

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานตรงที่มีการเสริมแรงด้วยวัสดุ แบบท่อนาโนคาร์บอน

Vibration analysis of straight beams with carbon nanotube-reinforcement

ประพจน์ ทศภานนท์¹, ณัฐวิทย์ วัฒนสกุลพงศ์^{1*}

¹ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

*ติดต่อ: โทรศัพท์ : (662) 9883666 ต่อ 3106 , โทรสาร : (662) 9883655 ต่อ 3106

E-mail: jj_2007j@hotmail.com, nuttawit_mut@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาและวิเคราะห์เชิงตัวเลขของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนของคานตรงที่สร้างมาจากวัสดุจำพวกพอลิเมอร์และวัสดุเสริมแรงแบบท่อนาโนคาร์บอน ซึ่งคานตรงประเภทนี้เรียกว่า คานประกอบจากวัสดุจำพวกท่อนาโนคาร์บอน ในงานวิจัยนี้ทฤษฎีที่ถูกนำมาใช้คือทฤษฎีของออยเลอร์-แบร์นูลลีเพื่อสร้างสมการควบคุมระบบของปัญหาและสมการดังกล่าวจะถูกแก้โดยใช้วิธีอะโดมียนดีคอมโพสิชัน (Adomian decomposition method) คานตรงที่นำมาพิจารณามีการเสริมแรงเป็น 4 รูปแบบหลักนั้นคือการเสริมแรงในลักษณะตัวอักษร O, X และ V รวมทั้งการเสริมแรงแบบต่อเนื่องตลอดหน้าตัด UD (Uniform Distribution of Reinforcement) ผลการวิเคราะห์จากการใช้วิธีอะโดมียนดีคอมโพสิชันจะถูกยืนยันความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบกับผลที่ได้รับจากงานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับกรณีของคานที่ไม่มีการเสริมแรงแบบใด ๆ ส่วนผลเฉลยใหม่ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนของคานแบบที่มีการเสริมแรงจะถูกนำเสนอและวิเคราะห์โดยละเอียดในงานวิจัยฉบับนี้ด้วยเช่นกัน ปัจจัยต่างๆ ที่มีอิทธิพลต่อการสั่นสะเทือนของคานเหล่านั้นยกตัวอย่างเช่นเงื่อนไขขอบเขต ลักษณะการเสริมแรง สัดส่วนของปริมาณตัวเสริมแรงภายในคานและอื่นๆ จะถูกนำมาพิจารณาเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบ

คำหลัก: ท่อนาโนคาร์บอน; การสั่นสะเทือน; ความถี่ธรรมชาติ; วิธีอะโดมียนดีคอมโพสิชัน

Abstract

The objective of this paper is to study and investigate vibration behavior of straight beams made from polymeric materials and reinforced by carbon nanotubes. The beams are called carbon nanotubes - reinforced composite (CNTRC) beams. The governing equation of motion for this problem is derived from Euler-Bernoulli beam theory and it is solved numerically using the Adomian decomposition method. The CNTRC beams having 4 different patterns of reinforcement which are the reinforcement in forms of the symbolic letters O, X and V as well as uniform distribution are considered in this present study. The numerical results obtained from the proposed method are validated by comparing with those available in the literature for the case of homogenous beams. Moreover, new frequency results of CNTRC beams are presented and discussed in detail. The significant effects of boundary conditions, types of reinforcement,

CST-34

volume fraction of carbon nanotubes and etc. which have considerable impact on the vibration results of the CNTRC beams are taken under investigation for understanding the beam behavior and well-designed.

Keywords: Carbon nanotubes; Vibration; Natural frequency; Adomian decomposition method.

1. บทนำ

วัสดุเชิงประกอบ (Composite materials) โดยส่วนใหญ่ที่พบมักทำมาจากการผสมของวัสดุหลัก จำพวกพอลิเมอร์ และมีการเสริมแรงด้วยเส้นใยแก้ว เส้นใยคาร์บอน หรือเส้นใยอื่นๆ [1] ทั้งนี้เพื่อจุดประสงค์ในการปรับปรุงคุณสมบัติของวัสดุให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นและมีความแข็งแรงต่อน้ำหนักที่ดี แต่อย่างไรก็ตามวัสดุเชิงประกอบที่กล่าวข้างต้นจำเป็นต้องใช้เส้นใยในปริมาณมากเพื่อจะได้ความแข็งแรงใช้งานของวัสดุ ปัญหาของการเสริมแรงด้วยเส้นใยมากเกินไปจะส่งผลต่อการลดลงของประสิทธิภาพในการยึดเกาะระหว่างเนื้อวัสดุหลัก และเส้นใยที่นำมาเสริมแรง [2] ดังนั้นเพื่อแก้ปัญหานี้วัสดุตัวใหม่ที่เรียกว่า ท่อนาโนคาร์บอน (Carbon nanotubes หรือ CNTs) จึงควรถูกนำมาพิจารณาเพื่อใช้แทนเส้นใยเสริมแรง ทั้งนี้ด้วยเหตุผลของคุณสมบัติเชิงกลที่ดีเลิศของท่อนาโนคาร์บอน การใช้ปริมาณเพียงน้อยนิดก็จะทำให้ได้รับความแข็งแรงใช้งานที่ดีและไม่เกิดปัญหาการยึดเกาะ [2-4]

