

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อ

A Mathematical Model of Relaxation in Ligaments and Tendons

นายนครินทร์ คำฟู^{1*}, ดร.รัชดา โสภาคะยัง²

¹ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี ตำบลเมืองศรีโค อำเภวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี 34190

² ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี ตำบลเมืองศรีโค อำเภวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี 34190

* ติดต่อ: E-mail kumna_bob@hotmail.com, เบอร์โทรศัพท์ 08-10695920

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างความเข้าใจเชิงลึกถึงพฤติกรรมทางโครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อขณะคลายความเค้น โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จำลองพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นข้อต่อขณะคลายความเค้น ซึ่งเป็นงานวิจัยต่อเนื่อง [8] ตัวแปรในแบบจำลองที่สร้างขึ้นนี้มีความสัมพันธ์โดยตรงต่อการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างภายในของเอ็นข้อต่อ ซึ่งนำไปสู่ความเข้าใจถึงโครงสร้างหลักที่มีบทบาทสำคัญในการตอบสนองเชิงกลขณะเกิดการคลายความเค้น

โครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อประกอบไปด้วยการรวมกันของเส้นไฟเบอร์มากมายซึ่งเรียงตัวไปในทิศทางเดียวกัน โดยไฟเบอร์เหล่านี้ถูกล้อมรอบไว้ด้วยเมทริกซ์ ซึ่งประกอบไปด้วย น้ำ และ ไขมัน เป็นต้น นอกจากนี้เส้นไฟเบอร์แต่ละเส้นยังประกอบไปด้วยการรวมตัวกันของเส้นไฟเบอร์ในขณะที่เส้นไฟเบอร์แต่ละเส้นประกอบด้วยส่วนที่เล็กที่สุดคือ โมเลกุลของโคลาเจน งานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยมีสมมุติฐานว่า โครงสร้างหลักที่ตอบสนองต่อการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อคือเส้นไฟเบอร์ เมทริกซ์รอบๆไฟเบอร์ และตัวเชื่อมต่อนานหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์ ซึ่งเส้นไฟเบอร์แต่ละตัวเชื่อมต่อนานหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์ แต่ละเส้นถูกสมมุติให้มีพฤติกรรมตอบสนองต่อแรงเชิงกลเป็นแบบอิลาสติกเชิงเส้นและถูกจำลองด้วยสปริงซึ่งมีค่า โมดูลัสความยืดหยุ่นคงที่ ในขณะที่เมทริกซ์มีการตอบสนองต่อแรงเชิงกลเป็นแบบวิสโคอิลาสติก และถูกจำลองด้วยสปริงและตัวหน่วง จากการประมวลค่าพบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นสามารถอธิบาย พฤติกรรมเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างของไฟเบอร์ เมทริกซ์รอบๆไฟเบอร์และตัวเชื่อมต่อนานหว่างไฟเบอร์และเมทริกซ์ขณะเกิดการคลายความเค้นได้

คำหลัก: แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, วิสโคอิลาสติก, อิลาสติก, เส้นเอ็นข้อต่อ, การคลายความเค้น

Abstract

This research aimed to study the behavior of the structural changes of relaxation in ligaments and tendons under stress relaxation phenomenon by using a mathematical model. The variables in the model are directly related the internal structures of ligaments and tendons which lead to a better understanding of the main structures playing the role on the stress relaxation. Ligaments and tendons are composed of a bundle of fibers aligned in the same direction. They are embedded in the matrix, which consists of water and lipid. Each fiber is composed of a bundle of fibrils. Each fibril is composed of several micro-fibrils and each micro-fibril is built of collagen molecules. The mathematical model is created on the

BME-176

assumption that the main structures playing the role on stress relaxation in ligaments and tendons are fibers, the matrix around fibers and cross-links between the fibers and the matrix. Each fiber and each cross-link are modeled as a linear elastic spring with a constant modulus of elasticity. The matrix is modeled as a viscoelastic component which consists of a spring and a dashpot. Finally, the mathematical model can describe the structural changes of fibers, the matrix and cross-links between the fibers and the matrix under stress relaxation phenomenon.

