เส้นผ่านจุดยอดของการสั่นสะเทือนอิสระ แบบหน่วงน้อย

The Curves through Extrema of an Underdamped Free Vibration

สมิทธ์ เอี่ยมสอาด
เมธี ใบงาม

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
51 ถ.เชื่อมสัมพันธ์ หนองจอก
กรุงเทพ 10530

งานวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาถึง เส้นกราฟที่ลากตัดผ่านจุดยอดของสมการการเคลื่อนที่ในกรณีของการสั่นสะเทือนอิสระแบบความหน่วงน้อย (Underdamped) กราฟที่ลากตัดผ่านจุดยอดนี้จะต่างจากเส้นกรอบ (Envelope) ซึ่งแสดงกันโดยทั่วไป

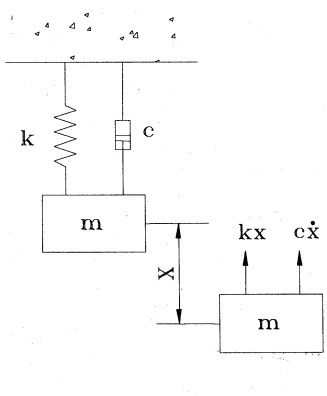
This research studies the curves that pass through the extrema of an underdamped free vibration motion. These curves are different from the envelope curves usually shown in text books

1. บทนำ

โดยทั่วไปแล้วทฤษฎีของการสั่นสะเทือนอิสระในกรณีของค่าความหน่วงน้อย มีมาเป็นเวลานานแล้วและได้แสดงไว้ในหนังสือทั่วไป [1,2,3,4] ซึ่งทราบดีว่ากราฟของการเคลื่อนที่ของกรณีความหน่วงน้อยจะมีค่าลดลงเรื่อยๆภายใต้เส้นกรอบ (Envelope) แบบฟังชัน เอกซ์โพเนนเชียล (exponential function) แต่ในหนังสือทั่วไป จะชี้แนะว่าเส้นกรอบนี้เป็นเส้นกราฟที่ผ่านจุดยอดด้วยซึ่งไม่ถูกต้องโดยในบทความฉบับนี้จะได้แสดงสมการของเส้นกราฟที่ตัดผ่านจุดยอด ของสมการการเคลื่อนที่ *x(t)*

2. สมการการเคลื่อนที่

พิจารณาจากระบบ ที่มีมวลสาร *m* ที่ต่อเข้ากับสปริงที่มีค่านิจ *k* และตัวหน่วงที่มีความหนืด *c* โดยมีระยะยืดเป็น *x* ที่มวลสารกระทำกับระบบ ดังในรูป 2.1



รูปที่ 2.1 แสดง ระบบที่ประกอบด้วยมวลสาร *m* ต่อเข้ากับสปริงที่มีค่านิจ *k* และตัวหน่วงที่มีความหนืด *c* และระยะยืดเป็น *x* โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

ถ้ากำหนดให้ *x* เป็นการเคลื่อนที่จากสภาวะสมดุลเราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ ในกรณีที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับระบบ ได้อยู่ในรูปของ [3,4]

$$m.\ddot{x}+c.\dot{x}+k.x=0 \qquad (2.1)$$

เมื่อจุดเหนือฟังชันหมายถึงอนุพันธ์เมื่อเทียบกับเวลาและถ้าหารด้วยมวล *m* ตลอดจะสามารถเขียนสมการ (2.1) ได้ในรูป

$$\ddot{x}+2.\zeta.\omega_n.\dot{x}+\omega_n^2.x=0 \qquad (2.2)$$

เมื่อ ζ เป็นอัตราส่วนของค่าตัวหน่วง (Damping ratio) ซึ่งมีค่าจำกัดความดังนี้

$$\zeta = \frac{c}{2.m.\omega_n} \qquad (2.3)$$

และ ω_n คือความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนแบบไม่มีตัวหน่วงซึ่งมีค่า