การประยุกต์ใช้วัสดุเชิงประกอบชนิดใหม่ที่สร้างขึ้นจากวัสดุหลักที่เป็นพอลิเมอร์และเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนสามารถพบได้ในงานวิศวกรรมทั่วไปที่ต้องการโครงสร้างที่แข็งแรงและน้ำหนักเบาเช่น ชิ้นส่วนของเครื่องบิน, รถยนต์, อุปกรณ์กีฬา และอื่นๆ ณ ปัจจุบันนี้นักวิจัยทั่วโลกให้ความสนใจที่จะศึกษาพฤติกรรมของวัสดุชนิดนี้ [2-5] และโครงสร้างทางวิศวกรรมในรูปของคาน (Beams), แผ่นเรียบ (Plates), แผ่นโค้ง (Shells) ที่ทำมาจากวัสดุใหม่ดังกล่าวภายใต้การรับภาระแรงแบบต่างๆ [7],[9-10] จากการศึกษาวิจัยที่ผ่านมาพบว่าปัญหาในเรื่องพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนของคานตรงที่ทำมาจากวัสดุใหม่นี้มีอยู่อย่างจำกัดและไม่ครอบคลุมทุกสภาวะเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions)

ดังนั้นการศึกษากการสั่นสะเทือนของคานดังกล่าวในสภาวะเงื่อนไขขอบเขตที่หลากหลายจึงมีความสำคัญในการออกแบบที่ตรงกับการใช้งานมากขึ้น

ในบทความวิจัยฉบับนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาและวิเคราะห์พฤติกรรมของการสั่นสะเทือนของคานตรงที่ทำมาจากพอลิเมอร์และเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนตามทฤษฎีของออยเลอร์ -แบร์นูลลี และการประยุกต์ใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ของอะโดเมียนดีคอมโพสิชันเพื่อหาผลเฉลยของการสั่นสะเทือนของคานตรงดังกล่าวที่มีลักษณะของการเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนเป็น 4 รูปแบบหลักนั้นคือ การเสริมแรงแบบต่อเนื่องตลอดหน้าตัดคาน (Uniform Distribution of Reinforcement หรือ UD) และการเสริมแรงในลักษณะตัวอักษร O, X และ V ปัจจัยสำคัญต่างๆ ที่มีอิทธิพลต่อการสั่นสะเทือนของคานตรงนี้ยกตัวอย่างเช่นเงื่อนไขขอบเขตที่มีการรองรับแบบทั่วไปและแบบยึดหยุ่น ลักษณะและสัดส่วนของการเสริมแรง จะถูกนำมาวิเคราะห์ในงานวิจัยฉบับนี้

2. คุณสมบัติของคานตรงเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอน

คานตรงสร้างจากพอลิเมอร์และเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนที่ถูกนำมาพิจารณาในงานวิจัยฉบับนี้จะถูกแบ่งออกเป็น 4 ลักษณะใหญ่ๆ ตามที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 1(ข) จากกฎของการผสม (Rule of mixture model) จะทำให้สามารถคำนวณหาคุณสมบัติของความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) ของวัสดุชนิดนี้ได้ดังต่อไปนี้ [7-8]

$$E_{11} = \eta_1 V_{cnt} E_{11}^{cnt} + V_p E^p \quad (1)$$

โดยที่ E_{11}^{cnt}, E^p คือคุณสมบัติของความยืดหยุ่นของท่อนาโนคาร์บอน และพอลิเมอร์ตามลำดับ ในกรณีของ V_{cnt} และ V_p คือค่าสัดส่วนปริมาตรของท่อ

