

แผนภาพ Jamming ของหมุดคู่

Jamming Diagram of Dual Pegs

ธรรมรัตน์ กิตติพงษ์พัฒนา

ชิต เหล่าวัฒนา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์

ศูนย์ปฏิบัติการพัฒนาหุ่นยนต์ภาคสนาม-FIBO

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

ราษฎร์บูรณะ กรุงเทพฯ 10140

บทความนี้กล่าวถึง ลักษณะแผนภาพ jamming ของการสวมหมุดคู่ jamming หมายถึง การที่หมุดอยู่ใน สภาวะสมดุลเนื่องจาก ผลลัพธ์ ของแรง โมเมนต์ ที่ใช้ในการสวมหมุด และ แรงปฏิกิริยาที่กระทำกับหมุดในขณะนั้นมีผลลัพธ์เท่ากับศูนย์ โดยกล่าวถึง การวิเคราะห์รูปแบบการสัมผัส ทั้งแบบ สองจุด สามจุด และ สี่จุด แผนภาพ jamming ที่ได้จากการวิเคราะห์ดังกล่าวสามารถนำไปใช้เป็น แนวทางในการควบคุมหุ่นยนต์ประกอบชิ้นงานโดยอาศัยข้อมูลการป้อนกลับของแรงต่อไป

This paper presents a jamming diagram of dual pegs-insertion. Jamming results from static equilibrium of insertion forces, moments and reaction forces acting on pegs during an insertion process. Equations for one, two, three and four points-contact have been derived. Related forces and moments have been plotted to form a dual pegs jamming diagram. We can use this information in such a jamming diagram for successful assembly using feedback force control in robotic systems.

1. บทนำ

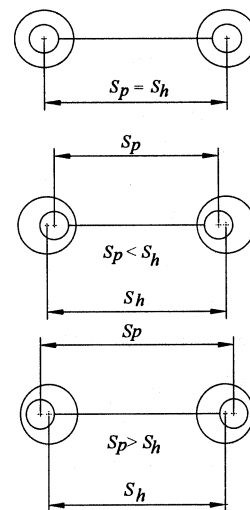
ในงานประกอบชิ้นส่วนจำเป็นอย่างยิ่งที่หุ่นยนต์จะต้องมีความอ่อนตัวซึ่งอาจเป็นทั้งข้อหมุนแต่ละข้อหรือที่ปลายแขนหุ่นยนต์ การทำให้หุ่นยนต์มีความอ่อนตัวนั้นทำได้สองวิธีคือ แบบใช้อุปกรณ์ภายนอก(passive compliance) และ แบบอาศัย สัญญาณป้อนกลับจากเครื่องมือวัด (active compliance) แบบแรกนั้นมักใช้อุปกรณ์ที่เรียกว่า RCC (Remote Center of Compliance) ยึดติดกับปลายแขนหุ่นยนต์ ส่วนแบบที่สองนั้นใช้เครื่องมือวัดซึ่งอาจติดตั้งไว้ที่ตัวหุ่นยนต์หรือบริเวณที่หุ่นยนต์ทำงาน เครื่องมือวัดจะส่งสัญญาณไปยังส่วนควบคุม เมื่อส่วนควบคุมได้รับสัญญาณ ก็จะนำสัญญาณนั้นไปเปรียบเทียบกับค่าที่ตั้งไว้แล้วส่งสัญญาณซึ่งเป็นค่าส่วนต่างไปยังหุ่นยนต์เพื่อให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่อย่างเหมาะสม

บทความนี้เสนอทฤษฎีเพื่อเป็นแนวทางในการสวมหมุดคู่ตามแบบที่สอง กล่าวคือ จะเป็นประโยชน์สำหรับการสวมหมุดโดยอาศัยข้อมูลการป้อนกลับของแรง ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งตามแนวทางที่สอง การสวมหมุดคู่ นั้น Ohwovoriole[1] ได้เคยใช้ทฤษฎีสถิตวิเคราะห์ไว้แล้วแต่ไม่ได้แสดงผลออกมาในรูปของแผนภาพ wedging และ แผนภาพ jamming นอกจากนี้ยังเคยมีผู้วิเคราะห์แผนภาพ wedging และ แผนภาพ jamming ของหมุดเดี่ยว[2] และ วิเคราะห์หมุดสาม[3]ไว้เช่นกัน

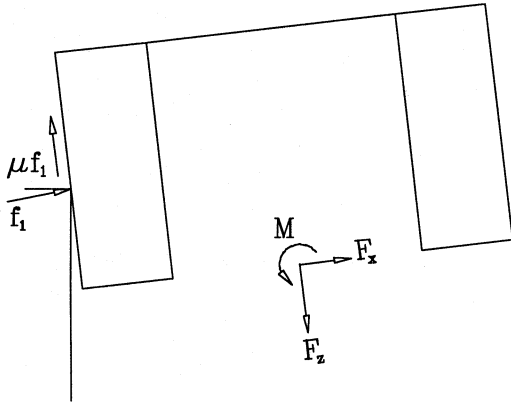
2. ทฤษฎี

เราจะเริ่มจาก การวิเคราะห์แรงที่กระทำกับ หมุดคู่เป็นกรณีไป แล้วจึงนำผลจากการวิเคราะห์ไปสร้างเป็น แผนภาพ jamming ของแต่ละกรณี เราจะแบ่งการวิเคราะห์แรงตามรูปแบบการสัมผัส รูปแบบการสัมผัสสามารถแบ่งได้ 6 รูปแบบคือ การสัมผัสหนึ่งจุด การสัมผัสสองจุดนอก การสัมผัสสองจุดใน การสัมผัสสามจุดนอก การสัมผัสสามจุดใน และการสัมผัสสี่จุด แรงที่กระทำกับหมุดคือ แรงที่ใช้สวมหมุด และ แรงปฏิกิริยา

ที่จุดสัมผัส แรงปฏิกิริยาที่จุดสัมผัสแบ่งออกเป็น แรงเสียดทาน และ แรงปฏิกิริยาดังฉาก(f) แรงที่ใช้ในการสวมหมุดจะแสดงในรูป แรงตามแนวแกน x แรงตามแนวแกน z และโมเมนต์รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบ $x-z$ (แกน y) โดยมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดกึ่งกลางของระยะระหว่างปลายหมุดทั้งสอง จุดกำเนิดนี้จะใช้เป็นจุดอ้างอิงในการวิเคราะห์แรงสำหรับการสัมผัสกรณีต่างๆต่อไป ในการคำนวณแรงลัพธ์ที่กระทำกับหมุดเราถือว่าหมุดมีการเอียง และ clearance น้อยมาก การวิเคราะห์แรงในบทความนี้เราไม่คำนึงถึงความเฉื่อยที่เกิดขึ้นในการเคลื่อนที่, ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิต μ มีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ สำหรับระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด(S_p) และรู(S_h)เป็นไปได้อย่างสามกรณีตามรูปที่ 1 หมุดมีเส้นผ่านศูนย์กลาง d , ระยะความลึกในการสวม l