$$\omega_n^2=\frac{k}{m} \qquad (2.4)$$

ฟังชันการเคลื่อนที่ *x(t)* สามารถหาได้โดยง่ายในกรณีที่ ζ มีค่าต่างๆ กัน ในบทความนี้เราจะพิจารณาเฉพาะ ในกรณีที่ $\zeta<1$ ซึ่งเรียกกรณีนี้ว่า ความหน่วงน้อย (Underdamed) ผลลัพธ์ฟังชันการเคลื่อนที่ *x(t)* สามารถเขียนอยู่ในรูป [3]

$$x(t)=e^{-\zeta.\omega_n.t}.(A_1.\sin\omega_d.t+A_2.\cos\omega_d.t)$$

หรือ

$$x(t)=e^{-\zeta.\omega_n.t}.(A.\sin\omega_d.t+\phi) \qquad (2.5)$$

เมื่อ ϕ คือมุมเฟส (Phase angle) *A* เป็นค่าคงที่และ ω_d คือค่าความถี่การสั่นสะเทือนแบบมีค่าตัวหน่วงซึ่งมีความสัมพันธ์กับ ω_n ตามสมการ

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (2.6)$$

ค่าคงที่ของ (A_1,A_2) หรือ (A,ϕ) สามารถหาได้จากค่าเริ่มต้น *(t=0)* เช่น

$$x(0)=x_0$$
$$\dot{x}(0)=v_0 \qquad (2.7)$$

ค่าคงที่คือ

$$A_1=x_0$$
$$A_2=\frac{v_0+x_0.(\zeta.\omega_n)}{\omega_d} \qquad (2.8)$$

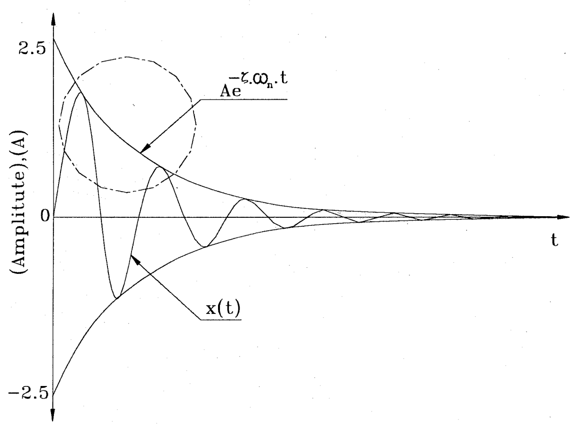
และ

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0+\zeta.\omega_n.x_0}{\omega_d}\right)^2}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{x_0.\omega_d}{x_0+\zeta.\omega_n.x_0}\right) \quad (2.9)$$

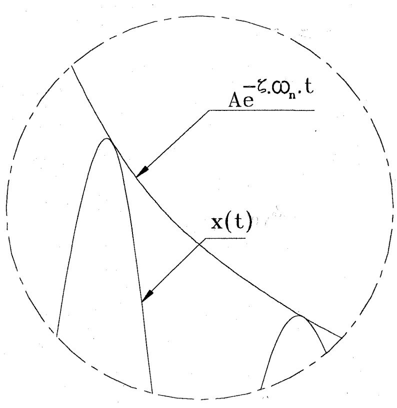
ตัวอย่างการเคลื่อนที่ในสมการ (2.5) สามารถแสดงเป็นกราฟได้ดัง ในรูป 2.2 สำหรับในกรณีที่ ζ = 0.2 ϕ = 0 และ A = 2.5 ในรูปได้แสดงกราฟของ $Ae^{-\zeta.\omega_n.t}$ และกราฟของ$x(t)$ จากสมการที่ (2.5)

รูปที่ 2.2 แสดงกราฟของฟังชันการเคลื่อนที่ $x(t)$ ใน (2.5)



เส้นกราฟ $Ae^{-\zeta.\omega_n.t}$ มักจะเรียกว่าเป็นเส้นกรอบหรือ Envelope ของการเคลื่อนที่และ***มักจะแสดงว่าจุดที่กราฟตัดผ่านจะเป็นจุดยอด*** ของ$x(t)$ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าสูงสุดของ $x(t)$ ก็จะ ลดลง [1,2]

รูปที่ 2.3 แสดงภาพขยายของกราฟสมการเส้นกรอบ $Ae^{-\zeta.\omega_n.t}$ ที่วิ่งสัมผัสกราฟฟังชัน $x(t)$