CST-34

นาโนคาร์บอนและพอลิเมอร์ ตามลำดับเช่นกัน ซึ่งมีความสัมพันธ์ทางปริมาตร คือ $V_{cnt} + V_p = 1$ พารามิเตอร์ η_1 คือ ค่าประสิทธิภาพของท่อนาโนคาร์บอนโดยสามารถหาได้จากวิธี MD simulation ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหา อัตราส่วนมวลของ และความหนาแน่นของวัสดุได้ตามสมการต่อไปนี้

$$v = V_{cnt} v^{cnt} + V_p v^p \quad (2)$$

$$\rho = V_{cnt} \rho^{cnt} + V_p \rho^p \quad (3)$$

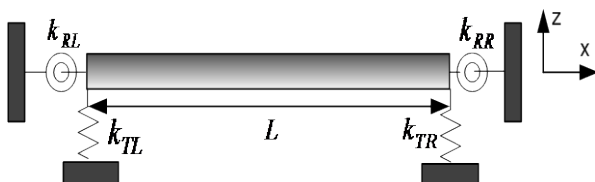
โดยที่ v^{cnt}, v^p คือ อัตราส่วนมวลของของท่อนาโนคาร์บอน และพอลิเมอร์ตามลำดับ และ ρ^{cnt}, ρ^p คือ ความหนาแน่นของวัสดุของท่อนาโนคาร์บอน และพอลิเมอร์ตามลำดับ สมการที่ใช้อธิบายการกระจายตัวของท่อนาโนคาร์บอนตลอดหน้าตัดคานใน 4 ลักษณะของการเสริมแรงสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\text{UD-Beam: } V_{cnt} = V_{cnt}^* \quad (4ก)$$

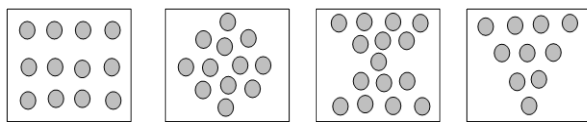
$$\text{O-Beam: } V_{cnt} = 2 \left(1 - 2 \frac{|z|}{h} \right) V_{cnt}^* \quad (4ข)$$

$$\text{X-Beam: } V_{cnt} = 4 \frac{|z|}{h} V_{cnt}^* \quad (4ค)$$

$$\text{V-Beam: } V_{cnt} = \left(1 + \frac{2z}{h} \right) V_{cnt}^* \quad (4ง)$$



(ก)



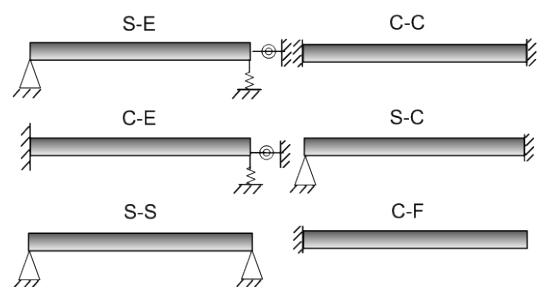
(ข)

รูปที่ 1 (ก) คานตรงที่ถูกรองรับด้วยสปริงตามแนวขวาง (Translational springs, k_{TL} and k_{TR}) และแนวต้านการหมุน (Rotational springs, k_{RL} and k_{RR})

(ข) ลักษณะของการเสริมแรงทั้ง 4 รูปแบบ

Wattanasakulpong, N and Ungbhakorn, V. [7]

สำหรับงานวิจัยฉบับนี้ได้มีการพิจารณาคานตรงกับเงื่อนไขขอบเขตหลายๆ รูปแบบโดยแต่ละแบบจะมีสัญลักษณ์เป็นอักษรในภาษาอังกฤษ 2 ตัว ตัวแรกจะบ่งบอกถึงเงื่อนไขขอบเขตของปลายคานด้านซ้าย และอีกตัวหนึ่งคือปลายคานด้านขวา ยกตัวอย่างเช่น E-E คือคานที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบยึดหยุ่น (Elastic boundary condition) ทั้งสองด้านตามรูปที่ 1(ก) สำหรับกรณีอื่นๆ จะถูกแสดงในรูปที่ 2 ประกอบด้วย Simply supported (S), Clamped (C) และ Free (F)



รูปที่ 2 คานตรงที่ถูกรองรับโดยเงื่อนไขขอบเขตแบบ S-E, C-E, S-S, C-C, S-C และ C-F

3. สมการควบคุมระบบและการประยุกต์ใช้วิธีอะโดเมียนตีคอมโพสิชัน

สมการควบคุมระบบ (Governing equation) จากทฤษฎีของออยเลอร์ -แบร์นูลลี สำหรับอธิบายพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของคานตรงที่ทำมาจากวัสดุประกอบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left(\frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \frac{d^4 W}{dx^4} = I_0 \omega^2 W \quad (5)$$