รูปที่ 1 กรณีที่เป็นไปได้ของ S_p และ S_h



รูปที่ 2 แรงที่กระทำกับหมุดขณะเกิดการสัมผัสหนึ่งจุด

2.1 การสัมผัสหนึ่งจุด

ก่อนที่หมุดจะเกิดการสัมผัสในรูปแบบอื่นจะเกิดการสัมผัสหนึ่งจุดก่อน การวิเคราะห์แรงที่เกิดจากการสัมผัสหนึ่งจุดเป็นตัวกำหนดขอบเขตของแผนภาพ jamming จากรูปจะเห็นว่าเราวิเคราะห์หมุดที่เอียงด้านเดียว สำหรับการเอียงในทางตรงกันข้ามอาศัยหลักการวิเคราะห์เดียวกัน ต่างกันเพียงแต่ผลลัพธ์ที่ได้มีเครื่องหมายตรงกันข้าม การวิเคราะห์แรงสามารถทำได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 2 ประกอบ)

แรงลัพธ์ในแนวนอน x เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= F_x + f_1 = 0 \\ F_x &= -f_1 \end{aligned} \quad (1)$$

แรงลัพธ์ในแนวนอน z เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \downarrow \sum F_z &= F_z - \mu f_1 - \mu f_2 = 0 \\ F_z &= \mu f_1 \end{aligned} \quad (2)$$

นำสมการที่ (2) ไปหารกับสมการที่ (1)

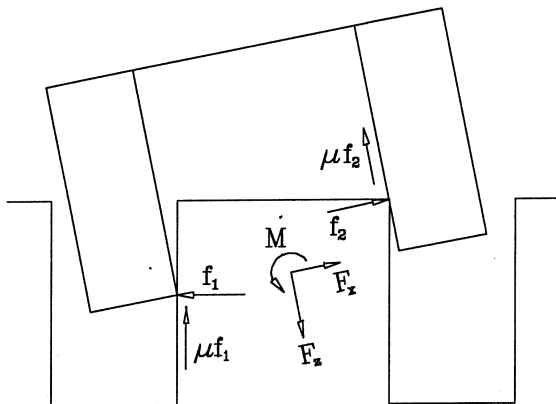
$$(1)/(2) \quad \frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{\mu} \quad (3)$$

เราสามารถทราบขอบเขตของแผนภาพ jamming ได้ด้วยการนำสมการ

(3) ไปแทนในสมการสมมูลของการสัมผัสแบบต่างๆ

2.2 การสัมผัสสองจุดใน

การสัมผัสที่เกิดจากขอบด้านในของหมุดและรูสัมผัสกัน เป็นรูปแบบการสัมผัสแบบที่สองที่อาจจะเกิดขึ้นได้ในการสวมหมุดคู่ การสัมผัสในลักษณะนี้มีความใกล้เคียงกับการสัมผัสสองจุดในหมุดเดียวกันตรงที่



รูปที่ 3 แรงที่กระทำกับหมุดขณะเกิดการสัมผัสสองจุดใน

มีพารามิเตอร์ S_p ซึ่งหมายถึง ระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด เพิ่มขึ้นมาในแผนภาพ jamming การสัมผัสแบบนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ ระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด (S_p) จะมีค่าน้อยกว่าระยะศูนย์กลางระหว่างรู (S_d) มีแรงกระทำกับหมุดคือ แรงที่ใช้สวมหมุดและแรงปฏิกิริยาที่จุดซึ่งสัมผัสกับผนังของรูสองจุด การวิเคราะห์แรงสามารถทำได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 3 ประกอบ)

แรงลัพธ์ในแนวนอน x เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= F_x - f_1 + f_2 = 0 \\ F_x &= f_1 - f_2 \end{aligned} \quad (4)$$

แรงลัพธ์ในแนวนอน z เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \downarrow \sum F_z &= F_z - \mu f_1 - \mu f_2 = 0 \\ F_z &= \mu f_1 + \mu f_2 \end{aligned} \quad (5)$$

โมเมนต์ลัพธ์ในแนวนอน y เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \sum M &= M - f_1 r_a - \mu f_1 r_b - f_2 r_c + \mu f_2 r_d = 0 \\ M &= f_1 r_a + \mu f_1 r_b + f_2 r_c - \mu f_2 r_d \end{aligned}$$

$$r_a = 0, r_b = r_d = \frac{S_p}{2} - r, r_c = l$$

$$M = \mu r f_1 + (r_c - \mu r) f_2 \quad (6)$$

นำ μ ไปคูณกับสมการที่ (4) แล้วนำผลที่ได้ไปบวกและลบกับสมการที่ (5) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$f_1 = \frac{F_z + \mu F_x}{2\mu} \quad \text{และ} \quad f_2 = \frac{F_z - \mu F_x}{2\mu}$$

แทนค่า f_1 และ f_2 ลงในสมการที่ (6) แล้วจัดรูปใหม่ ได้สมการที่ (7)

$$M = \mu r_b \left(\frac{F_z + \mu F_x}{2\mu} \right) + (r_c - \mu r) \left(\frac{F_z - \mu F_x}{2\mu} \right)$$

$$M = \left[\frac{S_p}{4} - \frac{r}{2} \right] (F_z + \mu F_x)$$

$$\left[\frac{S_p}{4} - \frac{l}{2\mu} - \frac{r}{2} \right] (F_z - \mu F_x)$$

$$A = \frac{S_p}{4} - \frac{r}{2}, B = \frac{S_p}{4} - \frac{l}{2\mu} - \frac{r}{2}$$

$$M = (A - B) F_z + \mu (A + B) F_x$$

$$\frac{M}{r F_z} = \frac{A - B}{r} + \left(\frac{\mu (A + B)}{r} \right) \frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{M}{r F_z} = \mu \left[\frac{S_p}{2r} - \frac{l}{2r\mu} - 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \frac{l}{2r\mu}$$

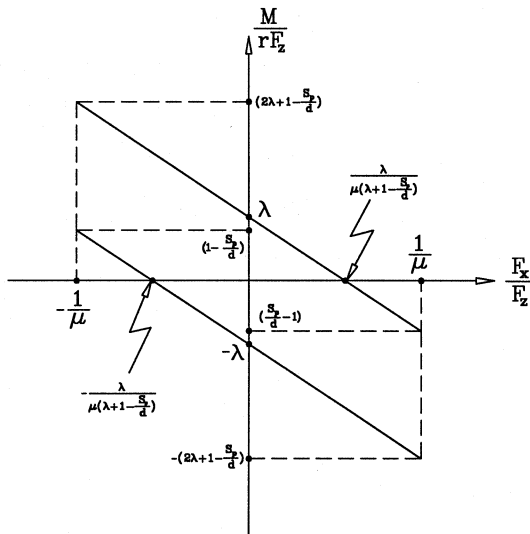
$$\frac{M}{r F_z} = \mu \left[\frac{S_p}{d} - \lambda - 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \lambda$$

$$\lambda = \frac{l}{2r\mu}$$

เราสามารถนำสมการที่ (7) ไปสร้าง แผนภาพ jamming ได้ สมการที่ (7) เป็นสมการเส้นตรง

$$y = mx + c \quad \text{โดย} \quad y = \frac{M}{r F_z}, \quad m = \mu \left[\frac{S_p}{d} - \lambda - 1 \right], \quad x = \frac{F_x}{F_z}, \quad c = \lambda$$