Keywords: Mathematical model , Viscoelastic, Elastic, Ligaments and tendons, Stress relaxation

1. บทนำ

การเคลื่อนที่ของร่างกายในกิจกรรมต่างๆ รวมไปถึงกิจกรรมด้านกีฬา ไม่ว่าจะเป็นการเดิน วิ่ง หรือหนึ่ง เส้นเอ็นข้อต่อ ซึ่งหมายถึงเส้นเอ็นที่เชื่อมต่อระหว่างกระดูกกับกระดูก (Ligaments) และเส้นเอ็นที่เชื่อมต่อระหว่างกล้ามเนื้อเนื้อกับกระดูก (Tendons) จะมีหน้าที่รับและถ่ายโอนแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากกิจกรรมดังกล่าว ดังนั้นการเข้าใจการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้าง ของเส้นเอ็นขณะรับแรง เชิงกลในสภาวะต่างๆ จึงมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการหลีกเลี่ยงการเกิดการฉีกขาดหรือ ความเสียหายของเส้นเอ็น รวมไปถึงนำไปสู่การพัฒนาเพื่อสร้างวัสดุทดแทนเพื่อใช้แทนเส้นเอ็นอีกด้วย

ดังนั้นจุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้คือการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นขณะรับแรงเชิงกลโดยมุ่งเน้น ศึกษาเฉพาะกรณีของปรากฏการณ์การคลายความเค้น (Stress relaxation)

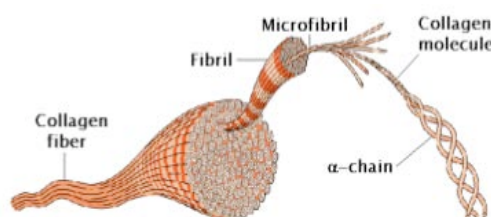
การคลายความเค้น จะเกิดขึ้นเมื่อชิ้นงานถูกดึงให้ยืดออกด้วยอัตราการยืดค่าหนึ่ง แล้วตรึงไว้ที่ระยะยืดค่าใดค่าหนึ่งเป็นเวลานาน ซึ่งจะพบว่าเมื่อเวลาผ่านไปความเค้นในการดึงชิ้นงานจะลดลงจนเข้าสู่ค่าคงที่ใดๆ กิจกรรมชีวิตประจำวันซึ่งอาจทำให้เกิดการคลายความเค้นในเส้นเอ็น เช่น การงอ หรือพับหัวเข่าหรือข้อศอกเป็นเวลานาน เช่น การเล่นโยคะ เป็นต้น ดังนั้นงานวิจัยนี้ทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเส้นเอ็นข้อต่อ เพื่ออธิบายการคลายความเค้น เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างวัสดุทดแทนเส้นเอ็นที่มีคุณสมบัติและโครงสร้างใกล้เคียงกับเส้น

เอ็นในร่างกายมนุษย์ โดย ตัวแปรในแบบจำลองคณิตศาสตร์จะสัมพันธ์โดยตรงกับคุณสมบัติทางกายภาพของโครงสร้างภายในของเส้นเอ็น ซึ่งผลการคำนวณที่ได้จากสมการทางคณิตศาสตร์ จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ที่ได้จากงานวิจัยอ้างอิง [1] เพื่อพิสูจน์ความแม่นยำของสมการทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 โครงสร้างเส้นเอ็นข้อต่อ

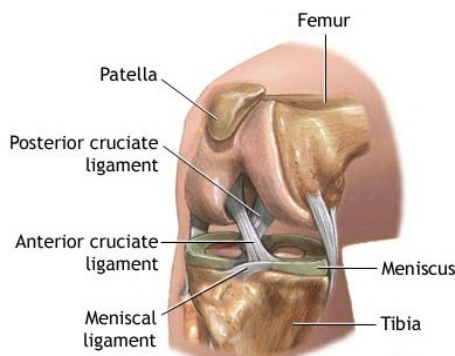
ดังแสดงในรูปที่ 1 โครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อ ประกอบไปด้วยการรวมกันของเส้นไฟเบอร์ ของคอลลาเจน (Collagen fiber) มากมายซึ่งเรียงตัวไปในทิศทางเดียวกัน โดยไฟเบอร์เหล่านี้ถูกล้อมรอบไว้ด้วยเมทริกซ์ ซึ่งประกอบไปด้วย น้ำ และ ไขมัน เป็นต้น นอกจากนี้เส้นไฟเบอร์แต่ละเส้นยังประกอบไปด้วยการรวมตัวกันของเส้นไฟบิวร์ ในขณะที่เส้นไฟบิวร์แต่ละเส้นประกอบด้วยการรวมตัวกันของเส้นไมโครไฟบิวร์ (Microfibril) และเส้นไมโครไฟบิวร์แต่ละเส้นจะประกอบด้วยส่วนที่เล็กที่สุดคือ โมเลกุลของคอลลาเจน (Collagen molecule)



รูปที่ 1 โครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อ [2,5]

ตัวอย่างของเส้นเอ็นข้อต่อระหว่างกระดูกกับกระดูกที่ข้อต่อหัวเข่าแสดงในรูปที่ 2

BME-176



รูปที่ 2 เส้นเอ็นเชื่อมต่อกับกระดูกกับกระดูกของข้อต่อหัวเข่า [7]