สมการที่ 5 มีที่มาจากการสมมุติให้คานถูกควบคุมไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x (Axially immovable beam) ซึ่งในสมการดังกล่าวจะประกอบขึ้นด้วยตัวแปรต่างๆ ดังนี้

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}] = \frac{E_{11}(z)}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, z, z^2] dz \quad (6)$$

$$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \quad (7)$$

โดยที่ ω คือ ความถี่ธรรมชาติ

CST-34

A_{11}, B_{11} และ D_{11} คือ ความแข็งแรงของวัสดุต่อการยืดหรือหดตามแนวแกน ความแข็งแรงผสมผสานระหว่างการดัดและการยืดหรือหด และความแข็งแรงด้านการดัด ตามลำดับ

I_0 คือ โมเมนต์ความเฉื่อย

เพื่อแก้สมการควบคุมระบบวิธีการของอะโดเมียนตีคอมโพสิชัน นับว่าเป็นวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ ซึ่งวิธีการนี้จะเหมาะกับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขขอบเขตซับซ้อนหลักการพื้นฐานของวิธีการนี้สามารถหาได้จากเอกสารของ Lai, H.Y., et al [11] และสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้ กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถนำมาเขียนได้ตามสมการต่อไปนี้

$LW(x) + RW(x) + NW(x) = 0$ เมื่อ L คือ ตัวดำเนินการของอนุพันธ์สูงสุด และ R คือ ตัวดำเนินการส่วนที่เหลือ และสุดท้าย N คือ เทอมของความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบสมการ เนื่องจาก L เป็นตัวดำเนินการที่ย้อนกลับได้ซึ่งจะเขียนได้เป็น L^{-1} ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบทั่วไปดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นสามารถเขียนได้เป็น

$W(x) = \Phi(x) - L^{-1}RW(x) - L^{-1}NW(x)$
ผลเฉลยนี้จะให้ผลเท่ากับสมการอนุกรม

ดังต่อไปนี้ $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ เมื่อ C_k คือ ค่าคงที่ใดๆที่สามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขต

จากสมการที่ (5) เราสามารถหาฟังก์ชันของการกระจัดตามแนวขวาง (w) ได้โดยการใช้วิธีอะโดเมียนตีคอมโพสิชันตามที่ได้อธิบายมาแล้ว

$$W(x) = \Phi(x) + L^{-1} \left[\frac{I_0 \omega^2}{\lambda} W(x) \right] \quad (8)$$

$$\text{โดยที่ } \lambda = \left(\frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \quad (9)$$

$$\text{และ } L^{-1} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x dx dx dx \quad (10)$$

สมการ w ที่แสดงได้ในสมการที่ (8) จะถูกแยกไปเป็นสมการอนุกรมตามรูปแบบต่อไปนี้

$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ จากความสัมพันธ์ของการเท่ากัน

เราจะได้

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \Phi(x) + L^{-1} \left[\frac{I_0 \omega^2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \right] \quad (11)$$

เมื่อ

$$\Phi(x) = W(0) + \frac{dW(0)}{dx} x + \frac{d^2W(0)}{dx^2} \frac{x^2}{2} + \frac{d^3W(0)}{dx^3} \frac{x^3}{6} \quad (12)$$

อินทิเกรตสมการที่ (11) จะได้ผลลัพธ์คือ

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = W(0) + \frac{dW(0)}{dx} x + \frac{d^2W(0)}{dx^2} \frac{x^2}{2} + \frac{d^3W(0)}{dx^3} \frac{x^3}{6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \left[\frac{I_0 \omega^2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \right] \quad (13)$$

จากสมการ (13) จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ 4 ตัวแรกของ x^k จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้น (การรองรับของคานาด้านซ้าย)

$$C_0 = W(0) \quad ; \quad C_1 = \frac{dW(0)}{dx} \quad (14)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2W(0)}{dx^2} \quad ; \quad C_3 = \frac{1}{6} \frac{d^3W(0)}{dx^3} \quad (15)$$

ส่วนค่า $C_4 \dots C_k$ สามารถหาได้จากสมการวนซ้ำดังนี้

$$C_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \sum \frac{I_0 \omega^2}{\lambda} C_{k-4} \quad (16)$$

เนื่องจากปลายคานาที่พิจารณาในงานวิจัยนี้มีการรองรับด้วยสปริงแบบตดัขวางและสปริงด้านการหมุนทั้งสองข้างของคานา เมื่อพิจารณาปลายคานาด้านซ้ายจะทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ 4 ตัวแรก ที่เป็นไปตามหลักการสมดุลของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดภายใน นั่นคือ

$$\frac{d^3W}{dx^3} + \frac{k_{TL}}{\lambda} W = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2W}{dx^2} - \frac{k_{RL}}{\lambda} \frac{dW}{dx} = 0 \quad (17)$$