สำหรับสมการเส้นตรงอีกเส้นสามารถหาได้ด้วยวิธีเดียวกัน โดยการวิเคราะห์แรงที่กระทำกับหมุดซึ่งเอียงไปในทางตรงกันข้ามผลที่ได้จะมีค่า c ที่เปลี่ยนไปเป็น $c = -\lambda$ ส่วนค่าอื่นๆ ยังคงเหมือนเดิม



รูปที่ 4 แผนภาพ jamming ของการสัมผัสสองจุดใน

2.3 การสัมผัสสองจุดนอก

การสัมผัสสองจุดนอกนั้น มีความใกล้เคียงกับการสัมผัสแบบสองจุดในมาก ต่างกันที่ระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด (S_p) จะมีค่ามากกว่าระยะศูนย์กลางระหว่างรู (S_h) จึงเกิดการสัมผัสแบบนี้ ขนาดของหมุดทั้งสองมีค่าเท่ากัน มีแรงกระทำกับหมุดคือ แรงที่ใช้สวมหมุดและแรงปฏิกิริยาที่จุดซึ่งสัมผัสกับผนังของรูสองจุด จากรูปจะเห็นว่าการสวมหมุดเดียวที่มีขนาดใหญ่ขึ้นเอง เราสามารถคำนวณแรงที่กระทำกับหมุดได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 5 ประกอบ)

แรงลัพธ์ในแนวแกน x เท่ากับศูนย์

$$\rightarrow \sum F_x = F_x + f_1 - f_2 = 0$$

$$F_x = -f_1 + f_2 \quad (8)$$

แรงลัพธ์ในแนวแกน z เท่ากับศูนย์

$$\downarrow \sum F_z = F_z - \mu f_1 - \mu f_2 = 0$$

$$F_z = \mu f_1 + \mu f_2 \quad (9)$$

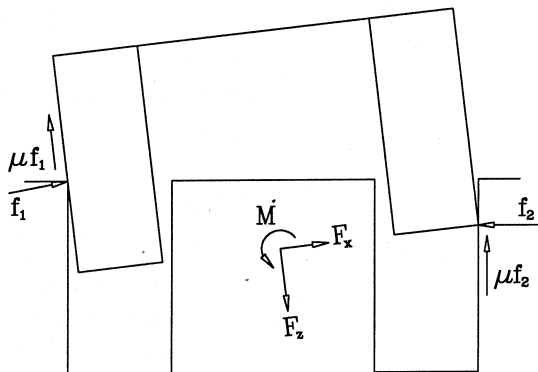
โมเมนต์ลัพธ์ในแนวแกน y เท่ากับศูนย์

$$\curvearrowleft \sum M = M - f_1 r_a - \mu f_1 r_b - \mu f_2 r_c = 0$$

$$M = f_1 r_a + \mu f_1 r_b - \mu f_2 r_c$$

$$r_a = l, r_b = r_c = \frac{S_p}{2} + r$$

$$M = (r_a + \mu r_b) f_1 - \mu r f_2 \quad (10)$$



รูปที่ 5 แสดงให้เห็นแรงที่กระทำกับหมุดขณะเกิดการสัมผัสสองจุดนอก

นำ μ ไปคูณกับสมการที่ (8) แล้วนำผลที่ได้ไปบวกและลบกับสมการที่ (9) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$f_1 = \frac{F_z - \mu F_x}{2\mu} \quad \text{และ} \quad f_2 = \frac{F_z + \mu F_x}{2\mu}$$

จากนั้นแทนค่า f_1 และ f_2 ลงในสมการ (10) แล้วจัดรูปใหม่

$$M = (r_a + \mu r_b) \left(\frac{F_z - \mu F_x}{2\mu} \right) - \mu r_c \left(\frac{F_z + \mu F_x}{2\mu} \right)$$

$$M = \left[\frac{S_p}{4} + \frac{l}{2\mu} + \frac{r}{2} \right] (F_z - \mu F_x) - \left[\frac{S_p}{4} + \frac{r}{2} \right] (F_z + \mu F_x)$$

ให้ $A = \frac{S_p}{4} + \frac{l}{2\mu} + \frac{r}{2}$, $B = \frac{S_p}{4} + \frac{r}{2}$

$$M = (A-B)F_z - \mu(A+B)F_x$$

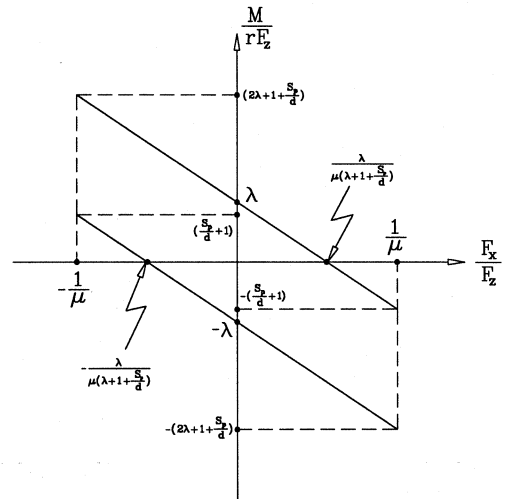
$$\frac{M}{rF_z} = \frac{A-B}{r} - \left(\frac{\mu(A+B)}{r} \right) \frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{M}{rF_z} = -\mu \left[\frac{S_p}{2r} + \frac{l}{2r\mu} + 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \frac{l}{2r\mu}$$

$$\frac{M}{rF_z} = -\mu \left[\frac{S_p}{2r} + \lambda + 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \lambda$$

$$\lambda = \frac{l}{2r\mu} \quad (11)$$

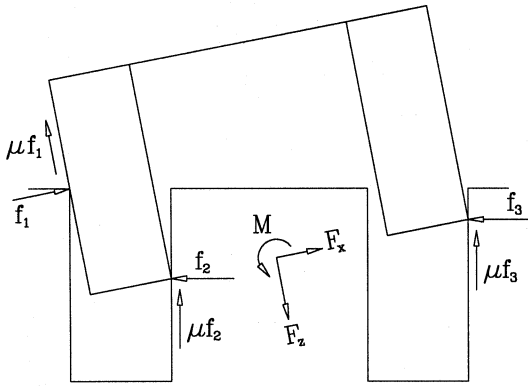
เราสามารถนำสมการที่ (11) ไปสร้าง แผนภาพ jamming ได้ ตามวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้ว



