยกำหนดให้ลักษณะการขาดของตัวเชื่อมต่อเป็นฟังก์ชั่นเอ็กซ์โพเนนเชียล ดังนั้นฟังก์ชันของตัวเชื่อมโยงระหว่างไฟเบอร์กำหนดให้เป็น $P(\varepsilon_{c,f})$ และฟังก์ชันของเมทริกซ์กำหนดให้เป็น $P(\varepsilon_{c,m})$ สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$P(\varepsilon_{c,f}) = \int_0^{\varepsilon_{c,f}} p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b = 1-e^{\beta\varepsilon_{c,f}} \quad (9)$$

$$P(\varepsilon_{c,m}) = \int_0^{\varepsilon_{c,m}} p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b = 1-e^{\beta\varepsilon_{c,m}} \quad (10)$$

จากสมการ (8) นำค่าความเค้นรวมของเมทริกซ์

$$\sigma_m(t) = E_m\varepsilon_m(t) \quad (11)$$

และค่าความเค้นรวมของค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด

$$\sigma_\eta(t) = \eta_m\varepsilon'_\eta(t) \quad (12)$$

เมื่อนำสมการ (11)(12) แทนลงในสมการ (2) จะได้สมการ (13)

$$E_c\varepsilon_{c,m}(t)(1-P(\varepsilon_{c,m}(t))) + E_c\int_0^{\varepsilon_{c,m}(t)}\varepsilon_s p(\varepsilon_s)d\varepsilon_s + E_m\varepsilon_m(t) = \eta_m\varepsilon'_\eta(t) \quad (13)$$

จากสมการที่ (3) และ (13) นำ $\varepsilon_{c,m}(t) = \varepsilon_m(t)$ แทนลงไป จะได้

$$\varepsilon'_{c,m}(t) = \varepsilon'(t) - \frac{E_c}{\eta_m}\varepsilon_{c,m}(t)(1-P(\varepsilon_{c,m}(t))) - \frac{E_c}{\eta_m}\int_0^{\varepsilon_{c,m}(t)}\varepsilon_b p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b - \frac{E_c}{\eta_m}\varepsilon_{c,m}(t) \quad (14)$$

จาก การแจกแจงความถี่แบบเอกซ์โพเนนเชียลที่กำหนดขึ้นตามสมการที่ (4) และ (6) แทนลงไปในสมการที่ (14) จะได้สมการดังนี้

$$\varepsilon'_{c,m}(t) = \varepsilon'(t) + \frac{E_c}{\beta\eta_m}(e^{-\beta\varepsilon_{c,m}(t)}-1) - \frac{Em}{\eta_m}\varepsilon_{c,m}(t) \quad (15)$$

จากสมการที่ (3),(4) และสมการที่ (8) สามารถสร้างสมการความเค้นทั้งหมด($\sigma(t)$) ที่เกิดในโมเดลนี้ได้ ดังนี้

$$\sigma(t) = \int_0^{\varepsilon(t)} E_f(\varepsilon(t)-\varepsilon_s)p(\varepsilon_s)d\varepsilon_s. + E_c\varepsilon(t)(1-P(\varepsilon_{c,f}(t))) + E_c\int_0^{\varepsilon(t)}\varepsilon_s p(\varepsilon_s)d\varepsilon_s\eta_m(\varepsilon'(t)-\varepsilon'_{c,m}(t)) \quad (16)$$

นำสมการที่ (12) แทนลงในสมการที่ (16) จะได้สมการดังนี้

$$\sigma(t) = \int_0^{\varepsilon(t)} E_f(\varepsilon(t)-\varepsilon_s)p(\varepsilon_s)d\varepsilon_s. + E_c\varepsilon(t)(1-P)(\varepsilon_{c,f}(t))) + E_c\int_0^{\varepsilon(t)}\varepsilon_s p(\varepsilon_s)d\varepsilon_s + (E_m\varepsilon_{c,m}(t) - \frac{E_c}{\beta}(e^{-\beta\varepsilon_{c,m}}-1)) \quad (17)$$

จากทฤษฎีของ Leibniz's นั้น สามารถดิฟเฟอเรนเทียล สมการที่ติดอินทิเกรตโดยเทียบเวลา ได้ดังนี้

$$\sigma'(t) = E_f\varepsilon'(t)(1-e^{-\alpha\varepsilon}) + E_c\varepsilon'(t)e^{-\beta\varepsilon(t)} + \varepsilon'_{c,m}(t)(E_m + \beta E_c e^{-\beta\varepsilon_{c,m}(t)}) \quad (18)$$