ซึ่งจะทำให้ได้ค่า

$$C_0 = A_1, C_1 = A_2, C_2 = \frac{k_{RL} A_2}{2\lambda}, C_3 = -\frac{k_{TL} A_1}{6\lambda} \quad (18)$$

เพื่อสร้างสมการ $W(x)$ ที่สมบูรณ์ตามสมการ

CST-34

$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ ค่า $C_4 \dots C_k$ มีความจำเป็นที่ต้องหา
โดยใช้สมการที่ (16) ตามหลักการวนซ้ำหลังจาก
นั้นนำค่า $C_0 \dots C_k$ ที่ได้แทนค่าในสมการ

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \quad (19)$$

สมการ $W(x)$ ที่ได้รับจะถูกนำไปแทนค่าในสมการ
ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายคาน
ด้านขวาซึ่งประกอบด้วยสปริงทั้งสองแบบเช่นกัน
ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{k_{RR}}{\lambda} \frac{dW}{dx} = 0; \quad \frac{d^3 W}{dx^3} - \frac{k_{TR}}{\lambda} W = 0 \quad (20)$$

เมื่อนำ $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ แทนค่าในสมการที่ (20)

ผลลัพธ์ที่ได้จะสามารถจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ผลของค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนเรา
สามารถหาได้โดยกำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการที่ (21) มีค่าเท่ากับศูนย์
เพื่อให้ สมการของความถี่ ที่จะนำมาใช้ในการหา
คำตอบต่อไปโดยวิธีการรากของสมการความถี่ ใน
งานวิจัยฉบับนี้คำตอบที่ได้จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต
ของจตุรกรับทั้งสองแบบข้างต้น ในส่วนกรณี
เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุ่นที่มีการรองรับด้วยสปริง
ตามแนวขวาง (k_{TL}, k_{TR}) และสปริงตามแนวด้านการ
หมุน (k_{RL}, k_{RR}) ค่าคงที่ของสปริงสามารถหาจาก
สมการดังนี้

$$k_{TL} = \frac{\beta_{TL} D_0}{L^3}; \quad k_{TR} = \frac{\beta_{TR} D_0}{L^3} \quad (22ก)$$

$$k_{RL} = \frac{\beta_{RL} D_0}{L}; \quad k_{RR} = \frac{\beta_{RR} D_0}{L} \quad (22ข)$$

โดยที่

$\beta_{TL}, \beta_{TR}, \beta_{RL}, \beta_{RR}$ คือ ตัวแปรกำหนดที่
สอดคล้องกับค่าคงที่ของสปริง D_0 คือ D_{11} จาก
สมการที่ (6) โดยใช้คุณสมบัติของพอลิเมอร์ในการ
คำนวณหาค่า

การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงไว้
ข้างต้นสามารถปรับแต่งเพื่อให้ได้รับคำตอบของ
ความถี่ธรรมชาติของคานที่มีการรองรับแบบต่างๆ
ได้โดยการปรับค่าตัวแปรกำหนดของค่าคงที่ของ
สปริงเช่น Simply supported (S) ค่าคงที่ของสปริง
แนวตัดขวางควรมีค่ามากๆ ประมาณ 10^9 ในขณะที่
สปริงด้านการหมุนกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ และใน
กรณีของ Clamped (C) ค่าคงที่ของสปริงทุกตัว
จะต้องมีค่ามากๆ สุดท้ายสำหรับการรองรับแบบ
อิสระ Free (F) สามารถหาได้จากการกำหนดให้
ค่าคงที่ของสปริงทุกตัวมีค่าเป็นศูนย์

4. ผลเฉลยของปัญหาและการวิเคราะห์

4.1 การเปรียบเทียบผลเฉลยของแบบจำลอง

ในส่วนนี้เป็นการเปรียบเทียบผลเฉลยของ
ค่าความถี่ธรรมชาติคำนวณจากแบบจำลองทาง
คณิตศาสตร์ของคานตรงที่ทำมาจากพอลิเมอร์ ใน
ส่วนของคานที่มีการเสริมแรงด้วยท่อหนาโนคาร์บอน
จะถูกนำมาวิเคราะห์ในส่วนถัดไป ค่าคุณสมบัติของ
วัสดุทั้งพอลิเมอร์ (p) และ ท่อหนาโนคาร์บอน (cnt)
แสดงไว้ตามค่าต่อไปนี้ Yas, M.H. and Samadi, N.
[8]