รูปที่ 6 แผนภาพ jamming ของการสัมผัสสองจุดนอก

2.4 การสัมผัสสามจุดนอก

การสัมผัสสามจุดนอกนั้น ระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด (S_p) จะมีค่ามากกว่าระยะศูนย์กลางระหว่างรู (S_h) ขนาดของหมุดทั้งสองมีค่าเท่ากัน มีแรงกระทำกับหมุดคือ แรงที่ใช้สวมหมุดและแรงปฏิกิริยาที่จุดซึ่งสัมผัสกับผนังด้านในของรูสามจุด จากรูปจะเห็นว่าแรง f_2 นานกับ f_3 และแรง μf_2 นานกับ μf_3 นั่นหมายถึงแรงอยู่ในทิศทางเดียวกันแต่มีขนาดต่างกัน ดังนั้นเราจึงสามารถกำหนดให้แรง f_3 มีค่าเป็น k เท่าของแรง f_2 หรือ $f_3 = k f_2$ เราสามารถคำนวณแรงที่กระทำกับหมุดได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 7 ประกอบ)



รูปที่ 7 แรงที่กระทำกับหมุดขณะเกิดการสัมผัสสามจุดนอก

ผลรวมของแรงตามแนวแกน x คือ

$$+\sum F_x = F_x + f_1 - f_2 - f_3 = 0$$

$$F_x = -f_1 + f_2 + f_3 = -f_1 + f_2 + kf_2$$

$$F_x = -f_1 + (1+k)f_2$$

แรงลัพธ์ในแนวแกน z เท่ากับศูนย์

$$\downarrow +\sum F_z = F_z - \mu f_1 - \mu f_2 - \mu f_3 = 0$$

$$F_z = \mu f_1 + \mu f_2 + \mu f_3 = \mu f_1 + \mu f_2 + k\mu f_2$$

$$F_z = \mu f_1 + \mu(1+k)f_2$$

(13)

โมเมนต์ลัพธ์ในแนวแกน y เท่ากับศูนย์

$$\curvearrowright +\sum M = M - f_1 r_a - \mu f_1 r_b - \mu f_2 r_c + \mu f_3 r_d = 0$$

$$M = f_1 r_a + \mu f_1 r_b + \mu f_2 r_c - \mu f_3 r_d$$

$$r_a = l, r_c = \frac{S_p}{2} - r, r_d = r_b = \frac{S_p}{2} + r$$

$$M = (r_a + \mu r_b)f_1 + \mu r_c f_2 - \mu r_d k f_2$$

$$M = (r_a + \mu r_b)f_1 + \mu(r_c - r_d k)f_2$$

(12)

(14)

นำ μ ไปคูณกับสมการที่ (12) แล้วนำผลที่ได้ไปบวกและลบกับสมการที่ (13) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$f_1 = \frac{F_z - \mu F_x}{2\mu} \quad \text{และ} \quad f_2 = \frac{F_z + \mu F_x}{2\mu(1+k)}$$

จากนั้นแทนค่า f_1 และ f_2 ลงในสมการ (14) แล้วจัดรูปใหม่

$$M = (r_a + \mu r_b)\left(\frac{F_z - \mu F_x}{2\mu}\right) + \mu(r_c - r_d k)\left(\frac{F_z + \mu F_x}{2\mu(1+k)}\right)$$

$$M = \left[\left(\frac{1-k}{1+k}\right)\frac{S_p}{4} - \frac{r}{2}\right](F_z + \mu F_x)$$

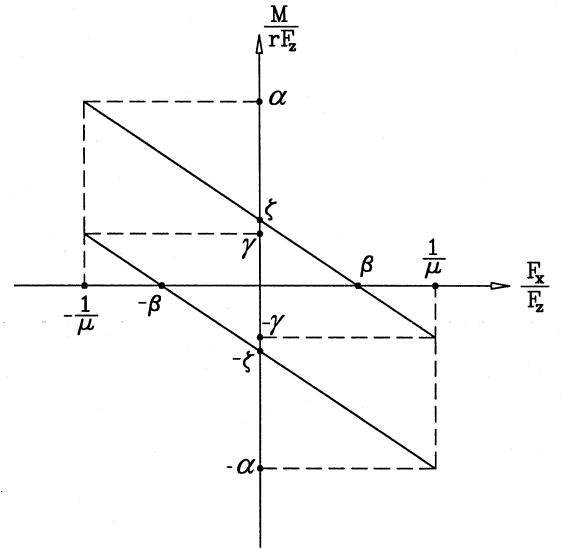
$$+ \left(\frac{l}{2\mu} + \frac{S_p}{4} + \frac{r}{2}\right)(F_z - \mu F_x)$$

$$A = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)\frac{S_p}{4} - \frac{r}{2}, \quad B = \frac{l}{2\mu} + \frac{S_p}{4} + \frac{r}{2}$$

$$M = (A+B)F_z + \mu(A-B)F_x$$

$$\frac{M}{rF_z} = \frac{A+B}{r} + \left(\frac{\mu(A-B)}{r}\right)\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{M}{rF_z} = -\mu \left[\left(\frac{2k}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \frac{l}{2r\mu} + 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \left[\left(\frac{2}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \frac{l}{2r\mu} \right]$$



รูปที่ 8 แผนภาพ jamming ของการสัมผัสสามจุดนอก

$$\alpha = \frac{S_p}{d} + 2\lambda + 1, \quad \gamma = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)\frac{S_p}{d} + 1$$

$$\zeta = \left(\frac{2}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \lambda, \quad \beta = -\frac{\left(\frac{2}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \lambda}{\mu \left[\left(\frac{2k}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \lambda + 1 \right]}$$

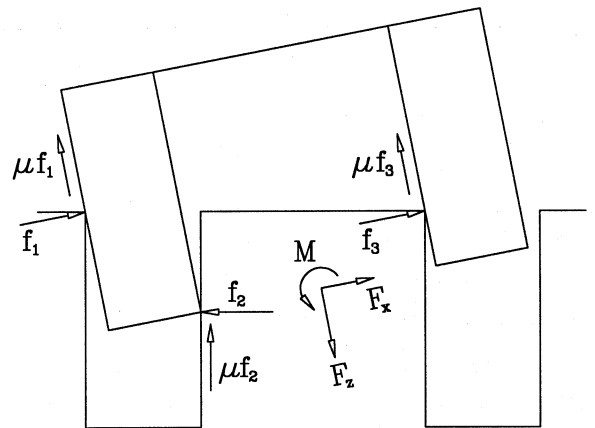
$$\frac{M}{rF_z} = -\mu \left[\left(\frac{2k}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \lambda + 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \left[\left(\frac{2}{1+k}\right)\frac{S_p}{4r} + \lambda \right] \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{l}{2r\mu}$$