แต่ในความเป็นจริง จะเห็นได้ชัดเจนจากรูปที่ 2.3 ว่ากราฟ $Ae^{-\zeta.\omega_n.t}$ เป็นเส้นกรอบในลักษณะที่เป็นเส้นสัมผัสกับกราฟของ$x(t)$ โดยจุดที่สัมผัสถูกกำหนดโดยสมการ

$$\sin(\omega_d.t+\phi)=\pm 1$$

หรือ

$$t=\frac{[(2n-1)\pi-\phi]}{\omega_d}\quad , \quad n=1,2,.. \quad (2.10)$$

ที่เวลาดังกล่าวใน(2.10)ไม่ใช่จุดสูงสุดหรือต่ำสุดของการเคลื่อนที่แม้ว่าในกรณีทั่วไป จะมีค่าใกล้เคียงกันมากก็ตาม [2]

ตำแหน่งที่ $x(t)$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสามารถที่จะหาได้จากสมการ[5]

$$\frac{dx}{dt}=0$$

โดยทำการแทนค่า $x(t)$ จากสมการ (2.5) จะพบว่าค่าสูงสุดของ $x(t)$ จะเกิดขึ้นที่เวลา t ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของสมการ

$$\tan(\omega_d.t+\phi_d)=\frac{\omega_d}{\zeta.\omega_n}=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (2.11)$$

นั่นคือค่าสูงสุดของฟังชัน $x(t)$ เกิดขึ้นที่จุด

$$t=\frac{1}{\omega_d}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)-\phi\right) \quad (2.12)$$

จะเห็นได้ง่ายว่าเวลาที่การเคลื่อนที่มีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดไม่ใช่เวลาที่เส้นกรอบ $Ae^{-\zeta.\omega_n.t}$ สัมผัสกราฟของฟังชันการเคลื่อนที่เนื่องจากจุดที่สัมผัสเหล่านั้นค่า $\sin(\omega_d.t+\phi)$ เท่ากับ ± 1 ซึ่งหมายความว่าค่า $\tan(\omega_d.t+\phi)$ เท่ากับ $\pm\infty$ ที่จุดเหล่านั้น แต่ในสมการ (2.11) ค่า $\tan(\omega_d.t+\phi)$ มีค่า $\pm\infty$ เฉพาะในกรณี ζ=0 เวลาที่ค่าใน (2.12) สูงสุดจะมีหลายค่าและอยู่ห่างกัน $\frac{\pi}{\omega_d}$ เนื่องจากคุณสมบัติของฟังชัน $\tan(\omega_d.t+\phi)$โดยที่การเคลื่อนที่จะเป็นค่าสูงสุดสลับกับค่าต่ำสุดไปเรื่อยๆ นั่นคือค่าสูงสุดคู่ใดคู่หนึ่งจะอยู่ห่างกัน $\frac{2\pi}{\omega_d}$ ซึ่งคือคาบของการเคลื่อนที่นั่นเอง ส่วนค่าต่ำสุดคู่ใดคู่หนึ่งก็จะมีลักษณะทำนองเดียวกัน

เพื่อหาค่าฟังชันการเคลื่อนที่ที่จุดยอด เราสังเกตว่าถ้า $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ มีค่า $\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ ค่า $\sin\theta$ จะสามารถหาได้โดยง่ายและมีค่า

$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.13)$$

ดังนั้นค่าฟังชันการเคลื่อนที่ที่จุดยอดคือ

$$x(\bar{t})=\pm Ae^{-\zeta.\omega_n.\bar{t}}\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.14)$$