$$\nu^p = 0.3; \rho^p = 1190 \text{ kg/m}^3; E^p = 2.5 \text{ GPa}$$

$$\nu^{cnt} = 0.19; \rho^{cnt} = 1400 \text{ kg/m}^3; E_{11}^{cnt} = 600 \text{ GPa}$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุ่นทั้งสองปลาย
คานคือ กรณี E-E สำหรับพารามิเตอร์ของค่าคงที่
สปริงที่ใช้ในเงื่อนไขดังกล่าวมีค่าต่อไปนี้ $\beta_{TL} = \beta_{TR}$
เท่ากับ 10 และ $\beta_{RL} = \beta_{RR}$ เท่ากับ 10 ตามการ
วิเคราะห์ของ Lai, H.Y., et al [11] นอกจากนี้ ได้ทำ
การทดสอบการลู่เข้าของผลเฉลยจากแบบจำลอง
จากการเพิ่มขึ้นของ K เทอมในสมการ

$$W(x) = \sum_{k=0}^K C_k x^k \quad \text{ดังแสดงในตารางที่ 1}$$

โดยผลเฉลยทั้งหมดที่แสดงค่าในตารางที่ 1 คือ
ค่าความถี่ไร้มิติ (Dimensionless frequency) ดัง
แสดงได้จากสมการ

CST-34

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho_p A \omega^2 L^4}{E_p I}} \quad (23)$$

โดยที่

ρ_p คือ ความหนาแน่นพอลิเมอร์

A คือ พื้นที่หน้าตัดของคาน

ω คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ

L คือ ความยาวของคาน

E_p คือ โมดูลัสของความยืดหยุ่นของพอลิเมอร์

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน

จากผลเฉลยในตารางที่ 1 และการเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยที่ผ่านมาของ Lai, H.Y., et al [11] พบว่าให้ผลจากการเปรียบเทียบที่ถูกต้องของแบบจำลอง ดังนั้น แบบจำลองสามารถนำไปใช้วิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของคานตรงที่มีการเสริมแรงด้วยวัสดุแบบท่อนาโนคาร์บอนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ได้ต่อไป

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบผลเฉลยและศึกษา การลู่เข้าของแบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานตรงแบบ Isotropic ที่ถูกรองรับด้วยสปริง

$$(\beta_{TL} = \beta_{TR} = 10; \beta_{RL} = \beta_{RR} = 10)$$

K	E-E	S-E	C-E
	Ω	Ω	Ω
5	4.4721		
8	6.9781	5.3337	8.0311
10	4.3640	5.3337	8.0311
12	4.3628	5.0079	7.3734
15	4.3608	5.0065	7.3684
18	4.3608	5.0065	7.3694
20	4.3608	5.0065	7.3694
25	4.3608	5.0065	7.3694
[11]	4.3608	-	-

4.2 คานตรงเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบทั่วไป

คานตรงที่ทำมาจากพอลิเมอร์เสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนแบบ ต่อเนื่องตลอดหน้าตัดคาน (UD)

และการเสริมแรงในลักษณะตัวอักษร O, X และ V ดังแสดงในรูปที่ 1(ข) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่มีการรองรับแบบทั่วไป 4 แบบคือ S-S, C-C, S-C และ C-F ตัวอย่างของการรองรับแบบ S-C คือปลายคานด้านซ้ายมีการรองรับอย่างง่าย (Simply supported (S)) ส่วนด้านขวามีการยึดแน่น (Clamped (C)) การได้มาของการรองรับแบบต่าง ๆ ได้มาจากการปรับค่าคงที่ของสปริงดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

ผลเฉลยของแบบจำลองทั้งหมดสามารถแสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยผลเฉลยที่แสดงอยู่ในตารางคือค่าความถี่ไร้มิติ (Dimensionless frequency) แสดงได้ตามสมการต่อไปนี้

$$\varpi = \omega L \sqrt{\frac{I_{00}}{A_{110}}} \quad (24)$$

$$\text{โดยที่ } I_{00} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_p(z) dz$$

$$\text{และ } A_{110} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E_{11}^p(z)}{(1-\nu_p^2)} dz$$

ผลเฉลยของค่าความถี่ไร้มิติที่ได้ตามที่แสดงไว้ในตารางที่ 2 ทำให้พบว่าการเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนทั้ง 4 ลักษณะนั้น คานตรงที่มีการเสริมแรงในลักษณะตัวอักษร X ให้ค่าความถี่ธรรมชาติสูงสุดทุกเงื่อนไขขอบเขต ตามมาด้วยแบบ UD, V และ O ที่ให้ค่าต่ำสุด นอกจากนี้ปัจจัยสัดส่วนของปริมาณตัวเสริมแรงภายในคานมีผลต่อการเพิ่มขึ้นของค่าความถี่ธรรมชาติ ดังนั้น ลักษณะการเสริมแรงแบบท่อนาโนคาร์บอน และ สัดส่วนของปริมาณตัวเสริมแรงภายในคาน เป็นปัจจัยที่สำคัญต่อการออกแบบคานต่อไป