เราสามารถนำสมการ (15) ไปสร้างแผนภาพ jamming ได้ดังแสดงในรูปที่ 8

2.5 การสัมผัสสามจุดใน

การสัมผัสสามจุดในนั้น ระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด(S_p)จะมีค่าน้อยกว่าระยะศูนย์กลางระหว่างรู(S_h) ขนาดของหมุดทั้งสองมีค่าเท่ากัน มีแรงกระทำกับหมุดคือ แรงที่ใช้สวมหมุดและแรงปฏิกิริยาที่จุดซึ่งสัมผัสกับผนังด้านในของรูสามจุด จากรูปจะเห็นว่าแรง f_1 ขนานกับ f_3 และ แรง μf_1 ขนานกับ μf_3 นั้นหมายถึงแรงอยู่ในทิศทางเดียวกันแต่มีขนาดต่างกัน ดังนั้นเราจึงสามารถกำหนดให้แรง f_3 มีค่าเป็น k เท่าของแรง f_1 หรือ $f_3 = kf_1$ เราสามารถคำนวณแรงที่กระทำกับหมุดได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 9 ประกอบ)



รูปที่ 9 แรงที่กระทำกับหมุดขณะเกิดการสัมผัสสามจุดใน

ผลรวมของแรงตามแนวแกน x คือ

$$+ \sum F_x = F_x + f_1 - f_2 + f_3 = 0$$

$$\rightarrow F_x = -f_1 + f_2 - f_3 = -f_1 - kf_1 + f_2$$

$$F_x = -(1+k)f_1 + f_2$$

(16)

ผลรวมของแรงตามแนวแกน z คือ

$$\downarrow + \sum F_z = F_z - \mu f_1 - \mu f_2 - \mu f_3 = 0$$

$$F_z = \mu f_1 + \mu f_2 + \mu f_3 = \mu f_1 + \mu f_2 + k\mu f_1$$

$$F_z = \mu(1+k)f_1 + \mu f_2$$

(17)

โมเมนต์ลัพธ์ในแนวแกน y เท่ากับศูนย์

$$\curvearrowright + \sum M = M - \mu f_1 r_a - f_1 r_b - \mu f_2 r_c + \mu f_3 r_d - f_3 r_e = 0$$

$$M = \mu f_1 r_a + f_1 r_b + \mu f_2 r_c - \mu f_3 r_d + f_3 r_e$$

$$r_a = \frac{S_p}{2} + r, r_b = l, r_c = \frac{S_p}{2} - r = r_d, r_e = l$$

$$M = (\mu r_a + r_b)f_1 + (r_e - \mu r_d)kf_1 + \mu r f_2$$

$$M = [(r_e - \mu r_d)k + (\mu r_a + r_b)]f_1 + \mu r f_2$$

(18)

นำ μ ไปคูณกับสมการที่ (16) แล้วนำผลที่ได้ไปบวกและลบกับสมการที่

(17) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$f_1 = \frac{F_z - \mu F_x}{2\mu(1+k)} \text{ และ } f_2 = \frac{F_z + \mu F_x}{2\mu}$$

จากนั้นแทนค่า f_1 และ f_2 ลงในสมการ (18) แล้วจัดรูปใหม่

$$M = [(r_e - \mu r_d)k + (\mu r_a + r_b)] \left(\frac{F_z - \mu F_x}{2\mu(1+k)} \right) +$$

$$\mu r_c \left(\frac{F_z + \mu F_x}{2\mu} \right)$$

$$M = \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4} + \frac{l}{2\mu} + \frac{r}{2} \right] (F_z - \mu F_x)$$

$$+ \left[\frac{S_p}{4} - \frac{r}{2} \right] (F_z + \mu F_x)$$

$$A = \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4} + \frac{l}{2\mu} + \frac{r}{2}, B = \frac{S_p}{4} - \frac{r}{2}$$

$$M = (A+B)F_z - \mu(A-B)F_x$$

$$\frac{M}{rF_z} = \frac{A+B}{r} - \left(\frac{\mu(A-B)}{r} \right) \frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{M}{rF_z} = \mu \left[\left(\frac{2k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} - \frac{l}{2r\mu} - 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \left[\left(\frac{2}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \frac{l}{2r\mu} \right]$$

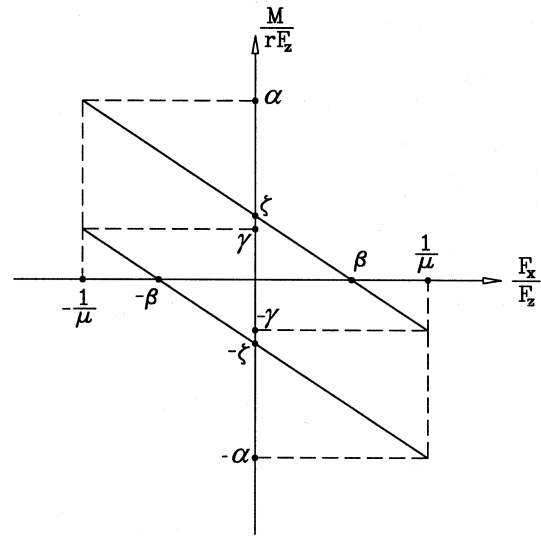
$$\frac{M}{rF_z} = \mu \left[\left(\frac{2k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} - \lambda - 1 \right] \frac{F_x}{F_z} + \left[\left(\frac{2}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \lambda \right] \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{l}{2r\mu}$$

$$\alpha = \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{d} + 2\lambda + 1, \gamma = \frac{S_p}{d} - 1$$

$$\zeta = \left(\frac{2}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \lambda, \beta = \frac{\left(\frac{2}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \lambda}{\mu \left[\lambda + 1 - \left(\frac{2k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} \right]}$$

เราสามารถนำสมการ (19) ไปสร้างแผนภาพ jamming ได้ดังแสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 10 แผนภาพ jamming ของการสัมผัสสามจุดใน

2.6 การสัมผัสสี่จุด

การสัมผัสสี่จุดนอกนั้น ระยะศูนย์กลางระหว่างหมุด (S_p) จะมีค่าเท่ากับ ระยะศูนย์กลางระหว่างรู (S_h) ขนาดของหมุดทั้งสองมีค่าไม่เท่ากัน มีแรงกระทำกับหมุดคือ แรงที่ใช้สวมหมุดและแรงปฏิกิริยาที่จุดซึ่งสัมผัสกับผนังด้านในของรูสี่จุด จากรูปจะเห็นว่าแรง f_1 ขนานกับ f_3 และ แรง f_2 ขนานกับ f_4 นั่นหมายถึงแรงแต่ละคู่อยู่ในทิศทางเดียวกันแต่มีขนาดต่างกัน ดังนั้นเราสามารถกำหนดให้แรง f_3 มีค่าเป็น k เท่าของแรง f_1 และ f_4 มีค่าเป็น q เท่าของแรง f_2 หรือ $f_3 = k f_1$ และ $f_4 = q f_2$ ตามลำดับ เราสามารถคำนวณแรงที่กระทำกับหมุดได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 11 ประกอบ)