ในแต่ละวงรอบแรงจะเกิดการลดลงของความเค้นสูงสุด ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ให้สมมุติฐานว่า เกิดจากการลดลงของค่ามอดูลัส ของตัวเชื่อมเมทริกซ์และไฟเบอร์ ดังสมการต่อไปนี้

$$E_c^{i+1} = \gamma \cdot E_c^i \cdot e^{-\gamma(i-1)} \quad (19)$$

$$E_m^{i+1} = E_m^i - (E_c^i - E_c^{i+1}) \quad (20)$$

$$E_f^{i+1} = E_f^i - (E_c^i - E_c^{i+1}) \quad (21)$$

เมื่อ i คือจำนวนรอบที่เพิ่มขึ้นของการพรีคอนดิชั่นนิ่ง

γ คือค่าคงที่ใดๆ

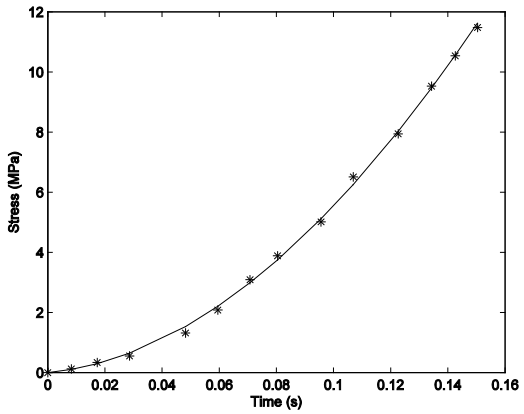
ดังนั้นสมการที่ (15) และ(18) เป็นสมการ Ordinary Differential Equation (ODE) สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของโมเดลที่สร้างขึ้นและจะสามารถอธิบายกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งได้ด้วยการนำสมการ (19),(20) และ(21) มาประยุกต์ใช้ด้วยกัน โดยกำหนดสภาวะแรงของวงรอบให้แก่โมเดลดังนี้

$$\varepsilon(t) \begin{cases} bt - (2i-2)bt_0 \; for \; (2i-2)t_0 \le t < (2i-1)t_0 \\ -bt + (2i)bt_0 \; for \; (2i-1)t_0 < \; t \; (2i)t_0 \end{cases}$$

เมื่อ b และ t_0 เป็นค่าคงที่

4. การหาค่าตัวแปรในแบบจำลอง

จากสมการ (15) และ (18) จะสามารถหาผลเฉลยของระบบ ODE ได้ด้วยโปรแกรม Matlab ซึ่งพบว่ามีพารามิเตอร์ทั้งหมดดังนี้ E_c , E_m , E_f, $\dot{\varepsilon}$, η, α, β โดยจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง [2] สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์บางค่าได้ดังนี้ E_c=13 MPa E_m =130.4 MPa E_f = 3536 MPa และ η = 1944 MPa.s จากนั้นจึงใช้โปรแกรม Matlab ทำการ Curve fitting กับผลการทดลองซึ่งดำเนินการทดลองภายใต้ค่าอัตราความเครียดเป็น 0.23/sec ซึ่งใช้เส้นเอ็น Ligaments ของหนูในการทดลอง เมื่อทำการ Curve fitting แล้วจะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ที่เหลือได้คือ α = 26 และ β=0.326 ที่ R^2 = 0.9987 ดังรูปที่ 8