ตารางที่ 2 ผลของค่าความถี่ธรรมชาติในรูปแบบไร้มิติของคานตรงเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบทั่วไป ($L/h = 30$)

CST-34

B.C.	V_{cnt}^*	UD	O	X	V
S-S	0.12	0.5757	0.4128	0.7002	0.4760
	0.17	0.6934	0.4953	0.8439	0.5710
	0.28	0.8696	0.6195	1.0577	0.7138
C-C	0.12	1.3049	0.9357	1.5873	1.0791
	0.17	1.5718	1.1227	1.9129	1.2945
	0.28	1.9712	1.4044	2.3976	1.6180
S-C	0.12	0.8992	0.6448	1.0938	0.7436
	0.17	1.0831	0.7737	1.3182	0.8920
	0.28	1.3584	0.9678	1.6522	1.1150
C-F	0.12	0.2050	0.1470	0.2494	0.1695
	0.17	0.2470	0.1764	0.3006	0.2034
	0.28	0.3097	0.2207	0.3767	0.2542

4.3 คานตรงเสริมแรงด้วยท่อหนาโนคาร์บอน

ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุน

การสันนิษฐานของคานตรงเสริมแรงด้วยท่อหนาโนคาร์บอนทั้ง 4 ลักษณะและมีการรองรับภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุน 3 แบบคือ E-E, S-E และ C-E จะถูกนำมาพิจารณาในส่วนนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติแบบไร้มิติของคานที่มีการเสริมแรงทั้ง 4 ลักษณะ พบว่า การเสริมแรงในลักษณะตัวอักษร X มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติสูงสุดสำหรับทุกเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุนซึ่งจะคล้ายกับการวิเคราะห์ในส่วนที่ผ่านมา นอกจากนี้การเพิ่มขึ้นของปริมาณตัวเสริมแรงยังเป็นอีกปัจจัยหนึ่งในการเพิ่มขึ้นของความถี่ธรรมชาติ

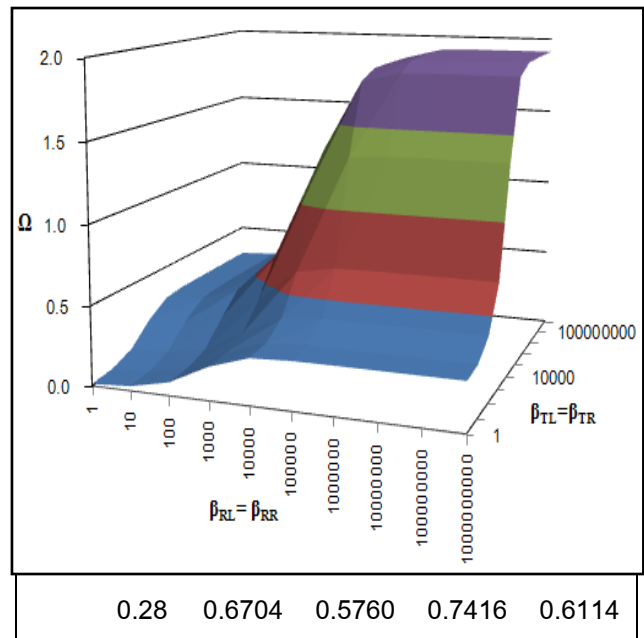
เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นเกี่ยวกับพฤติกรรม การสันนิษฐานของคานตรงภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของแบบยึดหยุนในกรณีของ E-E ตามแสดงในรูปที่ 1 จากการเพิ่มขึ้นของค่าพารามิเตอร์ของสปริงทั้งสอง ด้านของปลายคานทำให้ทราบการเปลี่ยนแปลงของความถี่ธรรมชาติตามรูปที่ 2 จากรูปสังเกตได้ว่าการ

เพิ่มขึ้นของค่าคงที่ของสปริงทั้งสองด้านของปลายคานนำไปสู่การเพิ่มขึ้นของความถี่ธรรมชาติ