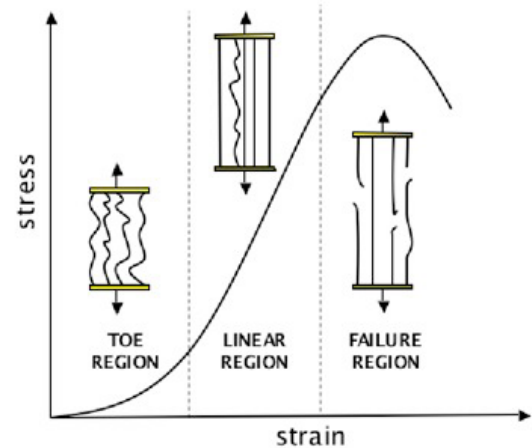
ตัวอย่างของเส้นเอ็นข้อต่อระหว่างกล้ามเนื้อกับกระดูก แสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 เส้นเอ็นเชื่อมต่อกับกล้ามเนื้อกับกระดูกของกล้ามเนื้อขา [7]

2.2 พฤติกรรมอีลาสติก (Elastic) ของเส้นเอ็นข้อต่อ

เมื่อเส้นเอ็นข้อต่อรับแรงดึงจะสามารถแบ่งช่วงการรับแรงที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างของเส้นเอ็นได้เป็น 3 ช่วง แสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 ช่วงการรับแรงของเส้นเอ็นข้อต่อ [2]

ช่วงการรับแรงประกอบไปด้วย

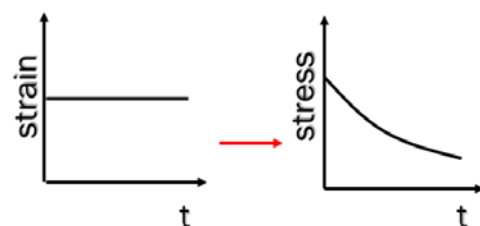
1. ช่วงเริ่มต้น (Toe region) เป็นช่วงที่เส้นไฟเบอร์บางเส้นในเส้นเอ็น เริ่มมีการรับแรง แต่เส้นไฟเบอร์ส่วนใหญ่จะมีลักษณะที่ย่อนยานยังไม่รับแรงและจะเริ่มรับแรงที่ระยะยืดของเส้นเอ็นข้อต่อ
2. ช่วงรับแรงแบบเชิงเส้น (Linear region) เป็นช่วงที่เส้นไฟเบอร์ไฟเบอร์ส่วนมากมารับแรงและจะเริ่มตึงขึ้นเรื่อยๆตามแรงที่รับ
3. ช่วงการขาด (Failure region) เป็นช่วงที่เส้นไฟเบอร์บางเส้นเริ่มขาดไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดเสียหายของเส้นเอ็น

2.3 พฤติกรรมวิสโคอีลาสติก (Viscoelastic) ของเส้นเอ็นข้อต่อ

พฤติกรรมที่บ่งบอกถึงความเป็นวิสโคอีลาสติกของเส้นเอ็น โดยทั่วไปมี 3 พฤติกรรมดังนี้ คือ

2.3.1 การคลายความเค้น (Stress relaxation)

เมื่อเส้นเอ็นข้อต่อถูกตรึงไว้ที่ค่าความยาวหรือความเครียดคงที่ค่าหนึ่ง ความเค้นที่กระทำต่อเส้นเอ็นจะมีค่าลดลงเรื่อยๆเมื่อเวลาผ่านไป ดังแสดงในรูปที่ 5

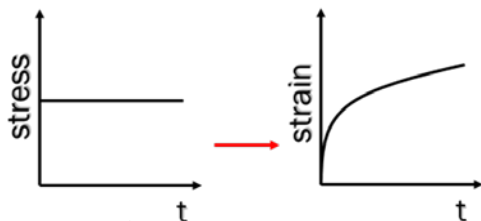


รูปที่ 5 พฤติกรรมการคลายความเค้น

BME-176

2.3.2 การคืบ (Creep)

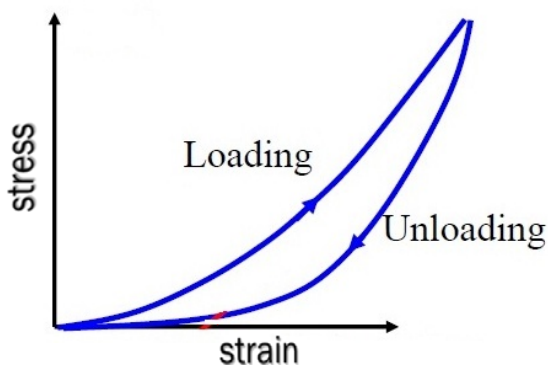
เมื่อเส้นเอ็นข้อต่อถูกกระทำด้วยแรงหรือความเค้นคงที่ค่าหนึ่ง ความยาวหรือความเครียดของเส้นเอ็น จะค่อยๆเพิ่มขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 พฤติกรรมการคืบ

2.3.3 ฮิสเตอร์รีซิส (Loop Hysteresis)