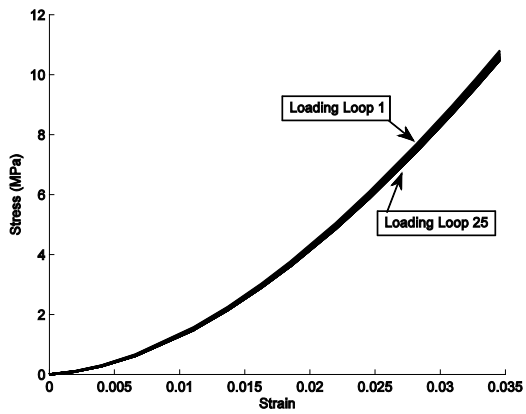


รูปที่ 8 การ Curve fitting สมการ ODE (15) (18) กับผลการทดลองเพื่อหาค่า α และ β

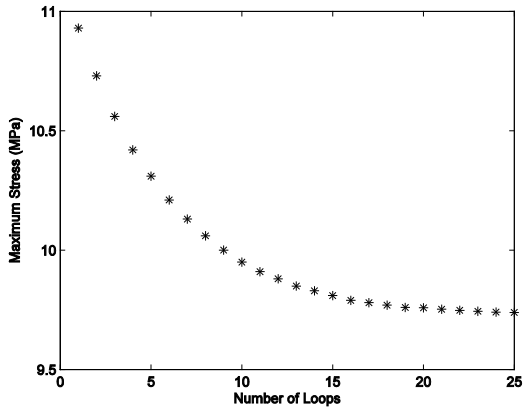
จากนั้นในขั้นตอนต่อไปจะใช้ค่าพารามิเตอร์ที่ได้มาทั้งหมด มาอธิบายการลดลงของความเค้นในแต่ละรอบของกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง รวมไปถึงอธิบายการลดลงของค่ามอดูลัสของส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ (E_c) ค่ามอดูลัสของไฟเบอร์ (E_f) และค่ามอดูลัสของเมทริกซ์ (E_m) ในแต่ละรอบของกระบวนการนี้ได้โดย ใช้ความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นในสมการที่ (19) (20) (21)

ผลการทดลอง ในงานวิจัยอ้างอิง [3] พบว่าเมื่อพรีคอนดิชั่นนิ่งเส้นเอ็น MCL ของหนูด้วย $\dot{\varepsilon}$ = 0.23/s การพรีคอนดิชั่นนิ่งจะสมบูรณ์เมื่อให้แรงซ้ำไปมาประมาณ 25 รอบ

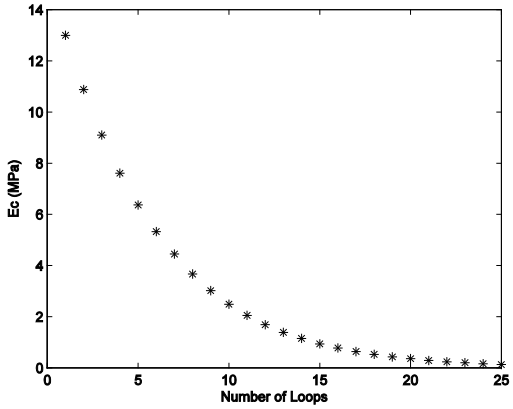
ดังนั้นเมื่อนำโมเดลที่สร้างขึ้นมาคำนวณจึงพบว่าเมื่อให้ γ=0.2 จะสามารถคำนวณหาจำนวนวงรอบของกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งที่เหมาะสมได้ประมาณ 25 รอบดังรูปที่ 9 และลักษณะการลดลงของค่าความเค้นสูงสุดในแต่ละวงรอบแสดงได้ดังรูปที่ 10



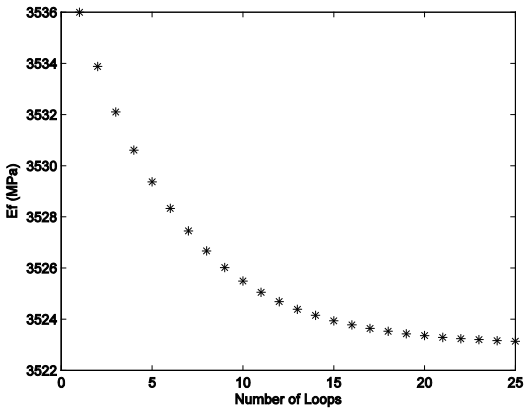
รูปที่ 9 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นความเครียดในขณะที่เส้นเอ็นรับแรงในแต่ละรอบ



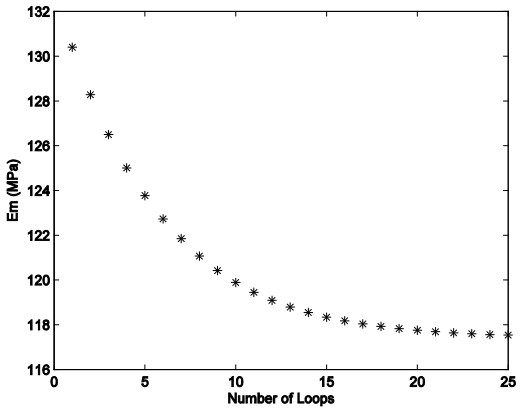
รูปที่ 10 การลดลงของความเค้นสูงสุด ในแต่ละรอบ



รูปที่ 11 การลดลงของส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ ในแต่ละรอบ