ตารางที่ 3 ผลของค่าความถี่ธรรมชาติในรูปแบบไร้มิติของคานตรงเสริมแรงด้วยท่อหนาโนคาร์บอน ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุน

$$(L/h = 30; \beta_{TL} = \beta_{TR} = 10^3; \beta_{RL} = \beta_{RR} = 10^3)$$

B.C.	V_{cnt}^*	UD	O	X	V
E-E	0.12	0.4054	0.3919	0.4104	0.3987
	0.17	0.4085	0.3987	0.4120	0.4036
	0.28	0.4088	0.4023	0.4111	0.4055
S-E	0.12	0.4224	0.3854	0.4429	0.4020
	0.17	0.4405	0.4051	0.4622	0.4202
	0.28	0.4626	0.4256	0.4872	0.4404
C-E	0.12	0.5642	0.5007	0.6110	0.5262
	0.17	0.6070	0.5322	0.6638	0.5609



รูปที่ 2 ผลค่าความถี่ธรรมชาติของคานตรงที่เสริมแรงแบบตัวอักษร X ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุน

5. สรุปผล

CST-34

งานวิจัยฉบับนี้ได้นำเอาวิธีการ ของอะโดเมียนดี คอมโพสิชัน มาประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหา และ วิเคราะห์การสั่นสะเทือนคานตรงที่สร้างมาจากพอลิ เมอร์ และเสริมแรงด้วยท่อนาโนคาร์บอนในรูปแบบ ต่างๆ ภายใต้สภาวะเงื่อนไขขอบเขตแบบทั่วไปและ แบบยึดหยุ่น จากการ วิเคราะห์พบว่าคานที่เสริมแรง ตามลักษณะตัว X ให้ผลต่อการเพิ่มขึ้นของค่าความถี่ธรรมชาติสูงสุดในขณะที่การเสริมแรงแบบตัว O มี อิทธิพลต่อการเพิ่มขึ้นของค่าความถี่ธรรมชาติน้อยสุด นอกจากนี้อิทธิพลอื่นๆ เช่นปริมาณตัวเสริมแรงก็มีผล ต่อการเพิ่มขึ้นของค่าความถี่เช่นกัน ในกรณีของเงื่อนไข ขอบเขตสำหรับคานที่ถูกรองรับแบบทั่วไปเราพบว่า คานมีการยึดแน่นทั้งสองฝั่งจะให้ค่าความถี่ธรรมชาติ สูงสุดเมื่อเทียบกับกรณีอื่นๆและเมื่อกล่าวถึงการ รองรับแบบยึดหยุ่นความถี่ธรรมชาติจะเปลี่ยนแปลง ตามค่าความแข็งแรงของสปริงโดยความถี่จะเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้น

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] หฤทภาค กิรติเสวี ฉัตรชัย วีระนิตสิกุล และ อภิรัตน์ เล่าห์บุตรี (2552-2553). ภาพรวมของวัสดุเชิงประกอบ, วิศวกรรมสารมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ , 70, พฤศจิกายน 2552 – มกราคม 2553, หน้า 18 - 32.
- [2] Daniel, I.M. and Ishai, O. (2006). Engineering mechanics of composite materials, 2nd edition, Edition, Oxford University Press, USA.
- [3] Thostenson, E.T., Ren, Z.F. and Chou, T.W. (2001). Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites, *Composites Science and Technology*, vol. 61, October 2001, pp. 1899 – 1912.
- [4] Lau, K.T. and Hui, D. (2002). Effectiveness of using carbon nanotubes as nano-reinforcements for advanced composite structures, *Carbon*, vol. 40, August 2002, pp. 1605 – 1606.
- [5] Esawi, A.M.K., and Farag, M.M. (2007). Carbon nanotube reinforced composites: Potential and current challenges, *Materials and Design* vol. 28, pp. 2394 - 2401.
- [6] Wan, H., Delale, F. and Shen, L. (2005). Effect of CNT length and CNT-matrix interphase in carbon nanotube (CNT) reinforced composites, *Mechanics Research Communication* vol. 32, September-October 2005, pp. 481 - 489.
- [7] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2013). Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beam resting on elastic foundation, *Computational Materials Science*, vol. 71, pp. 201 - 208.
- [8] Yas, M.H. and Samadi, N. (2012). Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 98, October 2012, pp. 119 - 128.
- [9] Zhu, P., Lei, Z.X. and Liew, K.M. (2012). Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, vol. 94, March 2012, pp. 1450 - 1460.
- [10] Shen, H.S. (2012). Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells, *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, April 2012, pp. 1030 - 1038.
- [11] Lai, H.Y., Hsu, J.C. and Chen, C.K. (2008). An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler-Bernoulli beam by using the Adomian decomposition method, *Computers and*

CST-34

Mathematics with Applications, vol. 56, December
2008, pp. 3204 - 3220