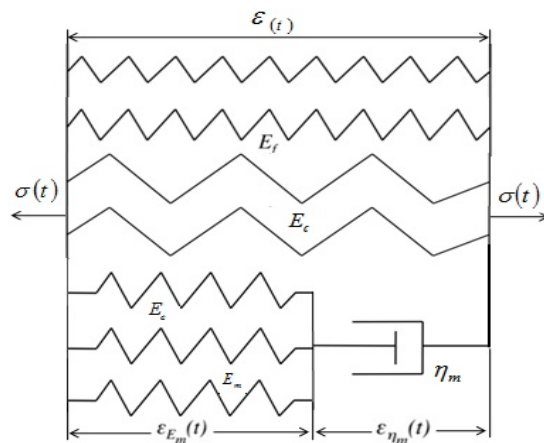
เมื่อเส้นเอ็นข้อต่อรับแรงแบบวงรอบ (ดิ่งขึ้น (Loading) แล้วปล่อยกลับ (Unloading)) จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของเส้นเอ็นได้ดังรูปที่ 7 โดยเส้นกราฟของการดิ่งขึ้นและปล่อยกลับจะไม่ใช้เส้นเดียวกัน พื้นที่ส่วนต่างของเส้นกราฟทั้งสองนี้ เรียกว่า ฮิสเตอร์รีซิส ซึ่งบ่งบอกถึงการสูญเสียพลังงานเมื่อเส้นเอ็นรับแรงแบบวงรอบ



รูปที่ 7 พฤติกรรมฮิสเตอร์รีซิส

3. แบบจำลองและสมการทางคณิตศาสตร์

จากโครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น งานวิจัยนี้จึงได้สร้างแบบจำลองทางวิ斯科ลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อซึ่งเลียนแบบโครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อ ซึ่งเป็นงานวิจัยต่อเนื่อง [8] ดังแสดงในรูปที่ 8



รูปที่ 8 แบบจำลองทางวิ斯科ลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อ

แบบจำลองที่สร้างขึ้น จำลองเส้นไฟเบอร์แต่ละเส้นเป็นสปริง ที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นคงที่ (E_f) โดยเส้นไฟเบอร์เหล่านี้จะค่อยๆ รับแรงที่ความเครียดที่ต่างกันเมื่อเส้นเอ็นถูกดึงให้ยืดออกและงานวิจัยนี้ได้ใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability function) มาใช้อธิบายการรับแรงของไฟเบอร์เหล่านี้ โดยเลือกใช้ฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential distribution function) เมตริกส์รอบไฟเบอร์ถูกจำลองด้วยสปริงแต่ละตัวที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นคงที่ (E_m) ซึ่งสปริงเหล่านี้เชื่อมอยู่กับตัวหน่วงที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดคงที่ (η_m) ในขณะที่ตัวเชื่อมระหว่างไฟเบอร์และ

เมตริกส์ถูกจำลองด้วยสปริง 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่ต่อขนานกับสปริงไฟเบอร์กับกลุ่มที่ต่อขนานกับสปริงเมตริกส์ โดยกำหนดให้สปริงแต่ละเส้นของทั้ง 2 กลุ่มมีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นคงที่ (E_c)

เมื่อเส้นเอ็นถูกยืดออก จะพบว่าตัวเชื่อมระหว่างไฟเบอร์และเมตริกส์จะค่อย ๆ ขาดออกจากกัน ดังนั้นจึงใช้ฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอกซ์โพเนนเชียล อธิบายการขาดออกจากกันของสปริงที่ใช้แทนตัวเชื่อมนี้

แบบจำลองทางวิ斯科ลาสติกนี้สามารถสร้างเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้โดยเริ่มจากการสร้างสมการของความเค้นรวมทั้งหมด ($\sigma(t)$) ซึ่งมีค่าเท่ากับความเค้นของส่วนประกอบทั้งหมดในแบบจำลอง ดังนี้

BME-176

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + \sigma_{c,f}(t) + \sigma_{c,m}(t) + \sigma_m(t) \quad (1)$$

โดยที่

$$\sigma_{c,m}(t) + \sigma_m(t) = \sigma_\eta(t) \quad (2)$$

เมื่อ

$\sigma_f(t)$ คือ ค่าความเค้นทั้งหมดของไฟเบอร์

$\sigma_{c,f}(t)$ คือ ค่าความเค้นของตัวเชื่อมโยงระหว่างไฟเบอร์กับเมตริกซ์ ซึ่งติดอยู่กับไฟเบอร์

$\sigma_{c,m}(t)$ คือ ค่าความเค้นของตัวเชื่อมโยงระหว่างไฟเบอร์กับเมตริกซ์ ซึ่งติดอยู่กับเมตริกซ์