รูปที่ 12 การลดลงของค่ามอดูลัสของไฟเบอร์ ในแต่ละรอบ



รูปที่ 13 การลดลงของค่ามอดูลัสสปริงของเมทริกซ์ ในแต่ละรอบ

5. สรุปผลและวิเคราะห์ผล

จากรูปที่ 10 ซึ่งแสดงลักษณะการลดลงของความเค้นสูงสุดขณะพรีคอนดิชั่นนิ่งแสดงให้เห็นว่ามีลักษณะเป็นไปตามสมมุติฐานของงานวิจัยที่ว่าพันธะที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์จะขาดอย่างรวดเร็วในช่วงเริ่มต้นกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่ง และจะค่อย ๆขาดน้อยลงเรื่อย ๆจนกระทั่งไม่มีการขาดหรือเปลี่ยนแปลงเลยในช่วงท้ายของการพรีคอนดิชั่นนิ่ง ซึ่งส่งผลให้ค่ามอดูลัสของส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์ (E_c) จะลดลงในทุก ๆรอบของกระบวนการพรีคอนดิชั่นนิ่งดังรูปที่ 11 จนในที่สุดค่ามอดูลัสของส่วนเชื่อมต่อนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากไม่มีการขาดของพันธะเชื่อมโยงในส่วนนี้อีกต่อไป ในขณะที่ค่ามอดูลัสของไฟเบอร์ (E_f) ดังรูปที่ 12 และค่ามอดูลัสของเมทริกซ์ (E_m) ดังรูปที่ 13 จะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเริ่มพรีคอนดิชั่นนิ่ง และจะลดลงเรื่อย ๆจนมีค่าคงที่ในที่สุด ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเป็นสภาวะที่ไฟเบอร์และเมทริกซ์ต่างเป็นอิสระต่อกันหรือหมายถึงเป็นสภาวะที่ไม่มีผลกระทบ อันเนื่องมาจากแรงเสียดทานระหว่างไฟเบอร์กับเมทริกซ์นั่นเอง สมการทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นสามารถใช้เป็นแนวทางในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมเชิงโครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อในกระบวนการพรี - คอนดิชั่นนิ่งได้

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ดร.รัชดา โสภาคะยัง อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้คำแนะนำ ขอขอบคุณ มูลนิธิการศึกษาเชลล์ 100 ปี ที่ให้ทุนสนับสนุนงานวิจัยนี้ รวมไปถึงขอบพระคุณคณาจารย์และเจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลมหาวิทยาลัยอุบลราชธานีทุกท่าน ขอขอบพระคุณบิดา มารดาของข้าพเจ้า ที่ให้ได้มีข้าพเจ้าในทุกวันนี้ และขอขอบพระคุณทุกๆ ท่านที่คอยช่วยเหลือที่มิอาจเอ่ยนามมาได้ทั้งหมดในที่นี้

7. เอกสารอ้างอิง

[1] R.Sopakayang,(2013). A New Viscoelastic Model for Preconditioning in Ligaments and Tendons, *Proceedings of the World Congress on Engineering* Vol III, WCE 2013,July 3-5,London, United Kingdom.

[2] R.Sopakayang, R.De Vita, AlbertKwansa and Joseph W.Freeman. (2012). Elastic and viscoelastic properties of a type I collagen fiber, *Journal of Theoretical Biology* 293 197–205.

[3] Y.Goulam Houssen, I.Gusachenko, M. C. Schanne-Klein and J. M. Allain, (2011). Monitoring micrometer-scale collagen organization in rat-tail tendon upon mechanical strain using second harmonic microscopy, *Journal of Biomechanics 44*, 2047-52.

[4] J.J. Elias S. Kilambi and W.J. Ciccone, (2009) *Tension Level during Preconditioning Influences Hamstring Tendon Graft Properties*, Am J Sports Med. 2009 Feb;37(2):334-8.

[5] Z. Liu and K. Yeung, (2008) *The Preconditioning and Stress Relaxation of Skin Tissue*, Journal of Biomedical & Pharmaceutical Engineering 2:1 22-28

[6] E. Maeda, Julia C. Shelton, Dan L. Bader and David A. Lee, (2007) *Time dependence of cyclic tensile strain on collagen production tendon fascicles*, Biochemical and Biophysical Research Communications 362 399–404.

[7] Vinton W. T. Cheng and Hazel R. C. Screen, (2007) *The micro-structural strain response of tendon*, J Mater Sci 42:8957–8965.

[8] R. De Vita and W. S. Slaughter, (2006) A *structural constitutive model for the strain rate-dependent behavior of anterior circulate ligaments*, International Journal of Solids and Structures, 43 1561-1570

[9] Frederick H. Silver, Joseph W. Freeman, and Gurinder P.Seehra, (2003). Collagen self-assembly and the development of tendon mechanical properties, *Journal of Biomechanics 36* 1529–1553.

[10]. Irene J. Beverley and Chad M. Landis, (1999) *Shear-lag model for failure simulations of unidirectional composites including matrix stainless*, Mechanics of Materials 31 331-350.

[11] Irene J. Beyerlein and S. Leigh Phoenix, (1997) *Stress Profiles and Energy Release Rates Around Fiber Break in a laminar with Propagating zones of matrix yielding,* Composites Science and Technology 51(1997) 869-885

.