เมื่อ $\bar{t}$ คือเวลาที่จุดยอดใน (2.12) $\theta=\omega_d\bar{t}+\phi$

เราสรุปจาก (2.14) ได้ว่าจุดยอดจะอยู่บนกราฟของฟังชันในรูป

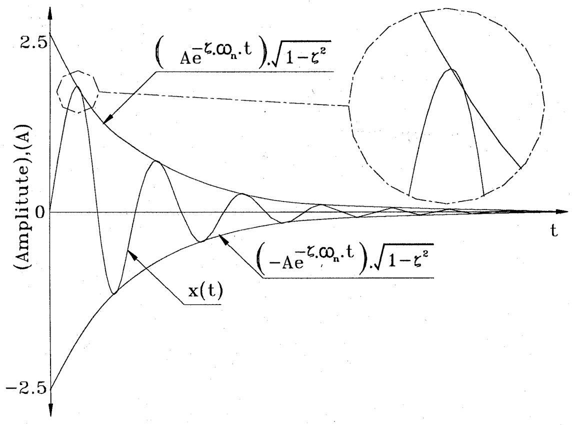
$$g(t)=\pm\beta.e^{-\zeta.\omega_n.t} \quad (2.15)$$

เมื่อ

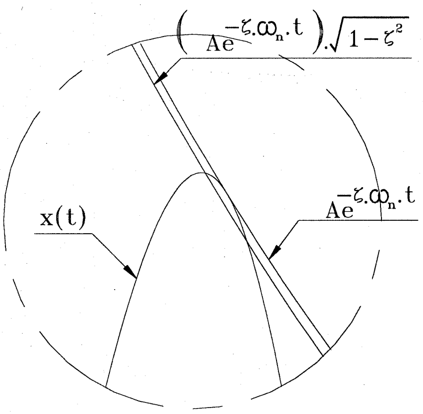
$$\beta=A\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.16)$$

เมื่อ β เป็นค่าคงที่ที่ได้จากความสัมพันธ์ทางเลขาคณิต

ในรูป 2.4 เราได้แสดงกราฟฟังชันการเคลื่อนที่ที่มีค่าเช่นเดียวกับในรูป2.3 แต่แสดงเส้นผ่านจุดยอดแทนเส้นกรอบ ส่วนความแตกต่างระหว่างผ่านจุดยอดและเส้นกรอบได้แสดงไว้ในภาพขยายในรูป 2.5



รูปที่ 2.4 แสดงกราฟที่ตัดผ่านจุดต่ำสุดและสูงสุดของการเคลื่อนที่



รูปที่ 2.5 แสดงรูปขยายของความแตกต่าง ของ เส้นกรอบ Envelope และ g(t) ที่ตัดผ่านจุดยอด ของ x(t)

จากสมการที่ (2.16) ค่าความแตกต่างของ β และ A จะขึ้นอยู่กับค่าของ ζ เมื่อ ζ มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของ β และ A จะส่งผลให้ความแตกต่างของฟังชัน $x(t)$ และ $g(t)$ ชัดเจนขึ้น

3. บทสรุป

จากรูปที่ 2.5 จะแสดงให้เห็นว่ากราฟที่ได้จากสมการที่ (2.15) และกราฟจากสมการเส้นกรอบ $Ae^{-\zeta.\omega_n.t}$ เป็นกราฟที่แตกต่างกันซึ่งกราฟจากสมการเส้นกรอบจะเป็นกราฟที่ลากสัมผัสผ่านกราฟฟังชัน $x(t)$ แต่กราฟของฟังชัน $g(t)$ จะตัดผ่านจุดยอดของฟังชัน $g(t)$ โดยมีค่าคงที่คูณเข้ามาคือ $\sqrt{1-\zeta^2}$

<u>เอกสารอ้างอิง</u>

1. S.Graham Kelly , Fundamentals of mechanicalvibrations, Mcgraw-Hill series in mechanicalengineering,1993 (page 118-21)
2. รศ.ดร. เดช พุทธเจริญทอง,การวิเคราะห์การสั่นสะเทือน (vibration analysis),ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ,พิมพ์ครั้งที่5 2539
3. Daniel J. Inman Virginia Polytechnic Institute and State University ,Engineering vibration, Prentice- Hall 1996 (page 16-20)
4. William T. Thomson, Professor Emeritus, Theory of vibration with applications fourth edition , Chapman&Hall (page 28-33)
5. Sherman K. Stein , Anthony Barcellos ,Calculus and analytic geometry fifth edition , McGraw- Hellenic
6. Leonard Meirovitch , Virginia Polytechnic Institute and State University, Elements of vibration analysis second edition 1986 , McGraw-Hill Inc