$\sigma_m(t)$ คือ ค่าความเค้นของสปริงในเมตริกซ์

$\sigma_\eta(t)$ คือ ค่าความเค้นตัวหน่วงในเมตริกซ์

สมการค่าความเครียดทั้งหมด คือ

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_f(t) = \varepsilon_{c,f}(t) = \varepsilon_{c,m}(t) + \varepsilon_\eta(t) \quad (3)$$

$\varepsilon(t)$ คือ ค่าความเครียดทั้งหมดของเส้นเอ็น

$\varepsilon_f(t)$ คือ ค่าความเครียดของไฟเบอร์

$\varepsilon_{c,f}(t)$ คือ ค่าความเครียดของตัวเชื่อมโยงระหว่างไฟเบอร์กับเมตริกซ์ ซึ่งติดอยู่กับไฟเบอร์

$\varepsilon_{c,m}(t)$ คือ ค่าความเครียดของตัวเชื่อมโยงระหว่างไฟเบอร์กับเมตริกซ์ ซึ่งติดอยู่กับเมตริกซ์

$\varepsilon_\eta(t)$ คือ ค่าความเครียดของตัวหน่วงในเมตริกซ์

การตอบสนองที่เกิดขึ้นจากโครงสร้างภายในของการรับแรงของไฟเบอร์โดยสามารถเขียนสมการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้ดังนี้ โดยกำหนดให้ $\varepsilon \geq \varepsilon_s$ ดังนี้

$$\sigma_f(t) = \int_0^{\varepsilon(t)} E_f(\varepsilon(t) - \varepsilon_s) p(\varepsilon_s) d\varepsilon_s \quad (4)$$

เมื่อ ε_s คือ ค่าความเครียดของของไฟเบอร์ที่เริ่มรับแรง

ฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่อธิบายการเริ่มรับแรงของไฟเบอร์แต่ละเส้นคือ

$$p(\varepsilon_s) = \alpha e^{-\alpha \varepsilon_s} \quad (5)$$

เมื่อ α คือ ตัวแปรอัตรา (Rate parameter)

และ $\alpha > 0$

ความเค้นที่เกิดขึ้นในตัวเชื่อมโยงระหว่างไฟเบอร์กับเมตริกซ์ สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\sigma_{c,f}(t) = E_c \varepsilon_{c,f}(t) (1 - P(\varepsilon_{c,f}(t))) + E_c \int_0^{\varepsilon_{c,f}(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b, \quad (6)$$

$$\sigma_{c,m}(t) = E_c \varepsilon_{c,m}(t) (1 - P(\varepsilon_{c,m}(t))) + E_c \int_0^{\varepsilon_{c,m}(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b, \quad (7)$$

เมื่อ

$$P(\varepsilon_{c,f}) = \int_0^{\varepsilon_{c,f}} p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b = 1 - e^{-\beta \varepsilon_{c,f}} \quad (8)$$

$$P(\varepsilon_{c,m}) = \int_0^{\varepsilon_{c,m}} p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b = 1 - e^{-\beta \varepsilon_{c,m}} \quad (9)$$

เมื่อ $p(\varepsilon_b) = \beta e^{-\beta \varepsilon_b}$

β คือตัวแปรอัตรา และ $\beta > 0$

ค่าความเค้นส่วนอีลาสติกของเมตริกซ์คือ

$$\sigma_m(t) = E_m \varepsilon_m(t) \quad (10)$$

ค่าความเค้นส่วนความหนืดของเมตริกซ์คือ

$$\sigma_\eta(t) = \eta_m \varepsilon'_\eta(t) \quad (11)$$

จากสมการที่ (7), (10), (11) แทนลงในสมการที่ (2) จะได้

$$E_c \varepsilon_{c,m}(t) (1 - P(\varepsilon_{c,m}(t))) + E_c \int_0^{\varepsilon_{c,m}(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b + E_m \varepsilon_m(t) = \eta_m \varepsilon'_\eta(t) \quad (12)$$

เนื่องจาก

$\varepsilon_{c,m}(t) = \varepsilon_m(t)$ และ $\varepsilon_\eta(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_{c,m}(t)$ จากสมการที่ (3), (12) แทนค่าลงไป ได้ดังนี้

$$\varepsilon'_{c,m}(t) = \varepsilon'(t) - \frac{E_c}{\eta_m} \varepsilon_{c,m}(t) (1 - P(\varepsilon_{c,m}(t))) - \frac{E_c}{\eta_m} \int_0^{\varepsilon_{c,m}(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b - \frac{E_m}{\eta_m} \varepsilon_{c,m}(t) \quad (13)$$

เมื่อ $p(\varepsilon_b) = \beta e^{-\beta \varepsilon_b}$ และ สมการ (9) สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\varepsilon'_{c,m}(t) = \varepsilon'(t) + \frac{E_c}{\beta \eta_m} (e^{-\beta \varepsilon_{c,m}(t)} - 1) - \frac{E_m}{\eta_m} \varepsilon_{c,m}(t) \quad (14)$$