ผลรวมของแรงตามแนวแกน x คือ

$$+ \sum F_x = F_x + f_1 - f_2 + f_3 - f_4 = 0$$

$$\rightarrow F_x = -f_1 + f_2 - f_3 + f_4$$

$$= -f_1 - kf_1 + f_2 + qf_2$$

$$F_x = -(1+k)f_1 + (1+q)f_2$$

(20)

ผลรวมของแรงตามแนวแกน z คือ

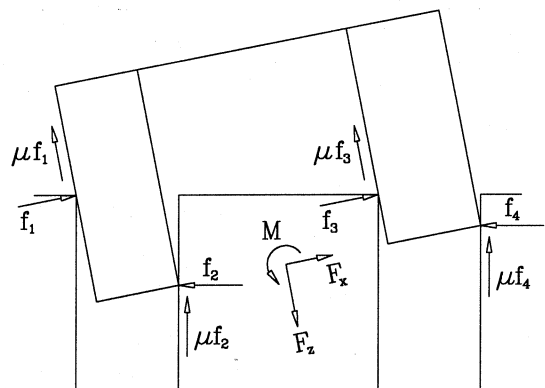
$$\downarrow + \sum F_z = F_z - \mu f_1 - \mu f_2 - \mu f_3 - \mu f_4 = 0$$

$$F_z = \mu f_1 + \mu f_2 + \mu f_3 + \mu f_4$$

$$= \mu(f_1 + kf_1) + \mu(f_2 + qf_2)$$

$$F_z = (1+k)\mu f_1 + (1+q)\mu f_2$$

(21)



รูปที่ 11 แรงที่กระทำกับหมุดขณะเกิดการสัมผัสสี่จุด

โมเมนต์ลัพธ์ในแนวแกน y เท่ากับศูนย์

$$\sum M = M - f_1 r_a - \mu f_1 r_b - \mu f_2 r_c + \mu f_3 r_d - f_3 r_e + \mu f_4 r_f = 0$$

$$M = f_1 r_a + \mu f_1 r_b + \mu f_2 r_c - \mu f_3 r_d + f_3 r_e - \mu f_4 r_f$$

$$r_a = l, r_b = \frac{S_p}{2} + r_1, r_c = \frac{S_p}{2} - r_1,$$

$$r_d = \frac{S_p}{2} - r_2, r_e = l, r_f = \frac{S_p}{2} + r_2$$

l = ความลึกของการสวม r_1, r_2 = รัศมีของหมุด

$$M = (r_a + \mu r_b) f_1 + (r_e - \mu r_d) f_3 + \mu f_2 r_c - \mu f_4 r_f$$

$$M = [(r_a + \mu r_b) + (r_e - \mu r_d) k] f_1 + (\mu r_c - \mu r_f) f_2 \quad (22)$$

นำ μ ไปคูณกับสมการที่ (20) แล้วนำผลที่ได้ไปบวกและลบกับสมการที่

(21) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$f_1 = \frac{F_z - \mu F_x}{2\mu(1+k)} \quad \text{และ} \quad f_2 = \frac{\mu F_x + F_z}{2\mu(1+q)}$$

จากนั้นแทนค่า f_1 และ f_2 ลงในสมการ (22) แล้วจัดรูปใหม่

$$M = [(r_a + \mu r_b) + (r_e - \mu r_d) k] \left(\frac{F_z - \mu F_x}{2\mu(1+k)} \right)$$

$$+ (\mu r_c - \mu r_f) \left(\frac{\mu F_x + F_z}{2\mu(1+q)} \right)$$

$$A = \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4} + \frac{l}{2\mu} + \frac{r_1 + kr_2}{2(1+k)},$$

$$B = \left(\frac{1-q}{1+q} \right) \frac{S_p}{4} - \frac{(r_1 + qr_2)}{2(1+q)}$$

$$M = (A+B)F_z + \mu(B-A)F_x$$

$$\frac{M}{rF_z} = \mu(B-A) \frac{F_x}{rF_z} + \frac{A+B}{r} ; r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$\frac{M}{rF_z} = \mu \left[\left(\frac{1-q}{1+q} - \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} - \frac{l}{2r\mu} - \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+k} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{r_2}{2r} \left(\frac{q}{1+q} + \frac{k}{1+k} \right) \right] \frac{F_x}{F_z}$$

$$+ \left[\left(\frac{1-q}{1+q} + \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \frac{l}{2r\mu} + \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{1+q} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{r_2}{2r} \left(\frac{k}{1+k} - \frac{q}{1+q} \right) \right]$$

$$\frac{M}{rF_z} = \mu \left[\left(\frac{1-q}{1+q} - \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} - \lambda - \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+k} \right) \right.$$

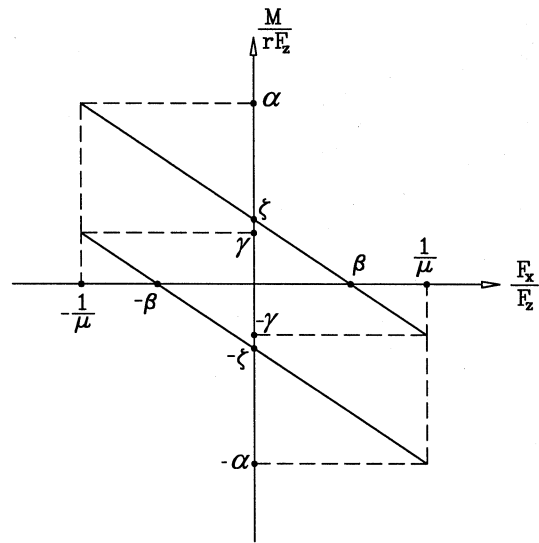
$$\left. - \frac{r_2}{2r} \left(\frac{q}{1+q} + \frac{k}{1+k} \right) \right] \frac{F_x}{F_z}$$

$$+ \left[\left(\frac{1-q}{1+q} + \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \lambda + \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{1+q} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{r_2}{2r} \left(\frac{k}{1+k} - \frac{q}{1+q} \right) \right]$$

(23)

จะเห็นว่าสมการที่ 23 ขึ้นอยู่กับทั้งค่า q และ k ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนำสมการที่ 23 ไปสร้างแผนภาพ jamming ของการสัมผัสสี่จุด ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12 แผนภาพ jamming ของการสัมผัสสี่จุด

$$\zeta = \left(\frac{1-q}{1+q} + \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \lambda + \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{1+q} \right)$$

$$+ \frac{r_2}{2r} \left(\frac{k}{1+k} - \frac{q}{1+q} \right)$$

$$\beta = \left(\frac{1-q}{1+q} + \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \lambda + \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{1+q} \right) + \frac{r_2}{2r} \left(\frac{k}{1+k} - \frac{q}{1+q} \right)$$