BME-176

จากสมการที่ (2),(4) และสมการที่ (6) และ $\sigma_\eta(t) = \eta_m \varepsilon'(t)$ สามารถสร้างสมการความเค้นทั้งหมด ($\sigma(t)$) ที่เกิดในเส้นเอ็น คือ

$$\sigma(t) = \int_0^{\varepsilon(t)} E_f (\varepsilon(t) - \varepsilon_s) p(\varepsilon_s) d\varepsilon_s + E_c \varepsilon(t) (1 - P(\varepsilon_{c,f}(t))) + E_c \int_0^{\varepsilon(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b + \eta_m (\varepsilon'(t) - \varepsilon'_{c,m}(t)) \quad (15)$$

นำสมการที่ (14) แทนลงในสมการที่ (15) จะได้ดังนี้

$$\sigma(t) = \int_0^{\varepsilon(t)} E_f (\varepsilon(t) - \varepsilon_s) p(\varepsilon_s) d\varepsilon_s + E_c \varepsilon(t) (1 - P(\varepsilon_{c,f}(t))) + E_c \int_0^{\varepsilon(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b + (E_m \varepsilon_{c,m}(t) - \frac{E_c}{\beta} (e^{-\beta \varepsilon_{c,m}} - 1)) \quad (16)$$

ใช้กฎของ Leibniz's ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ (16) เทียบกับเวลาได้ผลลัพธ์คือ

$$\sigma'(t) = E_f \varepsilon'(t) (1 - e^{-\alpha \varepsilon}) + E_c \varepsilon'(t) e^{-\beta \varepsilon(t)} + \varepsilon'_{c,m}(t) (E_m + \beta E_c e^{-\beta \varepsilon_{c,m}(t)}) \quad (17)$$

ดังสมการที่ (14),(17) เป็นสมการ Ordinary Differential Equation (ODE) ที่สามารถใช้วิธีทางตัวเลข (Numerical method) เพื่อหาค่า $\varepsilon_{c,m}(t)$ และ $\sigma(t)$ ได้เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับสมการ

ระบบสมการ ODE นี้ (สมการที่ 14 และ 17) สามารถใช้อธิบายลักษณะการรับแรงของเส้นเอ็นขณะรับแรงดึงสำหรับกรณีพฤติกรรมการคลายความเค้นสามารถอธิบายได้โดยการกำหนด $\varepsilon'(t) = 0$ และ $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ ลงไปในสมการที่ (14) และ (17) เมื่อ ε_0 คือค่าระดับความเครียดของเส้นเอ็นที่ถูกตรึงไว้ให้คงที่ขณะเกิดการคลายความเค้น

4. การหาค่าตัวแปรในแบบจำลองและผลการคำนวณ

เมื่อได้ผลเฉลยของสมการแล้ว นำไปเขียนโค้ดลงโปรแกรม Matlab และทำ Curve Fitting กับข้อมูลจากผลการทดลองการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อที่นำมาจากเอกสารอ้างอิง [1] เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ซึ่งจากสมการที่ (14) และ (17) ค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ต้องการทั้งสิ้นมี 6 พารามิเตอร์ คือ $\eta, E_m, E_c, E_f, \alpha, \beta$ จากสมการมี

พารามิเตอร์หลายตัวซึ่งเป็นการยากต่อการหาผลเฉลยของค่าพารามิเตอร์ได้เพียงชุดเดียว ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้ค่า E_m, E_f, α, β จากงานวิจัยที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน [3] ส่วนค่าพารามิเตอร์ที่เหลือคือ η และ E_c จะใช้เครื่องมือในโปรแกรม MATLAB ประมาณค่าโดยวิธีโดยตรงจาก Curve Fitting โดยกำหนด $\eta > 0$ และ $E_c > 0$ ค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดไว้ในเบื้องต้นคือ

$$E_m = 130.4 \text{ Mpa}$$

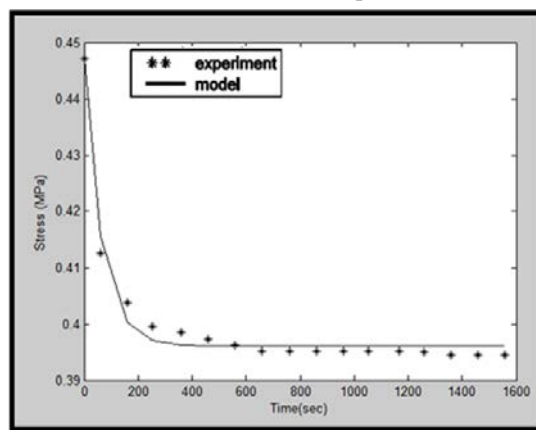
$$E_f = 3536 \text{ Mpa}, \alpha = 24.272, \beta = 0.0103$$