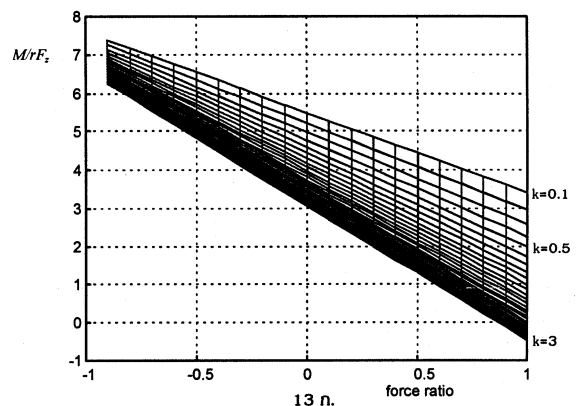
$$\mu \left[\lambda + \frac{r_1}{2r} \left(\frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+k} \right) + \frac{r_2}{2r} \left(\frac{q}{1+q} + \frac{k}{1+k} \right) - \left(\frac{1-q}{1+q} - \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} \right]$$

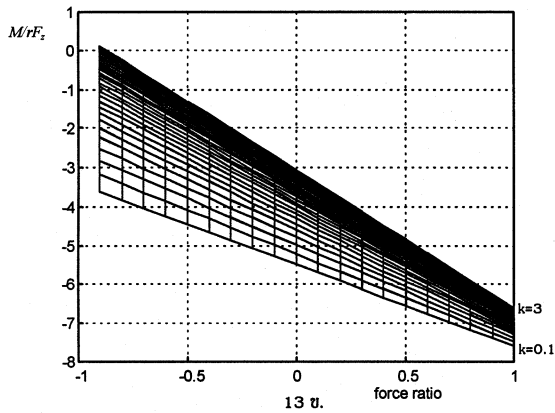
$$\gamma = \left(\frac{1-q}{1+q} \right) \frac{S_p}{4r} - \frac{r_1}{r} \left(\frac{1}{1+q} \right) - \frac{r_2}{r} \left(\frac{q}{1+q} \right)$$

$$\alpha = 2\lambda + \left(\frac{1-k}{1+k} \right) \frac{S_p}{4r} + \frac{r_1}{r} \left(\frac{1}{1+k} \right) + \frac{r_2}{r} \left(\frac{k}{1+k} \right)$$

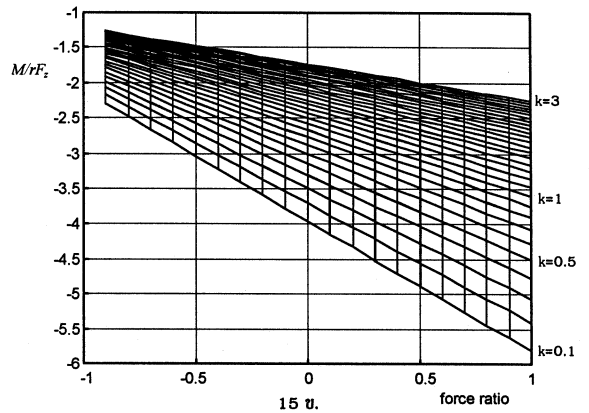
3. ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์

จากสมการที่ 15, 19 และ 23 เราสามารถนำมาสร้างเส้นตรงที่ค่าความชันเปลี่ยนไป ตามค่า k ดังแสดงในรูปที่ 13 ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงความชันของสมการที่ 15 (การสัมผัสสามจุดนอก) ,รูปที่ 14 ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงความชันของสมการที่ 19 (การสัมผัสสามจุดใน) และ รูปที่ 15-17 ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงความชันของสมการที่ 23 ตามค่า k และ q (การสัมผัสสี่จุด)

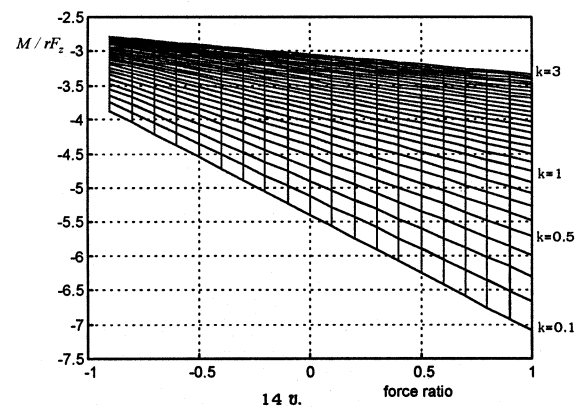
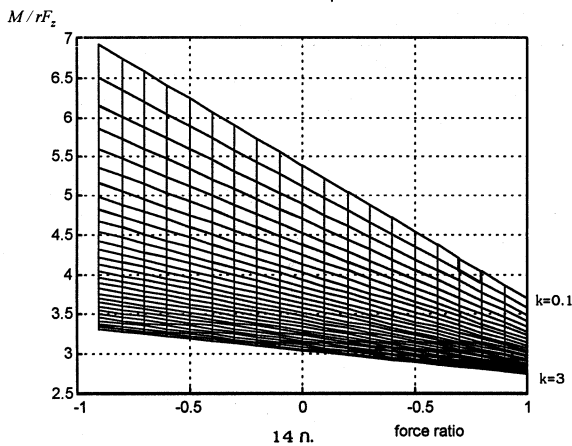




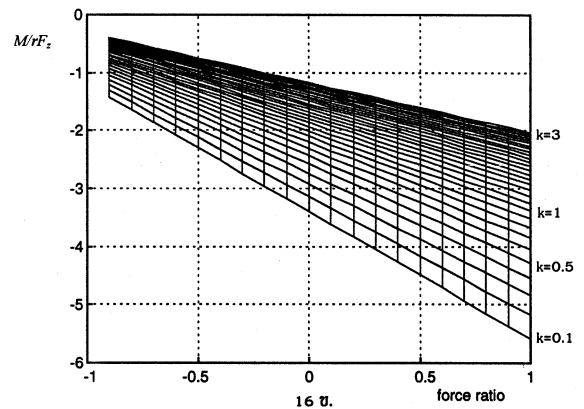
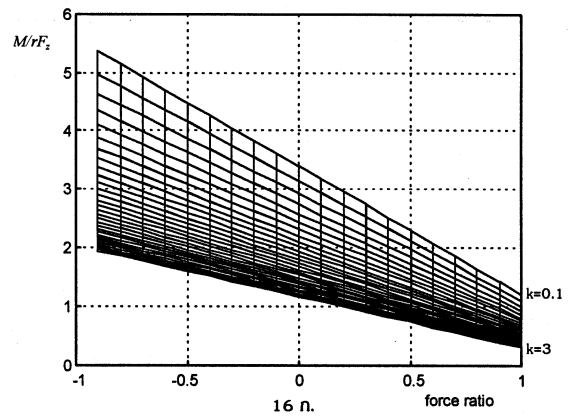
รูปที่ 13 ก, ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง M/rF_z และ force ratio
สำหรับการสัมผัสสามจุดนอก (สมการ 15)



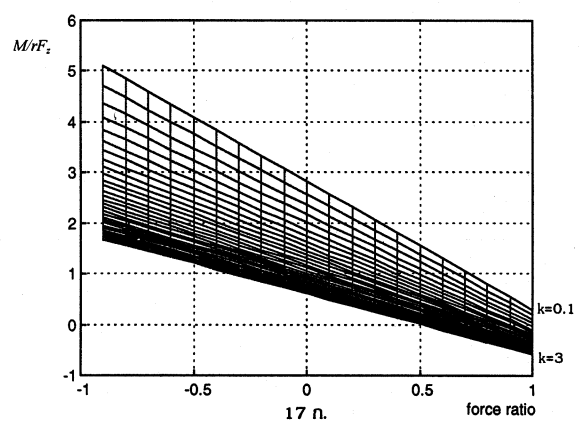
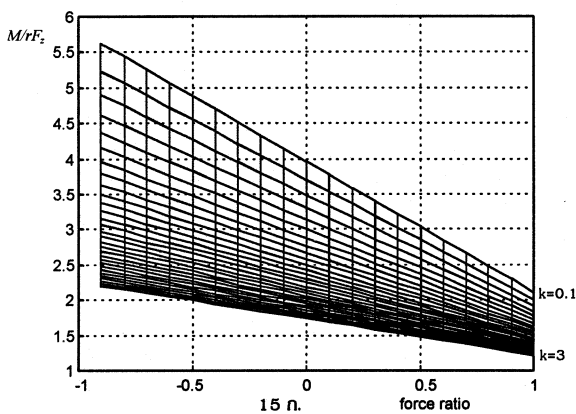
รูปที่ 15 ก, ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง M/rF_z และ force ratio
สำหรับการสัมผัสสี่จุด ($q=0.5$, สมการ 23)

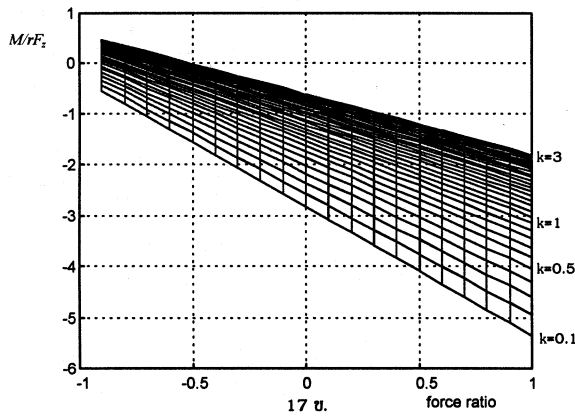


รูปที่ 14 ก, ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง M/rF_z และ force ratio
สำหรับการสัมผัสสามจุดใน (สมการ 19)



รูปที่ 16 ก, ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง M/rF_z และ force ratio
สำหรับการสัมผัสสี่จุด ($q=1$, สมการ 23)





รูปที่ 17 ก,ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง M/rF_z และ force ratio สำหรับการสัมผัสสี่จุด ($q=2$, สมการ 23)

จากกราฟ เส้นตรงที่เป็นส่วนประกอบของแผนภาพ jamming พบว่า

1. ความชันของเส้นตรงเปลี่ยนไป การเปลี่ยนแปลงความชันของเส้นตรงขึ้นอยู่กับค่า k และ q ค่า k และ q คืออัตราส่วนของแรงปฏิกิริยาดังฉาก (การเปลี่ยนแปลงความชันของเส้นตรงขึ้นอยู่กับค่า k สำหรับการสัมผัสสามจุด, k และ q สำหรับการสัมผัสสี่จุด)
2. แผนภาพ jamming ของ การสัมผัส สองจุด มีความชันคงที่
3. เมื่อค่า k และ q มากขึ้นพื้นที่ของแผนภาพ jamming มีขนาดเล็กลง
4. การเปลี่ยนแปลงความชันของ แผนภาพ jamming มีลักษณะเป็นรูปกรวย
การสัมผัสสามจุดนอกยอดกรวยอยู่ที่จุด
 - 4.1 $(-1/\mu, \alpha)$ และ $(1/\mu, -\alpha)$ (ค่า α ให้ดูจากรูปที่ 13)
 - 4.2 การสัมผัสสามจุดในยอดกรวยอยู่ที่จุด $(1/\mu, -\gamma)$ และ $(-1/\mu, \gamma)$ (ค่า γ ให้ดูจากรูปที่ 14)
 - 4.3 การสัมผัสสี่จุดยอดกรวยอยู่ที่จุด $(1/\mu, -\gamma)$ และ $(-1/\mu, \gamma)$ (ค่า γ ให้ดูจากรูปที่ 15-17)
5. แรง F_z เป็นตัวแปรสำคัญที่จะกำหนดพิคัดบนแผนภาพ jamming

4. สรุป

การวิเคราะห์แรงที่กระทำกับหมุดคู่ ตามรูปแบบการสัมผัสแบบต่างๆ ทำให้สามารถสร้างแผนภาพ jamming ของการสัมผัสแบบนั้นๆได้ แผนภาพ jamming ที่สร้างขึ้นมาจะเป็นแนวทางหนึ่งที่จะทำให้การสวมหมุดคู่ด้วยวิธีการป้อนกลับของแรง(force feedback) หลีกเลียงภาวะ jamming ได้

5. เอกสารอ้างอิง

1. Ohwovoriole, M. S., 1980a, "An Extension of Screw Theory and Its Application to the Automation of Industrial Assemblies," *PhD dissertation*, Stanford University, Stanford, CA
2. Whitney, D. E., "Quasi-Static Assembly of Compliantly Supported Rigid Parts", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May 1993, pp 65-77

3. R. H. Sturges, K. Sathirakul, "An Analysis of Multiple Peg-in-Hole Insertion Tasks", *Proceeding of The 1996 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers in Engineering Conference*, August 18-22, 1996, Irvine, California.
4. S. Simunovic., "Force information in assembly processes", *In 5th International Symposium on Industrial Robots*, pages 415-431, 1975
5. T.L. De Fazio., "Displacement state monitoring for the remote center compliance (RCC): Realizations and applications.", *In 1st International Conference on Assembly Automation*, pages 33-42, 1980
6. H. Inoue., "Force feedback in precise assembly tasks.", *Memo 308*, MIT AI Laboratory, 1974