จากนั้นทำการ Curve Fitting ระหว่างสมการทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นกับผลการทดลองที่ระดับ

ความเครียด $\varepsilon_0 = 0.02$ ซึ่งจะทำให้หาค่าพารามิเตอร์ที่เหลือได้คือค่า

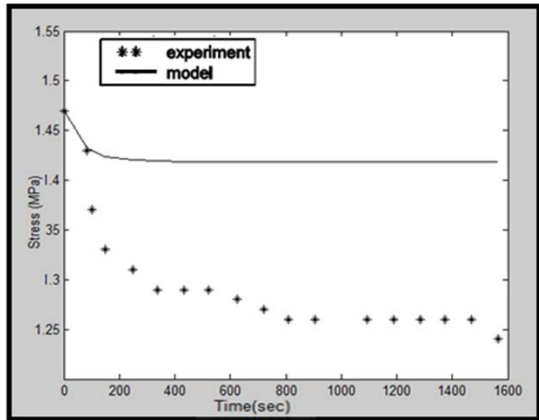
$$\eta = 8,427 \text{ Pa.s}$$

$$E_c = 0.00143 \text{ Mpa. ดังแสดงในรูปที่ 9}$$

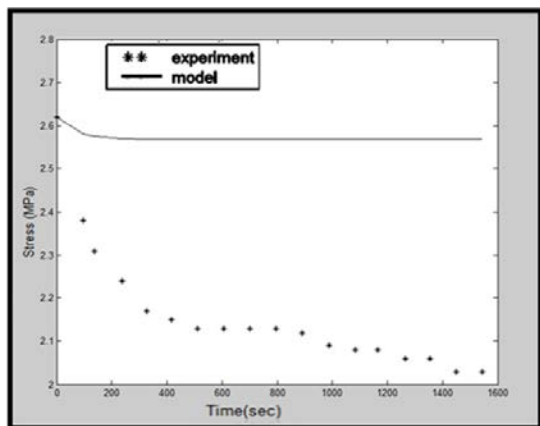


รูปที่ 9 การ Curve Fitting ที่ระดับ $\varepsilon_0 = 0.02$ เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมทั้ง 6 ตัวแล้ว นำค่าที่ได้ไปคาดการณ์ การเกิดการคลายความเค้น ณ ความเครียด $\varepsilon_0 = 0.04$ และ $\varepsilon_0 = 0.06$ และนำผลลัพธ์ที่ได้มาพล็อตกราฟเพื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ดังแสดงในรูปที่ 10 และ 11 ตามลำดับ

BME-176

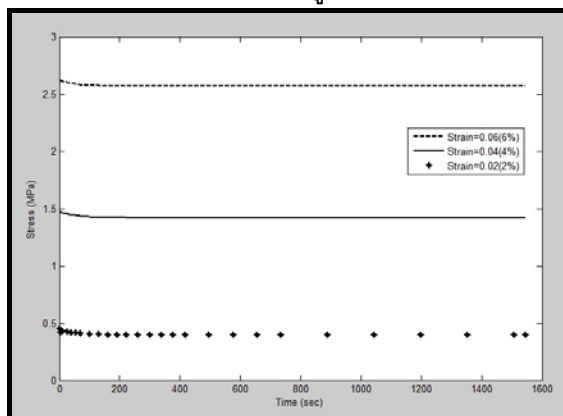


รูปที่ 10 ผลเปรียบเทียบการคลายความเค้นของผลการทดลองกับโมเดล ที่ $\varepsilon_0 = 0.04$



รูปที่ 11 ผลเปรียบเทียบการคลายความเค้นของผลการทดลองกับโมเดล ที่ $\varepsilon_0 = 0.06$

เมื่อนำผลการคำนวณของพฤติกรรมคลายความเค้นที่ระดับความเครียดทั้ง 3 ระดับมาเปรียบเทียบกันจะแสดงได้ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12 การเปรียบเทียบพฤติกรรมคลายความเค้นที่คำนวณได้จากโมเดลที่ระดับความเครียด $\varepsilon_0 = 0.02, 0.04$ และ 0.06

5.การวิเคราะห์และสรุปผล

จากผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่า

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นสามารถแสดงพฤติกรรมของการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อได้ ดังแสดงในรูปที่ 9, 10 และ 11 นอกจากนั้นเมื่อนำผลการคำนวณมาเปรียบเทียบสำหรับกรณี การคลายความเค้นที่ระดับความเครียดต่างกัน ดังแสดงในรูปที่ 12 พบว่าพฤติกรรมของการคลายความเครียดเรียงลำดับอย่างถูกต้อง คือ ที่ระดับความเครียดต่ำที่สุดคือ

$\varepsilon_0 = 0.02$ จะพบว่าระดับความเค้น ณ สภาวะสมดุลจะมีค่าน้อยที่สุดคือ 0.396 Mpa. และระยะเวลาในการเข้าสู่สมดุลของความเค้นจะมีค่าน้อยที่สุดคือ 260.3 วินาที ที่ระดับความเครียด $\varepsilon_0 = 0.04$ ระดับความเค้น ณ สภาวะสมดุลจะมีค่าเป็น 1.419 Mpa. และระยะเวลาในการเข้าสู่สภาวะสมดุลคือ 338.42 วินาที ในขณะที่ เมื่อ $\varepsilon_0 = 0.06$ ระดับความเค้น ณ สภาวะสมดุลจะมีค่ามากที่สุดเป็น 2.569 Mpa. และจะใช้เวลาในการคลายความเค้นมากที่สุด นั่นคือ 416.52 วินาที ซึ่งการคำนวณนี้สอดคล้องกับผลการทดลองที่ได้จากงานวิจัยอ้างอิง โดยจากการทดลองการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อ [1] จะเห็นว่าเมื่อทดลองคลายความเค้นที่ระดับความเครียดสูงขึ้น จะได้ค่าความเค้นสมดุลสูงขึ้นและในขณะเดียวกันเวลาในการเข้าสู่สมดุลของการคลายความเค้นที่ระดับความเครียดสูงขึ้นจะมีค่าสูงขึ้นเช่นกัน

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าแบบจำลองที่สร้างขึ้นนี้สามารถอธิบายพฤติกรรมของการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อได้ แต่ไม่สามารถที่จะคาดการณ์การเกิดการคลายความเค้นได้อย่างแม่นยำเพราะเมื่อคาดคะเนการคลายความเค้นที่ระดับความเครียดที่ (สูงขึ้น $\varepsilon_0 = 0.04$ และ $\varepsilon_0 = 0.06$) พบว่าผลการคำนวณกับผลการทดลองมีความแตกต่างกันค่อนข้างมาก โดยที่ $\varepsilon_0 = 0.04$ ความเค้นที่สภาวะสมดุลมีความแตกต่างกัน 12.06% ในขณะที่ $\varepsilon_0 = 0.06$ มีความแตกต่างกัน 20.6% ซึ่งทั้งนี้การคลายความเค้นในระดับความเครียดซึ่งอยู่ในช่วงเริ่มต้น (Toe region) และช่วงเชิงเส้น (Linear region) ยังมีความแตกต่าง เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงทาง

BME-176

โครงสร้างของเส้นเอ็นข้อต่อรวมอยู่ด้วย ดังนั้น
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะได้มีการปรับปรุง
ความแม่นยำให้มากขึ้นในอนาคต

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ดร.รัชดา โสภาคะยัง
อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้คำแนะนำ คณาจารย์และ
เจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่าน
ขอขอบพระคุณบิดา มารดาของข้าพเจ้า ที่ให้ได้มี
ข้าพเจ้าในทุกวันนี้ และขอขอบพระคุณทุกๆท่านที่
คอยช่วยเหลือที่มีอาภะเอยนามมาได้ทั้งหมดในที่นี้

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] L. E. DeFrate · G. Li , The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model, Journal of Biomechanical Model Mechanobiol, Vol 6, pp 245-251, 2006
- [2] Sopakyang, R., Vita, R. D., Kwansa, A., & Freeman, J. W. (2011). Elastic and viscoelastic properties of a type I collagen fiber, Journal of Theoretical Biology 293 (2012) 197–205.
- [3] Ratchada Sopakayang, Raffaella De Vita. (2011). A mathematical model for creep, relaxation and strain stiffening in parallel-fibered collagenous tissues, Journal of Medical Engineering & Physics, ; Vol 33(9): pp 1056-1063, 05/2011
- [4] R. Puxkandl, I. Zizak, O. Paris, J. Keckes, W. Tesch, S. Bernstor, P. Purslow, and P. Fratzl. Viscoelastic properties of collagen: Synchrotron radiation investigations and structural model. Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol 357(1418), pp 191–197 , 2002
- [5] H. S. Gupta, J. Seto, S. Krauss, P. Boesecke, and H. R. C. Screen. In situ multi-level analysis of viscoelastic deformation mechanisms in tendon collagen. Journal of

Structural Biology, Vol 169(2), pp 183-191, 2010

[6] R. De Vita and W. S. Slaughter. A structural constitutive model for the strain rate-

dependent behavior of anterior cruciate ligaments.

International Journal of Solids and

Structures, Vol 43 pp 1561-1570, 2006

[7] Simon, SR. Orthopaedic Basic Science. Ohio: American Academy of Orthopaedic Surgeons, 1994

[8] Ratchada Sopakayang, Raffaella (2011).

A New Viscoelastic Model for Preconditioning in Ligament and Tendons ,